BERKELEY
LIBRARY
UNIVERSITY OF
CALIFORNIA

MATH-
STAT.
LIBRARY

STATE
LIBRARY

MA
STA
LIBRA

MATH
STAT
LIBRA

MATH
STAT.
LIBRARY

MATH.
STAT.
LIBRARY

A. R. Williams

TRAITÉ

DE

CALCUL DIFFÉRENTIEL

ET

DE CALCUL INTÉGRAL.

L'Auteur et l'Éditeur de cet Ouvrage se réservent le droit de le traduire ou de le faire traduire en toutes langues. Ils poursuivront, en vertu des Lois, Décrets et Traités internationaux, toutes contrefaçons soit du texte, soit des gravures, ou toutes traductions faites au mépris de leurs droits.

Le dépôt légal de cet Ouvrage a été fait à Paris dans le cours de 1864, et toutes les formalités prescrites par les Traités sont remplies dans les divers États avec lesquels la France a conclu des conventions littéraires.

Tout exemplaire du présent Ouvrage qui ne porterait pas, comme ci-dessous, la signature de l'Éditeur, sera réputé contrefait. Les mesures nécessaires seront prises pour atteindre, conformément à la loi, les fabricants et les débitants de ces exemplaires.

Gauthier Villars

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS, SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Rue de Seine-Saint-Germain, 10, près l'Institut.

TRAITÉ

DE

CALCUL DIFFÉRENTIEL

ET

DE CALCUL INTÉGRAL,

PAR J. BERTRAND,

MEMBRE DE L'INSTITUT,

PROFESSEUR A L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE ET AU COLLÉGE DE FRANCE.

Ptolemæus rex quæsisse ex Euclide dicitur, esseine aliqua regia ad Mathesin via, id est plana facilisque : negavit Euclides, sed eam hodie novis detectis methodis aperuimus.

G.-G LEIBNITZ.

CALCUL DIFFÉRENTIEL.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE,

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, 55.

—

1864

(L'Auteur et l'Éditeur de cet Ouvrage se réservent le droit de traduction.)

179211

53106714

cal/rep
MATH
v.1 of 2 vols.

TABLE DES MATIÈRES.

Pages.

PRÉFACE..... 1

QA300
B5
v.1
MATH

PREMIÈRE PARTIE.

CALCUL DIFFÉRENTIEL.

LIVRE PREMIER.

ÉTUDE DES DIFFÉRENTIELLES ET DES DÉRIVÉES.

CHAPITRE PREMIER. — INFINIMENT PETITS DES DIFFÉRENTS ORDRES, LEUR USAGE EN GÉOMÉTRIE... 1
— Définitions..... 1
— Substitution des infiniment petits..... 8
— Emploi des infiniment petits dans la solution de quelques problèmes. — Détermination de la tangente à quelques courbes..... 9
— Détermination de quelques plans tangents..... 15
— Longueur de quelques arcs de courbe..... 19
— EXERCICES..... 24

CHAPITRE II. — DÉRIVÉES ET DIFFÉRENTIELLES DU PREMIER ORDRE..... 26
— Définition de la dérivée..... 26
— Dérivées des fonctions simples..... 26
— Dérivées des fonctions inverses..... 29
— Dérivées des fonctions de fonctions..... 33
— Dérivée d'un produit..... 35
— Dérivée d'un quotient..... 35
— Dérivée d'une puissance..... 36
— Dérivée de u^v..... 36
— Quelques applications..... 37
— Emploi des dérivées pour l'étude des fonctions..... 39
— Ordre de grandeur d'une dérivée infiniment petite..... 40
— Différentielle d'une fonction d'une seule variable..... 41
— Dérivées partielles des fonctions de plusieurs variables..... 44
— Différentielle d'une fonction de plusieurs variables..... 47
— Dérivées des fonctions composées..... 50
— Dérivées des fonctions implicites..... 52
— EXERCICES..... 59

Pages.

CHAPITRE III. — Déterminant d'un système de fonctions 61
— Définition des déterminants 61
— Définition du déterminant d'un système de fonctions 62
— Cas où le déterminant est nul 64
— Déterminant d'un système de fonctions de fonctions 66
— Déterminant d'un système de fonctions inverses 67
— Réduction du déterminant à un monôme 69
— Exercices 71

CHAPITRE IV. — Théorie analytique des tangentes et des plans tangents 73
— Équations de la tangente et de la normale à une courbe plane 73
— Détermination de quelques tangentes 77
— Remarque relative aux problèmes précédents 85
— Tangentes aux courbes rapportées aux coordonnées polaires 86
— Tangentes aux courbes à double courbure 89
— Courbes tracées sur une sphère 90
— Équation du plan tangent à une surface 91
— Équations de la normale 93
— Détermination de quelques plans tangents 96
— Courbes et surfaces enveloppes 108
— Application à quelques exemples 112
— Exercices 117

CHAPITRE V. — Différentielles de quelques fonctions définies géométriquement 119
— Différentielle d'une aire plane 119
— Différentielle d'un arc de courbe 121
— Différentielle d'un arc de courbe dans un système de coordonnées curvilignes 125
— Exercices 132

CHAPITRE VI. — Dérivées et différentielles d'ordre supérieur au premier 134
— Définition des dérivées d'ordre supérieur 134
— Définition des différentielles d'ordre supérieur 134
— Détermination des dérivées successives d'une fonction 137
— Valeur numérique de quelques dérivées lorsque l'on suppose la variable nulle 145
— Dérivées et différentielles d'ordre supérieur pour les fonctions de plusieurs variables indépendantes. — Notation adoptée 156
— Possibilité d'intervertir les différentiations 156
— Différentielles des divers ordres pour les fonctions de plusieurs variables 158
— Dérivées d'ordre supérieur des fonctions implicites 161
— Exercices 164

CHAPITRE VII. — Changements de variables 167
— Influence de la variable indépendante sur les différentielles d'ordre supérieur au premier 167
— Changement de la variable indépendante 168
— Changement simultané de toutes les variables 170
— Cas de plusieurs variables indépendantes 174
— Cas où l'on change la fonction 177
— Quelques exemples 178
— Exercices 187

CHAPITRE VIII. — Formation des équations différentielles 189

Pages.
— Définition des équations différentielles..... 189
— Élimination des constantes..... 190
— Élimination des constantes dans une équation qui contient plusieurs variables indépendantes. 192
— Élimination des fonctions arbitraires..... 199
— Équations aux dérivées partielles des diverses classes de surfaces..... 204
— Introduction remarquable d'une équation différentielle dans un problème d'arithmétique..... 216
— Équations différentielles totales..... 218
— Exercices..... 222

LIVRE SECOND.

DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIE.

Pages.
CHAPITRE PREMIER. — Étude générale des séries..... 225
— Définitions..... 225
— Quelques exemples de séries..... 225
— Nécessité de la convergence des séries dont on fait usage..... 230
— Théorèmes relatifs à la convergence des séries à termes positifs..... 232
— Règle de Gauss..... 240
— Méthode de M. Kummer..... 244
— Séries dont les termes sont alternativement positifs et négatifs..... 249
— Séries imaginaires..... 251
— Transformation d'Euler..... 253
— Méthode de Stirling..... 259
— Méthode de M. Kummer..... 261
— Séries ordonnées suivant les puissances d'une variable..... 267
— Continuité des séries..... 270
— Multiplication de deux séries..... 276
— Exercices..... 279
CHAPITRE II. — Théorème de Taylor..... 280
— Démonstration de Taylor..... 280
— Expression du reste de la série..... 281
— Seconde forme du reste..... 283
— Troisième forme du reste..... 284
— Accroissement infiniment petit d'une fonction..... 285
— Remarque sur la série de Taylor..... 285
— Formule de Maclaurin..... 287
— Quelques développements en série..... 288
— Quelques applications du théorème de Taylor..... 307
— Exercices..... 309
CHAPITRE III. — Quelques développements en série..... 310
— Série de Bernoulli..... 310
— Formule de Lagrange..... 312
— Seconde démonstration de la formule de Lagrange..... 317
— Applications de la formule de Lagrange..... 319
— Série de Burmann..... 323
— Série d'Abel..... 324

Pages.

— Méthode des coefficients indéterminés 324
— Théorie des fonctions génératrices 336
— Sur une notation symbolique 343
— Digression sur les Nombres de Bernoulli 347
— Digression sur les fonctions nommées par Legendre X_n 354
— Exercices 359

CHAPITRE IV. — Fonctions d'une variable imaginaire 362
— Définition d'une fonction imaginaire 362
— Définition de quelques fonctions simples 365
— Sur les fonctions qui sont mal déterminées 372
— Développement en série des fonctions imaginaires 380
— Développement de $l(1+z)$ 381
— Développement de $(1+z)^m$ 384
— Quelques développements en série déduits de la considération des fonctions imaginaires 389
— Exercices 392

CHAPITRE V. — Développement d'une fonction de plusieurs variables 394
— Extension du théorème de Taylor à une fonction de deux variables 394
— Expression symbolique du théorème de Taylor 398
— Extension de la formule de Lagrange aux fonctions de deux variables 399
— Démonstration de Jacobi 403

CHAPITRE VI. — Développements en produits d'un nombre infini de facteurs 409
— Condition de convergence des produits infinis 409
— Expression de quelques fonctions sous forme de produits infinis 413
— Expression de quelques autres fonctions 416
— Quelques séries déduites des formules précédentes 419
— Formule de Wallis 424
— Exercices 428

CHAPITRE VII. — Développements en fractions continues 430
— Définition des fractions continues 430
— Transformation d'une série en fraction continue 430
— Expression d'une fonction sous forme de fraction continue 435
— Exercices 445

CHAPITRE VIII. — Théorie des résidus 447
— Détermination d'un résidu 448
— Notations de Cauchy 450
— Théorèmes relatifs aux résidus 452
— Somme des résidus d'une fonction rationnelle 455
— Changement de la variable indépendante 457
— Quelques applications de la théorie des résidus 462
— Calcul des fonctions symétriques 463
— Exercices 470

CHAPITRE IX. — Étude des expressions dont la forme est indéterminée et théorie des points singuliers 472
— Fractions qui se présentent sous la forme $\frac{0}{0}$ 472
— Fractions qui se présentent sous la forme $\frac{\infty}{\infty}$ 474

Pages.

— Autres formes indéterminées ... 476
— Quelques exemples ... 476
— Théorie des points singuliers. — Définitions ... 481
— Caractère analytique des points singuliers ... 482
— Points singuliers des surfaces ... 489
— Exercices ... 493

CHAPITRE X. — Théorie des maxima et minima ... 495
— Maxima et minima des fonctions d'une seule variable ... 495
— Solution géométrique de quelques problèmes ... 502
— Maxima et minima des fonctions de deux variables ... 503
— Fonctions d'un plus grand nombre de variables ... 505
— Maxima et minima des fonctions implicites ... 507
— Recherche de l'expression, de forme donnée, qui, entre certaines limites, s'écarte le moins possible d'une fonction donnée ... 512
— Exercices ... 521

LIVRE TROISIÈME.

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES.

CHAPITRE PREMIER. — Courbure des lignes planes ... 523
— Sens de la courbure ... 523
— Définition de la courbure et du rayon de courbure ... 524
— Expression du rayon de courbure ... 525
— Le cercle de courbure traverse la courbe ... 526
— Diverses expressions du rayon de courbure ... 526
— Application à quelques exemples ... 532
— Détermination géométrique de quelques rayons de courbure ... 534
— Courbure des lignes orthogonales ... 538
— Expression approchée de quelques grandeurs infiniment petites ... 552
— Différence des tangentes menées aux extrémités d'un arc et terminées à leur point de rencontre ... 555
— Théorie des développées ... 558
— Quelques exemples de développées ... 562
— Contacts de différents ordres. — Définition de l'ordre du contact ... 567
— Courbes osculatrices ... 571
— Cercle osculateur ... 571
— Exercices ... 573

CHAPITRE II. — Courbure des lignes tracées sur une sphère ... 575
— Définition de la courbure géodésique ... 575
— Courbure d'un petit cercle ... 575
— Cercle de courbure ... 576
— Pôle du cercle de courbure ... 576
— Diverses expressions de la courbure géodésique d'une ligne sphérique ... 577
— Théorie des développées sphériques ... 584

Pages.

— Courbure des trajectoires orthogonales sur la sphère 586
— Exercices 596

CHAPITRE III. — Plan osculateur d'une courbe a double courbure 597
— Définition du plan osculateur 597
— Surface enveloppe des plans osculateurs 602
— Équation du plan osculateur 607

CHAPITRE IV. — Les deux courbures d'une courbe, le cercle osculateur et la sphère osculatrice 611
— Définition de la courbure 611
— Définition de la seconde courbure 612
— Rapport des deux courbures 612
— Cercle de courbure 613
— Cercle osculateur 613
— Calcul du rayon de courbure 614
— Normale principale 618
— Expression de la seconde courbure 619
— Formules de M. Serret 622
— Axe du plan osculateur 625
— Surface lieu des normales principales 626
— Sphère osculatrice 630
— Détermination de la sphère osculatrice 632
— Détermination de quelques grandeurs infiniment petites 636
— Définition de la développée 639
— Longueur d'un arc de développée 639
— Surface lieu des développées 642
— Équation des développées 647
— Exercices 649

CHAPITRE V. — Théorie de la courbure des surfaces 650
— Courbure des sections normales 650
— Courbure d'une section oblique 654
— Courbure d'une ligne à double courbure 656
— Ligne minima sur une surface quelconque 657
— Formules plus générales relatives à des axes de coordonnées quelconques 657
— Démonstration géométrique des théorèmes précédents. — Indicatrice 665
— Loi de la courbure des sections normales 667
— Courbure d'une section oblique 669
— Tangentes conjuguées 670
— Exercices 671

CHAPITRE VI. — Étude des normales a une même surface 672
— Il n'existe pas, en général, de surface normale aux droites d'un faisceau 672
— Condition nécessaire pour que la surface existe 673
— Exercices 691

CHAPITRE VII. — Théorie des lignes de courbure 692
— Définition des lignes de courbure 692
— Équation différentielle des lignes de courbure 693
— Surface tangente aux normales d'une surface donnée 702

Pages.

— Ligne de courbure commune à deux surfaces..... 704
— Surfaces orthogonales..... 706
— Détermination des lignes de courbure dans quelques cas simples..... 711

CHAPITRE VIII. — ÉTUDE DES LIGNES TRACÉES SUR UNE SURFACE..... 731
— Lignes géodésiques..... 731
— Courbure géodésique..... 736
— Courbure totale d'une portion de surface..... 741
— Mesure de la courbure..... 742
— Théorie du développement des surfaces..... 743
— Condition pour que deux surfaces soient applicables l'une sur l'autre..... 751
— Courbure des trajectoires orthogonales sur une surface quelconque..... 759

TABLE ANALYTIQUE..... 765

PRÉFACE.

La découverte du Calcul infinitésimal a été pour la science mathématique le plus grand progrès qu'elle ait jamais fait et l'occasion des applications les plus variées et les plus inattendues. Les contemporains de Leibnitz et de Newton puisèrent dans leur exemple et dans l'étude de leurs méthodes la hardiesse d'aborder un grand nombre de questions qu'ils auraient naguère considérées comme insolubles, et le moyen de les résoudre facilement. Les premiers succès furent tels, que l'on put supposer toutes les difficultés de la science surmontées à l'avance et croire que les géomètres, sans être distraits plus longtemps par l'élaboration des mathématiques pures, pourraient à l'avenir se conformer au vœu de Leibnitz et tourner exclusivement leurs méditations vers l'étude des lois naturelles. Mais cette illusion ne fut pas de longue durée; avec des méthodes plus puissantes on aborda des problèmes plus difficiles, qui, malgré la fécondité des nouveaux principes, demandaient des efforts d'invention sans cesse renouvelés. Le champ des découvertes à faire, contemplé d'une plus grande hauteur, n'en parut que plus vaste, et les régions nouvelles que l'on put entrevoir, s'étendirent, comme il arrive toujours, limitées seulement par le génie de ceux qui tentèrent de les explorer.

Les problèmes auxquels le Calcul différentiel doit son origine étaient loin cependant d'être nouveaux. Les grandes découvertes surgissent rarement, on le sait, sans avoir été préparées. L'idée la plus neuve naît souvent d'une idée plus ancienne dont l'auteur lui-même n'a pas aperçu les conséquences, très-apparentes pourtant quand on les connaît à l'avance. Les principes du Calcul différentiel n'échappent pas à cette loi : ils sont en effet tellement simples, qu'ils semblent s'établir d'eux-mêmes et qu'on a besoin de les voir si

féconds pour admirer le génie de ceux qui les ont énoncés les premiers en en démontrant l'importance. Bien des auteurs plus anciens avaient employé, dans des cas particuliers, la méthode même à la découverte de laquelle devait s'attacher tant de gloire; ils se partagent l'honneur d'avoir posé les bases de l'édifice et contribué à l'accomplissement de ce grand ouvrage. Mais ce n'est pas notre intention de parcourir ici l'histoire des mathématiques pour y suivre cette trace que Leibnitz lui-même fait remonter jusqu'à Archimède (*). Contentons-nous de dire, en ce moment, que la recherche des tangentes et celle des maxima et minima avaient souvent occupé les géomètres, et que l'on connaissait depuis longtemps le lien qui les unit, lorsque Leibnitz publia en 1684, dans les *Acta Eruditorum* de Leipzig, une Note de six pages intitulée : *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quæ nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus*. Voilà certes un titre bien modeste; on pourrait croire, en le lisant, que, la nouvelle méthode dispensant de chasser les dénominateurs et les radicaux, l'abréviation qui en résulte est son principal avantage : quoique les dernières lignes de l'article promettent des conséquences d'un ordre plus élevé, Leibnitz, en effet, ne semble pas savoir qu'il vient de révéler une des théories les plus déliées et les plus fécondes auxquelles l'esprit humain puisse atteindre.

Cette première Note expose, en leur imprimant le caractère de règles générales, des méthodes qui, appliquées à un cas simple, auraient différé fort peu de ce qu'on connaissait. Fermat dans la *Théorie des maxima et minima*, Barrow dans ses *Lectiones geometricæ*, Sluze enfin dans les *Transactions philosophiques*, avaient employé des principes analogues, et, sans pressentir la suite admirable de leurs conséquences, les esprits pénétrants en avaient déjà compris l'importance. Pascal, écrivant en effet à Sluze en 1658, lui parlait des *merveilles de la nouvelle analyse*, et il semblait annoncer les théories nouvelles lorsqu'il disait : « Il y a des propriétés communes à toutes ces » choses dont la connaissance ouvre l'esprit aux plus grandes merveilles de » la nature : la principale comprend les deux infinités qui se rencontrent » dans tout, l'une de grandeur, l'autre de petitesse. »

(*) *Quod calculum differentialem attinet, fateor multa ei esse communia cum iis quæ et tibi et Fermatio aliisque, imo jam ipsi Archimedi erant explorata.* (Lettre de Leibnitz à Wallis, 29 décembre 1698.)

Il est donc tout naturel que l'effet si profond de la publication de Leibnitz n'ait pas été immédiat, et l'on ne s'étonnera pas que l'un des plus grands esprits de cette époque et de tous les temps, Huyghens, lui écrivît en 1690, c'est-à-dire six ans après la publication de la Note des *Acta* : « J'ai eu de temps en temps quelque chose de votre nouveau calcul algébraïque dans les *Actes* de Leipzig; mais, y trouvant de l'obscurité, je ne l'ai pas assez étudié pour l'entendre, comme aussi que je crois avoir quelque méthode équivalente, tant pour trouver les tangentes des lignes courbes où les règles ordinaires ne servent pas, ou très-difficilement, que pour plusieurs autres recherches. »

Deux mois après, il écrivait de nouveau : « J'ai tâché depuis ma dernière lettre d'entendre votre *Calculus differentialis*, et j'ai tant fait, que j'entends, mais seulement depuis deux jours, les exemples que vous en avez donnés..., et j'ai même reconnu le fondement de ce calcul et de toute votre méthode, que j'estime très-bonne et très-utile. Cependant je crois avoir quelque chose d'équivalent, comme je vous l'ai écrit dernièrement. »

C'est seulement trois ans après, le 17 septembre 1693, qu'il lui écrit enfin : « Vous connaîtrez, monsieur, que j'ai fait quelque progrès dans votre excellent calcul différentiel, dont je goûte de plus en plus l'utilité. »

Trois ans après la première publication de Leibnitz, et lorsque la plupart des géomètres, peu familiers avec la nouvelle doctrine, étaient encore incapables d'en apprécier la portée et d'en pénétrer la profondeur, Newton publia l'immortel ouvrage qui, aujourd'hui encore, en contient les plus belles applications. Il y emploie constamment la méthode des fluxions, qui, sous une forme différente, repose sur la même idée que celle des différentielles.

Newton, dans sa théorie, assimile les grandeurs variables à des points en mouvement, dont la vitesse, ou fluxion, lui sert à étudier la loi des variations simultanées qu'il considère.

De même que nous avons dû citer Fermat pour avoir fait usage avant Leibnitz d'une conception analogue à celle des différentielles, il est juste de signaler ici l'analogie de la doctrine des fluxions avec les idées développées par Roberval dans sa *Théorie des mouvements composés*. Quoiqu'il se soit trompé dans l'énoncé des principes, les applications que fait Roberval sont exactes et nombreuses. Elles ont précédé de trente années

au moins la grande découverte qui devait les faire oublier. Newton ne cite pas Roberval, dont il ne connaissait pas sans doute le travail, mais il reconnaît expressément l'identité de sa doctrine avec celle des différentielles, et sans signaler la publication antérieure de Leibnitz, il ne conteste pas l'indépendance de son invention. Il est difficile d'en convenir plus clairement qu'il ne le fait dans le passage suivant :

« Dans les lettres que j'ai échangées il y a une dizaine d'années avec l'habile géomètre Leibnitz, lui ayant annoncé que je possédais une méthode pour déterminer les maxima et les minima, conduire les tangentes et résoudre les questions semblables, et que cette méthode réussissait aussi bien pour les expressions irrationnelles que pour les autres; comme je la lui cachais sous des lettres transposées représentant la phrase suivante : une équation étant donnée qui contient des fluentes, trouver les fluxions et réciproquement, il me répondit qu'il avait également trouvé une méthode analogue qu'il me communiqua, et qui ne différait de la mienne que par les mots et la notation. »

Rien n'est plus décisif que ces lignes écrites par Newton au moment même où il publiait pour la première fois sa doctrine. Les faits qu'il énonce n'ont d'ailleurs jamais été contestés. Antérieurement à sa première publication, Leibnitz avait échangé d'amicales communications avec l'auteur du livre des *Principes* et reçu la confidence de quelques-uns de ses résultats, sans que toutefois on voulût lui révéler la méthode qui y avait conduit.

Les deux lettres auxquelles le passage cité fait allusion nous ont d'ailleurs été conservées. L'une d'elles est antérieure de douze années à la publication de Leibnitz, mais toutes deux ne lui furent communiquées qu'en 1676, c'est-à-dire huit ans encore avant l'article des *Acta Eruditorum*. Ces lettres sont consacrées presque exclusivement à l'exposition de découvertes relatives aux séries et contiennent l'énoncé seulement du problème résolu par la méthode des fluxions, qui est cachée sous un chiffre dont Leibnitz, malgré sa pénétration, ne pouvait tirer aucune lumière.

Nous avons également la réponse de Leibnitz, écrite dix mois plus tard, le 21 juin 1677 ; on y voit qu'en l'écrivant il était en possession de la théorie des différentielles. Supérieur au désir de grandir par une forme mystérieuse l'importance de ses résultats et étranger à la crainte de voir ses

découvertes faciliter celles d'un rival, il communique clairement toutes ses idées et l'énoncé des problèmes dont il désire encore la solution. Son seul tort fut de publier sept ans plus tard la solution des mêmes problèmes, sans déclarer que Newton savait aussi les résoudre et le lui avait annoncé le premier.

Il est difficile en effet de ne pas rapprocher le titre de la Note de Leibnitz du passage suivant de la lettre de Newton :

« Bien plus, il ne s'arrête pas seulement aux équations renfermant une ou deux quantités indéfinies affectées de radicaux, mais sans réduction aucune de telles équations (ce qui exigerait le plus souvent un travail immense), la tangente est immédiatement déterminée. La chose se passe de même dans les maxima et minima. »

Ce passage rend les droits de Newton incontestables et ferait pencher la balance de son côté, s'il fallait absolument se prononcer entre les deux rivaux. D'autre part, c'est un principe établi que, dans les questions de priorité, l'antériorité de la publication constitue un droit absolu : et ce sentiment, dont Pascal s'est fait l'énergique interprète, déciderait au contraire en faveur de Leibnitz.

« Dès qu'on a vu, dit-il, une invention publiée, on ne peut persuader les autres qu'on l'aurait trouvée sans ce secours, ni s'en assurer soi-même, parce que cette connaissance change les lumières et la disposition de l'esprit qui ne sont plus les mêmes qu'auparavant; et quand on aurait pris de nouvelles voies, ce n'en serait pas une marque, parce que l'on sait qu'il est aussi facile de réduire à d'autres méthodes ce qui a été une fois découvert, qu'il est difficile de le découvrir la première fois; qu'ainsi tout l'honneur consiste dans la première production, que toutes les autres sont suspectes; et que c'est pour éviter ce soupçon que les personnes qui prennent les choses comme il faut, suppriment leurs propres inventions, quand ils sont avertis qu'un autre les avait auparavant produites, quelques preuves qu'il y ait qu'ils n'en avaient point eu de connaissance, aimant bien mieux se priver de ce petit avantage que de s'exposer à un reproche si fâcheux. »

Mais ces lignes si claires et si vraies ne peuvent s'appliquer ni à Leibnitz, ni à Newton. Pascal ne prévoit pas le cas où l'auteur d'une découverte en aurait lui-même informé à l'avance, en cachant le secret de sa méthode,

celui qui doit la publier le premier. Or la lettre de Newton, communiquée à Leibnitz, réservait évidemment tous ses droits, et Pascal lui-même ne lui eût pas conseillé de *supprimer son invention*. Si l'on peut deviner par analogie l'opinion de Pascal, on doit croire même que c'est à Leibnitz qu'il eût donné ce conseil. C'est en effet avec plus que de la dureté qu'il attaqua Torricelli pour avoir publié le premier la quadrature de la cycloïde trouvée antérieurement, mais non publiée, par Roberval, et que, sans preuve positive, il se hâta de crier au plagiat. La question offre de grandes analogies avec celle qui nous occupe; on l'a moins étudiée, parce que l'objet de débat est moins important, mais les principes à invoquer sont les mêmes, et nous ne pouvons mieux faire que de citer l'opinion de l'Anglais Wallis, qui, défendant Torricelli contre l'attaque passionnée de Pascal, vient précisément justifier à l'avance la conduite de Leibnitz.

« Nous devons certainement plus à Torricelli qui a rendu publiques des découvertes déjà faites, qu'à Roberval qui a supprimé les siennes; et nous demandons si, parce que Roberval ne voulait pas publier ses découvertes, il fallait que Torricelli ne publiât pas les siennes? »

Pascal dans une autre circonstance la justifie lui-même par son propre exemple. Roberval avait résolu un problème difficile relatif à certaines portions des surfaces cylindriques, mais sans vouloir en rien publier, afin, disait-il, de réserver sa découverte pour s'en servir en cas de nécessité. « Dès qu'il sut, dit Pascal, que je l'avais résolu, il déclara qu'il n'y prétendait plus et qu'il n'en ferait jamais rien paraître, par cette raison que, n'en ayant jamais produit la solution, il devait le quitter à celui qui l'avait produite le premier. Je voudrais bien, ajoute Pascal, que tout le monde en usât de la sorte. » Quoi qu'il en soit, et quelque opinion que l'on adopte, il faut rendre cette justice à Newton que, dans ces premières publications, il fut irréprochable. Mentionner les droits de Leibnitz au partage de la découverte était tout ce qu'il devait faire, et c'est ce qu'il fit sans commentaires ni insinuations. On peut remarquer qu'il ne parle pas de l'article des *Actes de Leipzig*, mais peut-être ne le connaissait-il pas.

Leibnitz, de son côté, accepta avec la sincérité la plus franche l'exactitude des assertions de son rival sur le droit très-antérieur de sa découverte; il paraît même avoir été bien peu empressé de faire la comparaison des deux

doctrines, car c'est en 1694 seulement, c'est-à-dire dix ans après la Note des *Acta Eruditorum*, et sept ans après la publication du livre des *Principes*, qu'il écrit à Huyghens :

« Je ne sais quand je verrai l'ouvrage que M. Wallis vient de publier. Voudriez-vous me faire la grâce d'en faire copier les endroits où M. Newton donne des nouvelles découvertes. Je ne demande pas proprement sa manière de trouver des séries, mais s'il donne des moyens pour la converse des tangentes ou pour quelque chose de semblable, car en m'écrivant autrefois il couvrit sa manière sous des lettres transposées. »

Et quelques semaines plus tard :

« Je commence par vous remercier de la communication de l'ouvrage de M. Wallis touchant M. Newton. Je vois que son calcul s'accorde avec le mien, mais je pense que la considération des différences et des sommes est plus propre à éclairer l'esprit. Il me semble que M. Wallis parle assez froidement de M. Newton, et comme s'il était aisé de tirer ces méthodes des leçons de M. Barrow. Quand les choses sont faites, il est aisé de dire : *Et nos hoc poteramus....* »

Le même mois, il écrivait au *Journal des Savants :* « Il faut rendre cette justice à M. Newton (à qui l'astronomie, la géométrie et l'optique ont de grandes obligations) qu'encore en ceci il a eu quelque chose de semblable de son chef, suivant qu'on en a su depuis. »

Le récit qui précède fait connaître vraisemblablement toute la vérité. Rien ne pouvait faire prévoir qu'il y eût là matière à un long procès qui, après plus d'un siècle, serait encore débattu avec passion. La question de priorité ne fut en effet soulevée que fort tard ; c'est que sans doute la forme si modeste sous laquelle Leibnitz présenta sa découverte donne la mesure de l'importance qu'il y attacha d'abord. La grandeur de leur œuvre s'accrut peu à peu aux yeux des inventeurs comme à ceux de leurs disciples, et lorsque la méthode infinitésimale eut changé la face de la science, ils examinèrent leurs droits de plus près, les revendiquèrent strictement, et en vinrent bientôt à une guerre ouverte. Mais sans prendre parti dans cette querelle, qui n'est pas encore pacifiée, bornons-nous à raconter quelques faits trop célèbres pour qu'il soit possible de les passer sous silence. Les minutieuses enquêtes auxquelles on s'est livré à plusieurs reprises ont d'ailleurs ramené

la question à son point de départ; la postérité, également respectueuse pour la mémoire des deux illustres inventeurs, a accordé à chacun d'eux la part de gloire qui lui revenait au début, de l'aveu même de son rival, et les géomètres, tout en estimant les deux théories comme équivalentes, les étudient l'une et l'autre dans leur source, en profitant de la diversité des points de vue qui en facilite l'intelligence et en éclaire la philosophie.

Voici quelle fut l'occasion du débat célèbre auquel des amis trop ardents ont donné le caractère et l'importance d'un véritable procès.

Jean Bernoulli, initié par son frère Jacques aux méthodes infinitésimales, en proposant aux géomètres le problème célèbre de la brachistochrone, avait annoncé, suivant un usage alors très-répandu, qu'il leur donnait six mois pour produire leurs solutions, s'engageant lui-même à tenir la sienne secrète pendant ce temps. Leibnitz seul répondit à l'appel de Bernoulli; mais, en lui communiquant sa méthode, il le priait, dans l'intérêt de la science, de proroger le délai, pour permettre à d'autres géomètres de montrer leur pénétration; il ajoutait que la difficulté de la question lui semblait telle, qu'il croyait pouvoir désigner à l'avance les quatre ou cinq géomètres capables alors de la surmonter s'ils consentaient à l'entreprendre. Fatio de Duillier, membre de la Société Royale de Londres, qui, comme le témoignent plusieurs de ses travaux, avait fait de grands progrès dans la connaissance des nouvelles méthodes, fut, à ce qu'il semble, profondément blessé de ne pas être compté parmi les hommes habiles dont Leibnitz avait donné les noms. Il s'en plaignit amèrement dans un écrit publié en 1699 sous le titre de *Lineæ brevissimi descensus investigatio geometrica duplex,* et dans lequel il blâme en même temps l'habitude de Leibnitz de toujours s'adresser au public. Il déclare en outre que lui-même, en 1687, a trouvé, par ses propres méditations, les principes et les règles principales du calcul des fluxions inventé par Newton, et dont Leibnitz n'est pas même, dit-il, le second inventeur, comme le savent ceux qui connaissent la correspondance de Newton et quelques pièces manuscrites qu'il ne désigne pas.

Quoique le caractère de Duillier semble avoir été présomptueux et vain, et que l'irritation de son amour-propre l'ait seule inspiré dans la discussion qui a entouré son nom d'une regrettable célébrité, il est juste de reconnaître qu'il était homme d'un vrai mérite. Huyghens et Leibnitz, qui ont eu avec

lui de longues relations, montrent dans leur correspondance une grande estime pour ses talents (*); c'est donc à tort qu'on en a fait un de ces ignorants pleins d'envie, capables au plus de suivre les autres, et ne trouvant rien par eux-mêmes, on est allé surtout beaucoup trop loin en le représentant comme une âme basse et méchante et s'efforçant de déshonorer sa mémoire (**).

Leibnitz, pour toute réponse, opposa les témoignages d'estime qu'il avait, à toute occasion, reçus de Newton; il se plaît lui-même à exprimer son admiration pour l'auteur du livre des *Principes*, et conteste à Fatio le droit de le représenter dans une discussion qui semble sans fondement.

La controverse n'alla pas plus loin, et les adversaires posèrent les armes, dit le Dr Brewster, tout prêts à les reprendre à la première occasion.

En 1704, Newton, publiant, à la suite de son *Optique*, le *Traité de la quadrature des courbes*, déclara dans l'Introduction, et sans cette fois parler de Leibnitz, que la méthode des fluxions s'était présentée à son esprit pendant les années 1665 et 1666. Les *Acta Eruditorum* donnèrent en janvier 1705 un compte rendu de cet ouvrage, dans lequel on lit le passage suivant:

« L'ingénieux auteur, avant d'arriver aux quadratures des courbes ou plutôt des figures curvilignes, place une courte introduction pour l'entente de laquelle il est nécessaire de savoir que, quand une grandeur (une ligne par exemple) croît d'une manière continue par la fluxion du point qui la décrit, on appelle différences ces accroissements momentanés, c'est-à-dire la différence entre la grandeur avant et la grandeur après chacun de ces changements; c'est de là qu'est né le calcul différentiel et le calcul sommatoire qui en est la réciproque, dont les éléments ont été publiés dans notre recueil par Leibnitz, qui en est l'inventeur, et dont les divers usages ont été expliqués par les frères Bernoulli et par le marquis de l'Hospital. Ce sont les différentielles de M. Leibnitz que Newton remplace et a toujours remplacées

(*) « Je sais bien que ces quadratures des courbes et le problème renversé des tangentes en bien des occasions peuvent être de fort grande utilité; mais voyant le progrès que MM. Leibnitz, Fatio et Newton y avaient fait devant que j'y eusse songé, j'ai taché plustôt de profiter de leur travail que de me mettre à chercher après eux, surtout depuis que M. Fatio m'a fait espérer la publication d'un traité de M. Newton sur ce sujet, qui, à son avis, en sait bien plus que luy et M. Leibnitz ensemble. »

(*Lettre de Huyghens à l'Hospital*, 22 octobre 1692.)

(**) Sans refaire ici sa biographie, contentons-nous de dire que Fatio de Duillier professait des opinions religieuses fort exaltées; il se crut le don des miracles et promit de ressusciter publiquement un mort. Il n'y réussit pas, et ses ennemis le firent condamner à une peine infamante.

par des fluxions qui sont très-approximativement comme les accroissements des fluentes engendrées dans des particules égales de temps, fluxions dont il a fait un élégant usage tant dans son ouvrage sur les principes mathématiques de la nature que dans ses autres écrits, de même que H. Fabre, dans sa *Synopsis mathematica*, a substitué la considération des mouvements à la méthode de Cavalleri. »

Ces lignes, publiées sans signature, ont été vraisemblablement écrites par Leibnitz. Il faut avouer qu'il semble s'y attribuer l'invention des différentielles et présenter Newton comme les ayant empruntées et transformées; mais on doit reconnaître aussi que, si telle est sa pensée, il se borne à la laisser entrevoir.

Le Dr Keil, ami de Newton, vit cependant dans ce passage une accusation perfidement dissimulée, et, pour y répondre, il écrivit, dans une lettre sur les lois de la force centripète, adressée à Halley, et publiée dans les *Transactions philosophiques* de Londres pour 1708 :

« Tout cela est une conséquence de la célèbre arithmétique des fluxions, dont on ne peut contester la découverte à Newton, comme il est facile de s'en convaincre en lisant celles de ses lettres qui ont été publiées par Wallis. Cette méthode a cependant été, sous un nom et avec une notation différente, publiée par Leibnitz dans les *Acta Eruditorum.* »

Leibnitz s'adressa alors à la Société Royale dont il était membre, contestant à un homme nouveau comme Keil le droit de prononcer aussi hardiment sur des matières dont il ne pouvait être instruit, et demandant que l'on mît fin à ces vaines et injustes clameurs, blâmées sans doute, ajoute-t-il, par Newton lui-même. Mais en cela il se trompait; car, bien que Newton ait évité de paraître personnellement dans le débat, il est prouvé aujourd'hui que Keil agissait de son aveu et n'écrivait rien sans le consulter. Quoi qu'il en soit, la Société, mise en demeure de se prononcer, nomma des Commissaires qui, moins d'un an après, publièrent un Rapport fort court, précédé d'un volume plusieurs fois réimprimé depuis, sous le titre de : *Commercium Epistolicum* (*) *J. Collins et aliorum de varia re mathematica inter celeberrimos præsentis seculi mathematicos, una cum recensione præmissa insi-*

(*) Ce titre de la 2e édition a été rédigé par Newton, qui a essayé, comme le prouve l'examen de ses papiers, jusqu'à douze rédactions différentes.

gnis controversiæ inter Leibnitium et Keilium de primo inventore Methodi Fluxionum; et judicio primarii, ut ferebatur, mathematici subjuncto, iterum impressum.

Ce recueil précieux pour l'histoire de la science contient un grand nombre de communications mathématiques échangées par les géomètres anglais, soit entre eux, soit avec Leibnitz; mais la plupart de ces pièces sont étrangères au débat et de nature à embrouiller la question plutôt qu'à l'éclaircir.

Après avoir rappelé l'histoire d'une découverte annoncée par Leibnitz, et qui avait donné lieu à une réclamation de priorité reconnue fondée, les Commissaires décident sur les droits à la découverte du calcul différentiel avec une autorité qui ne convient ni à des hommes personnellement aussi obscurs, ni aux amis de son rival, travaillant, sans l'avouer, sous les yeux de Newton qui les aidait, cela a été prouvé depuis, de son active collaboration. Leur œuvre, qui montre plus de passion que de zèle pour la vérité, suffirait seule pour tenir en garde contre les assertions injurieuses à Leibnitz qui y sont inscrites. Dans un ouvrage dont le caractère devait être la plus impartiale sincérité, ils ont substitué le rôle d'accusateurs et d'avocats à celui de juges, ne craignant pas de donner leurs préventions ou leurs conjectures pour des vérités constantes; il serait donc imprudent de leur accorder une confiance absolue, et les matériaux qu'ils nous ont transmis doivent être soumis à une sévère critique.

Il est bon cependant de reproduire le texte de leur Rapport, car il fixe nettement le point de la question et le nœud de la dispute.

« Nous avons lu les lettres et copies de lettres conservées, tant dans les archives de la Société Royale que dans la collection de Jean Collins, et dont les dates sont renfermées entre les années 1669 et 1677. Nous nous sommes assurés de l'authenticité de celles qui portent les noms de Barrow, Collins, Oldenbourg et Leibnitz, par le témoignage de personnes familiarisées avec leur écriture. Pour les lettres qui portaient le nom de Grégory, nous nous en sommes rapportés à Collins lui-même, qui avait copié une partie de ces lettres de sa propre main. Nous avons extrait de ces lettres tout ce qui se rapportait au sujet qui nous occupe, et ces extraits qui vous sont livrés en même temps que ces lettres; nous avons constaté qu'ils étaient faits avec soin.

» De ces lettres et chartes résulte ce qui suit :

» I. Leibnitz, au commencement de l'année 1673, était à Londres; il partit vers le mois de mars pour aller à Paris, d'où, sur la demande d'Oldenbourg, il entretint avec Collins un commerce de lettres qui dura jusqu'en 1676. Depuis, il revint par Londres et Amsterdam à Hanovre. Or on sait que Collins a toujours communiqué très-volontiers aux mathématiciens ce qu'il tenait de Newton et de Grégory.

» II. Leibnitz, à son premier voyage de Londres, se déclara l'inventeur d'une certaine méthode dite proprement différentielle, et bien que Pell lui eût appris que Newton s'en était déjà servi, il n'en continua pas moins à s'attribuer tous les droits d'inventeur, tant parce qu'il l'avait trouvée, disait-il, sans aucun secours étranger, n'ayant pas eu connaissance des publications de Newton, que parce qu'il y avait beaucoup ajouté. Or nous ne trouvons nulle mention d'une méthode différentielle autre que celle de Newton, avant la lettre de Leibnitz du 11 juin 1677, une année pleine après que la lettre de Newton, du 10 décembre 1672, eut été envoyée à Paris pour être communiquée à Leibnitz, et quatre ans après que Collins eut commencé à communiquer cette même lettre à ses amis. Dans cette lettre, la méthode des fluxions est suffisamment décrite pour toute personne au courant de ces matières.

» III. De la lettre de Newton du 13 juin 1676, résulte évidemment qu'il connaissait déjà, à cette date, la méthode des fluxions depuis cinq ans. Il résulte également de son analyse par les équations qui ont un nombre infini de termes, analyse communiquée à Barrow et à Collins en 1669, qu'il avait, même avant ce temps, songé à cette même méthode.

» IV. La méthode différentielle est la même exactement que la méthode des fluxions, au nom et à la notation près.... Nous croyons que ceux qui ont attribué l'invention à Leibnitz, ne connaissaient pas ou connaissaient mal les rapports qui avaient existé entre Collins et lui, et ignoraient que Newton se fût servi de la même méthode quinze ans avant que Leibnitz eût commencé à la publier dans les *Acta Eruditorum*.

» Cela posé, nous pensons que Newton est le premier inventeur de cette méthode, et que Keil, par conséquent, en la lui attribuant, n'a aucunement fait tort ou injustice à Leibnitz. »

D'après ce jugement, les prétentions de Leibnitz n'auraient aucun fondement. Il se plaignit en vain : « Mais je ne sais, écrivit-il à Chamberlayne, par quelle chicane et quelle supercherie quelques-uns firent en sorte qu'on prît la chose comme si je plaidois devant la Société, et me soumettois à sa juridiction, à quoi je n'avois jamais pensé; et selon la justice, on devoit me faire savoir que la Société vouloit examiner le fond de l'affaire, et l'on devoit me donner lieu de déclarer si j'y voulois proposer mes raisons, et si je ne tenois aucun des Juges pour suspect. Ainsi, on n'y a prononcé qu'*una parte audita*, d'une manière dont la nullité est visible. Aussi ne crois-je pas que le Jugement qu'on a porté puisse être pris pour un arrêt de la Société.

» Cependant M. Newton l'a fait publier dans le monde par un Livre imprimé exprès pour me décréditer, et envoyé en Allemagne, en France, et en Italie, comme au nom de la Société. Ce Jugement prétendu, et cet affront fait sans sujet à un des plus anciens membres de la Société même, et qui ne lui a point fait déshonneur, ne trouvera guères d'approbateurs dans le monde; et dans la Société même, j'espère que tous les membres n'en conviendroient pas. Des habiles François, Italiens, et autres désapprouvent hautement ce procédé, et s'en étonnent : et on a là-dessus des lettres en main; les preuves produites contre moi leur paroissent bien minces.

» Pour moi, j'en avois toujours usé le plus honnêtement du monde envers M. Newton; et quoiqu'il se trouve maintenant qu'il y a grand lieu de douter s'il a su mon invention avant de l'avoir euë de moi, j'avois parlé comme si de son chef il avoit eu quelque chose de semblable à ma méthode. Mais abusé par quelques flatteurs mal avisez, il s'est laissé porter à m'attaquer d'une manière très-sensible. Jugez maintenant, Monsieur, de quel côté doit venir principalement ce qui est nécessaire pour faire cesser cette contestation. »

Cependant, dès que la Commission eut parlé, les géomètres anglais adoptèrent ses conclusions et les regardèrent comme solidement établies. C'est ce que Taylor accepte dans l'ouvrage intitulé *Methodus Incrementorum*, où le nom de Leibnitz n'est pas même prononcé; c'est ce que Maclaurin confirme dans le *Treatise of Fluxions*, publié en 1735; c'est enfin ce que Buffon répète avec plus de force encore dans la préface mise en tête de la traduction d'un ouvrage de Newton. Leibnitz, si l'on acceptait son récit, aurait joint à une mauvaise foi inexcusable une maladresse presque ridicule.

« Leibnitz, dit-il, était en possession, et en possession non contestée, de tout ce que la géométrie avait produit de plus brillant depuis vingt siècles; mais cet éclat de gloire n'a pas duré, des partisans trop zélés et des disciples éblouis, en voulant élever leur maître, ont été cause de l'abaissement de sa réputation. »

La plupart des géomètres du continent persistèrent cependant dans le sentiment opposé; beaucoup d'entre eux, et des plus illustres, reconnurent les droits de Leibnitz, en accusant les Anglais d'injustice et de légèreté.

Examinons en effet la décision des Commissaires; elle peut se résumer en deux propositions :

1° Le calcul des fluxions ne diffère pas du calcul différentiel.

2° Cette doctrine unique, créée par Newton, a été communiquée clairement à Leibnitz, avant qu'il la publiât comme sienne.

La première de ces assertions n'est pas contestable: la déclaration formelle de chacun des deux rivaux nous dispense d'insister sur ce point, qui est constant entre les parties.

Quant à l'accusation de plagiat portée contre Leibnitz, la postérité ne l'a pas ratifiée. Elle repose, comme on l'a vu, sur la communication faite à Leibnitz par Oldenbourg d'une lettre écrite par Newton, le 10 décembre 1672, et dans laquelle, disent les Commissaires, la méthode des fluxions est suffisamment décrite pour toute personne intelligente. Or ce point essentiel de l'accusation disparaît entièrement, car l'examen des papiers de Leibnitz, conservés à Hanovre, a prouvé fort récemment que cette lettre n'a pas été envoyée en entier, et que dans l'extrait que Leibnitz en a reçu en 1676, le passage suivant se rapporte seul à la méthode des fluxions.

« Après la mort de Grégory, Collins rassembla la vaste correspondance qu'ils avaient entretenue, et dans laquelle se trouve l'histoire de la méthode des séries. Newton lui promit alors d'y joindre sa propre méthode pour qu'elle fût publiée à la première occasion. Il ne sera pas hors de propos d'ajouter que Newton, en nous communiquant, le 10 décembre 1672, sa méthode des tangentes aux courbes géométriques définies par une équation entre l'ordonnée et l'abscisse, ajoutait qu'elle était un cas particulier, ou plutôt un corollaire de la méthode générale qui s'étend, sans calculs compliqués, non-seulement à la détermination des tangentes à toutes les courbes

géométriques, mécaniques ou dépendant suivant quelque loi que ce soit des lignes droites ou courbes, et aussi à la solution des problèmes plus difficiles relatifs aux aires, aux longueurs, à la courbure des lignes, aux centres de gravité, etc.; et, ajoute-t-il, elle n'est pas bornée, comme celle de Hudde pour les maxima et minima, et celle de Sluze pour les tangentes, aux équations débarrassées de termes irrationnels. Newton a mêlé, dit-il, cette méthode à celle qui se fonde sur le développement des équations en séries infinies, et il se souvient qu'au moment où le Dr Barrow publia son ouvrage, il lui fit savoir qu'il possédait une telle méthode. »

Il n'y a pas là, on le voit, de méthode exposée ou indiquée; cette lettre, si décisive d'après les Commissaires, pose seulement la question, dont Leibnitz, d'après sa réponse imprimée dans le *Commercium Epistolicum*, connaissait déjà la solution.

Cette découverte est doublement précieuse : non-seulement elle réduit à néant l'accusation la plus grave des Commissaires, mais elle confirme en quelque sorte l'exactitude des assertions de Leibnitz lorsqu'il déclare que c'est à Vienne qu'il a su la publication du *Commercium*, et qu'en y répondant il ne le connaît que par les rapports de ses amis, n'en ayant pas encore vu un exemplaire. On a jugé une telle déclaration très-invraisemblable; elle explique cependant, ce qui sans cela serait bien difficile à comprendre, comment Leibnitz, qui n'avait qu'un mot à dire pour prouver sur ce point important la légèreté de ses adversaires, a pu s'abstenir de toute réclamation.

Il n'existe donc aucune preuve contre la parfaite candeur des grands génies qui sont en cause, et l'on doit accorder à tous deux l'honneur de la découverte qu'ils déclarent tous deux avoir faite.

Chacun des deux rivaux retira cependant les concessions qu'il avait eu la loyauté de faire, et leur conduite à l'occasion du *Commercium Epistolicum* ne laisse de choix à ceux qui veulent l'expliquer qu'entre beaucoup de légèreté dans le passé, ou un peu de mauvaise foi dans le présent. Elle serait incompréhensible si l'on ne savait, comme l'a dit Pascal, que *les grands hommes, quelque élevés qu'ils soient, si sont-ils semblables aux moindres par quelque endroit.*

Leibnitz, qui tant de fois avait accordé à Newton l'honneur d'une découverte indépendante et antérieure à la sienne, n'eut pas en effet assez d'équité

et d'élévation morale pour rester juste envers celui qui, caché sous un voile transparent, cherchait à le diffamer.

Il eut un tort plus grave encore : il obtint de Jean Bernoulli un jugement sur les droits de Newton, destiné à rester secret, et qu'il publia sans l'aveu de l'auteur, en y laissant subsister une phrase qui équivalait à une signature. Un tel procédé n'est pas excusable.

Newton chercha de son côté à interpréter la déclaration, si précise pourtant, qu'il avait faite des droits de Leibnitz. Il écrit en effet en 1716 :

« Il prétend que dans mon livre des *Principes*, p. 253 et 254, je lui ai passé qu'il tenoit indépendamment de moi l'invention du Calcul différentiel; et que de m'en attribuer présentement l'invention à moi-même, c'est révoquer la concession que je lui ai faite. Mais dans le paragraphe qu'il cite, je ne trouve pas un seul mot qui le favorise. Tout au contraire, j'y représente que j'avois donné avis de ma méthode à M. Leibnitz, avant qu'il m'eût donné avis de la sienne; et je le mets dans l'obligation de prouver qu'il eût trouvé la méthode avant la date de ma lettre, c'est-à-dire huit mois pour le moins avant la date de la sienne. De plus, en renvoyant, comme je fais, aux lettres que nous nous étions écrites M. Leibnitz et moi, dix ans auparavant, j'ai laissé aux lecteurs à consulter ces lettres, qui peuvent servir à expliquer le paragraphe en question. »

Il eut enfin la maladresse de supprimer la Note en question dans l'édition de 1726, sans autre résultat que de faire mieux remarquer encore l'importance décisive du témoignage, qui, placé dans le livre des *Principes*, est assuré de ne pas périr.

Mais c'est trop insister sur ces vaines discussions, où la science n'a pas à s'accroître, et qui n'éclairent même pas la question historique. En résumé, quoique la publication de Newton ait été postérieure à celle de Leibnitz, il est prouvé qu'il ne lui doit rien, mais tout porte à croire qu'il ne l'a aidé en rien. En l'absence de preuve positive, qui oserait soupçonner Leibnitz, lui si sincère et si dévoué à la vérité, d'avoir dissimulé les secours qu'il aurait reçus d'un rival? Sa vie tout entière, tant de fois et si minutieusement étudiée, le justifie d'une telle imputation. Le système que soutiennent ses adversaires est d'ailleurs inadmissible en soi. Ils l'accusent, en effet, d'avoir volontairement dissimulé des vérités que de nombreux témoins auraient pu facile-

ment affirmer lors de la première publication. Si la prudence seule, à défaut de sentiments plus dignes de lui, n'avait pas suffi pour l'empêcher d'affronter, en la méritant, une accusation aussi grave, comment croire que les amis de Newton eussent attendu vingt-cinq ans pour le démasquer? Leurs reproches, au lieu de s'envenimer lentement par l'aigreur d'une longue et tardive discussion, auraient tout d'abord éclaté pour le confondre.

Leibnitz et Newton partagent donc la gloire d'avoir inventé le Calcul différentiel, et, quoique différemment illustres, chacun d'eux doit être tenu pour honoré de s'être rencontré avec un tel émule: Bien qu'ils soient complétement d'accord sur le fond, on retrouve dans la forme qu'ils ont adoptée l'empreinte de leurs génies si dissemblables. L'un, plus préoccupé des lois de l'univers que de celles de l'esprit humain, semble voir surtout dans les nouvelles méthodes l'instrument de ses efforts pour pénétrer la nature, et leur assignant un but plus élevé, en a mieux montré toute la portée. L'autre, qui mettait sa gloire à perfectionner l'art d'inventer, a plus nettement marqué la route, et nous suivons encore aujourd'hui les traces lumineuses qu'il y a laissées. Le premier, ne produisant ses découvertes qu'après en avoir longuement mûri la forme, a pu donner à ses travaux quelque chose de plus achevé et de plus ferme, et faire jaillir de sa pensée toutes les vérités qu'elle contient. Le second, plus habile à marquer les grands traits, se plaisait à remuer les questions les plus variées, en éveillant des idées justes et fécondes qu'il laissait à d'autres le soin de suivre et de développer. Newton se croyait rarement obligé à énoncer la règle avant d'en faire l'application; Leibnitz au contraire aimait à donner des préceptes, et se montrait plus empressé à proposer de beaux problèmes qu'à suivre les détails de leurs solutions. Si Newton, plus diligent, avait publié dix ans plus tôt sa théorie des fluxions, le nom de Leibnitz resterait un des plus grands dans l'histoire de l'esprit humain, mais, tout en le comptant parmi les géomètres du premier ordre, c'est à ses idées philosophiques et à l'universalité de ses travaux que la postérité attacherait surtout sa gloire. Si Leibnitz, au contraire, abordant plus tôt l'étude des mathématiques, avait pu ravir à son rival l'honneur de leur commune découverte, on n'admirerait pas moins dans le livre des *Principes,* avec la majesté des résultats obtenus, l'incomparable éclat des détails, et en perdant ses droits à l'invention de la méthode qui s'y trouve employée avec

tant d'art, Newton resterait placé au rang qu'il occupe aujourd'hui parmi les géomètres, je veux dire à côté d'Archimède, et au-dessus de tous les autres.

Après avoir rendu justice à chacun des deux inventeurs, et disculpé Leibnitz de l'accusation trop légèrement et trop souvent portée contre lui, nous devons avouer qu'on irait trop loin en ajoutant, avec Fontenelle, qu'en aucune autre occasion la sincérité de Leibnitz ne fut révoquée en doute; l'illustre géomètre, occupé sans cesse de plusieurs sujets à la fois, en correspondance active avec un grand nombre de savants, qui, souvent opposés les uns aux autres, s'accordaient à lui demander des conseils et des inspirations, a pu souvent manquer de mémoire et froisser l'amour-propre de quelques contemporains en éveillant ainsi quelquefois de justes susceptibilités.

Bornons-nous à citer le passage suivant d'une lettre écrite par Huyghens à l'Hospital, le 9 avril 1693.

« M. Leibnitz est assurément très-habile, mais il a avec cela une envie immodérée de paraître, comme cela se voit encore dans le 13e Journal de la même année, lorsqu'il parle de son analyse des infinis, du problème des loxodromies, que Jac Gregorius avait résolu longtemps avant lui, dans les Exercitations géométriques, des lois harmoniques des mouvements planétaires, où il a suivi l'invention de M. Newton, mais y mêlant ses pensées qui la gâtent, dans sa construction de la chaînette, qu'il veut préférer à celle de M. Bernoully, comme si ce n'était pas la même chose. Encore suis-je fort en doute pour des raisons que je pourrais alléguer, s'il n'a pas tiré sa construction de celle de M. Bernoully. Mais je vous prie de ne rien témoigner de ceci. »

En rapportant ces attaques entièrement confidentielles, et formulées d'ailleurs bien légèrement peut-être, hâtons-nous d'ajouter qu'elles n'autorisent aucunement à révoquer en doute la probité scientifique de Leibnitz; c'est cependant ce qu'on a fait trop souvent. Fontenelle lui-même, dans le discours consacré à son éloge, a cédé au désir de faire un rapprochement piquant, sans se laisser arrêter par l'idée qu'il serait difficile de n'y pas voir une insinuation blessante pour son héros.

« Si Leibnitz, dit-il, avait été plagiaire, il se serait donc démenti cette seule fois, et aurait imité le héros de Machiavel, qui est exactement vertueux jus-

qu'à ce qu'il s'agisse d'une couronne. La beauté du système des infiniment petits justifie cette comparaison. » Mais cette dernière remarque même est très-contestable : le calcul différentiel, si important par ses conséquences, n'offre pas une de ces brillantes découvertes qui éclatent tout d'abord à l'esprit, et rien ne prouve, comme nous l'avons déjà fait observer, qu'au moment de sa première publication Leibnitz en aperçut toute la portée. Son grand mérite fut de saisir dans les théories connues le point véritablement essentiel, de manière à dégager, pour l'enseigner à tous, la méthode d'invention que les plus habiles seuls pouvaient reconnaître dans les démonstrations de ses prédécesseurs. Il réduisit par là des raisonnements compliqués, aux opérations simples et délicates que les inventeurs, après les avoir aperçues comme dans un trait de lumière, avaient jusque-là rendues méconnaissables sous les correctifs qu'ils y apportaient pour en assurer la rigueur. Satisfaits de faire connaître le résultat de leurs méditations, ils ne se souciaient pas d'en marquer assez nettement la trace pour qu'un autre pût la suivre à son tour. Leibnitz, au contraire, n'hésita pas à opposer aux objections chimériques que l'on redoutait à tort, les conceptions intuitives de l'esprit, sans lesquelles on ne sait rien comme il faut. Ce sont ces clartés naturelles qui, éclairant les théories jusque-là les plus cachées, et permettant, pour ainsi dire, de les pénétrer d'une seule vue, contribuèrent plus que tout le reste au développement de leurs conséquences.

J'ai cru devoir donner quelques détails historiques sur la découverte du calcul différentiel, mais mon dessein n'est pas de faire ici l'histoire complète de ses progrès et de son développement. Il est impossible cependant de ne pas mentionner le rôle des frères Jean et Jacques Bernoulli, qui furent les disciples immédiats de Leibnitz et les confidents de toute sa pensée. Leur nom est mêlé à celui de Leibnitz à chaque page de l'histoire du nouveau calcul, et cette glorieuse ressemblance doit resserrer dans la mémoire des hommes une union que bien des nuages ont troublée pendant leur vie. Ils cultivèrent le calcul différentiel avec tant de succès, qu'il leur appartient, a écrit Leibnitz, autant qu'à lui-même. L'aîné, Jacques, employa pour la première fois le calcul infinitésimal dans la solution d'un problème de mécanique déjà résolu par Huyghens et par Leibnitz qui l'avait proposé. L'illustre auteur des nouvelles méthodes s'empressa d'encourager le jeune et

brillant adepte, dont il paraît avoir immédiatement jugé tout le mérite. Quoique la solution synthétique eût déjà été donnée; peu de géomètres auraient pu, dit-il, y appliquer le calcul différentiel, dont les principes sont *encore peu connus, et dont personne, à ma connaissance, n'a plus complétement pénétré l'esprit*.

Jean Bernoulli, frère cadet de Jacques, ne tarda pas à le suivre dans la même voie, et ne se distingua pas moins par sa pénétration à résoudre les problèmes que par la difficulté et l'intérêt de ceux qu'il proposait. Leibnitz l'accueillit avec le même empressement; il inspira souvent ces deux brillants esprits, qui plus d'une fois lui rendirent l'impulsion qu'ils avaient reçue de lui.

La correspondance de Leibnitz avec les frères Bernoulli forme deux volumes. Aucun autre ouvrage ne renferme peut-être de problèmes plus ingénieux et en plus grand nombre. Les questions qui y sont proposées et résolues montrent la puissance des nouvelles méthodes et la pénétration des illustres auteurs. Les géomètres trouveront toujours plaisir et profit à y étudier, avec les idées des inventeurs, des solutions mêmes que la science, malgré ses progrès, rendrait difficilement plus simples et plus générales. Mais ces problèmes eux-mêmes ne peuvent être mêlés qu'en petit nombre à l'exposition générale de la doctrine aux progrès de laquelle ils ont tant contribué, et l'histoire du rôle des frères Bernoulli ne deviendrait lumineuse et équitable que par l'exposition détaillée de leurs travaux.

Après Leibnitz, Newton et les frères Bernoulli, la succession des grands géomètres n'a plus été interrompue. Euler et d'Alembert, Lagrange et Laplace, Gauss et Abel, Cauchy et Jacobi, ont successivement dirigé le mouvement incessant des mathématiques, et leurs nombreux disciples, souvent devenus leurs émules, nous ont aidés, en s'inspirant d'eux, à les comprendre et à les apprécier. Mon but ne saurait être ici de faire l'histoire des progrès qui leur sont dus. L'exposition détaillée des théories actuelles ne nous conduira même que rarement à faire connaître les travaux des inventeurs. La science en effet, dans son rapide progrès à la fin du dix-septième siècle, n'a pas suivi la marche que nous devrons adopter pour en exposer les principes. Les géomètres s'occupaient surtout alors de résoudre des *problèmes*, surmontant les difficultés à mesure qu'elles se présentaient et ne s'embarrassant guère que d'arriver au but. Il en est résulté que lorsque

l'Hospital en 1694, et Euler en 1755, publièrent les ouvrages qui contiennent, ceux d'Euler surtout, avec des vues grandes et vraies, de nombreux et de si excellents exemples, l'un et l'autre exposèrent, pour la première fois, des théories générales dont il ne serait pas juste cependant de leur attribuer l'invention. Uniquement désireux de propager la science aux progrès de laquelle ils contribuaient chaque jour, ils se bornent à faire connaître les méthodes sans en discuter l'origine, et comme on ne peut supposer qu'ils réclament l'honneur d'avoir tout inventé, rien n'est plus modeste que ce silence qui semble tout placer dans le domaine de tous.

Il est donc impossible d'attacher à chaque théorie le nom incontesté d'un inventeur, et le débat célèbre que nous avons fait connaître se serait renouvelé à l'occasion de chaque progrès important de la science, si, de même qu'on a voulu trop souvent établir qu'un seul a ouvert la voie, on eût absolument tenu à décider dans quel ordre les géomètres l'y ont suivi et jusqu'où chacun s'y est tout d'abord avancé. Certaines vérités, en effet, sont acquises implicitement dès que l'attention est appelée sur le principe qui y conduit, et l'on peut dire par exemple que la Note publiée en 1684 dans les *Actes* de Leipzig ne pouvait manquer de conduire rapidement à la presque totalité des théories qui forment le premier Livre de cet ouvrage.

Le premier chapitre est consacré à l'étude géométrique des infiniment petits. On y verra, par la solution développée de quelques problèmes, comment les raisonnements doivent être présentés pour être entièrement rigoureux. Mais, les principes une fois posés, nous emploierons souvent dans la suite le langage commode sous lequel il ne faut voir que les mêmes idées plus brièvement exprimées. Ces abréviations consistent à négliger immédiatement, et sans dire pourquoi, ce qui est effectivement négligeable, et à nommer du même nom, en les traitant comme identiques, les points et les lignes dont la substitution ne peut exercer d'influence sur le résultat final. C'est ainsi que l'on dira souvent : *la tangente en un point d'une courbe passe par le point infiniment voisin; lorsqu'une droite mobile reste tangente à une courbe, on peut la considérer à chaque instant comme tournant autour du point de contact;* ces locutions, et plusieurs autres analogues, sont tellement reçues, quoique incorrectes, qu'il faut s'y accoutumer comme à des termes consacrés qui abrégent le discours. Pour plusieurs auteurs, la

méthode infinitésimale consiste à remplacer une courbe par un polygone dont les côtés sont infiniment petits. Cette substitution conduit presque toujours à des résultats exacts, et les démonstrations que l'on en déduit doivent toujours être examinées avec soin. Elles sont fort simples, mais leur clarté, plus apparente que réelle, se dissipe quand on y regarde de près.

Leibnitz et les frères Bernoulli, Euler et l'Hospital (*) employaient ce langage, et quoiqu'ils aient fait preuve d'une science très-assurée dans leurs applications géométriques de la méthode infinitésimale, on comprend, en lisant leurs ouvrages, que les géomètres habitués à la rigueur d'Euclide aient eu quelque peine à accepter leurs raisonnements, et que l'exactitude reconnue des résultats ait été nécessaire pour rassurer certains lecteurs sur la légitimité d'un langage trop peu sévère. Le célèbre mot de d'Alembert: « Allez en avant, et la foi vous viendra, » n'exprime rien autre chose. L'Académie des Sciences de Paris se refusa pendant quelque temps à admettre une doctrine qui semblait altérer la pureté géométrique; elle vit naître d'ardentes discussions dans lesquelles plusieurs de ses membres, s'attachant avec obstination à de fausses idées qu'ils s'étaient formées, et à des locutions qui les choquaient sans qu'ils voulussent considérer le fond des choses, contestèrent non-seulement la rigueur des raisonnements, mais encore l'exactitude des règles de Leibnitz. Cette opposition fut utile, en forçant les *géomètres infinitésimaux* à donner une forme plus nette aux principes contestés, qui peut-être n'avaient été mal compris des uns que pour avoir été jusque-là mal expliqués par les autres. Leibnitz lui-même, que les plus grands géomètres de l'Europe avaient enfin admiré et compris, loin de s'envelopper dans sa gloire et de mépriser les critiques, ne dédaigna pas de répliquer avec courtoisie à des adversaires qu'il estimait malgré la faiblesse de leurs arguments. Sa réponse au *Journal de Trévoux* est restée célèbre par une concession singulière, qui semblerait passer condamnation sur le manque de rigueur qu'on lui reprochait. Il assimile en effet les infiniment petits des divers ordres à des grandeurs incomparables à cause de leur extrême inégalité, comme le serait un grain de sable par rapport au globe de la terre. Un tel langage, il faut l'avouer, ne signifie rien de précis et conduirait à confondre l'infiniment

(*) Newton est toujours aussi irréprochable dans la forme que rigoureux dans le fond.

petit avec le très-petit. Leibnitz ressemble, dans cette circonstance, dit Fontenelle, à un architecte qui a fait un bâtiment si hardi, qu'il n'ose lui-même s'y loger, tandis que d'autres, plus confiants que lui, s'y logent sans crainte, et, qui plus est, sans accident. Mais à cette citation on doit ajouter que, la lettre de Leibnitz n'étant pas écrite pour des géomètres, la concession qui semble trop timide n'était peut-être que prudente. Leibnitz renvoie d'ailleurs sur ce point à l'ouvrage de l'Hospital, qui l'expose avec exactitude et simplicité. Toute controverse ne tarda pas d'ailleurs à s'évanouir par la définition précise des termes employés, et ces matières ont été éclairées et approfondies par tant de discussions, qu'il n'y subsiste plus aucun nuage, et que tout aujourd'hui semble simple et rigoureux dans le début d'une science facilement accessible, et que l'on ne songe plus à nommer *transcendante*.

L'idée fondamentale de la théorie des différentielles consiste à chercher, dans l'accroissement d'une fonction quelconque, la partie proportionnelle à l'accroissement de la variable, et qui reçoit le nom de *différentielle*. Elle s'obtient si facilement pour les fonctions simples ou composées, implicites ou explicites, que l'historien le plus minutieux ne se croirait pas obligé de rapporter l'honneur de chaque règle à celui qui l'a énoncée le premier. La considération des fonctions de plusieurs variables complète d'une manière aussi naturelle que nécessaire la conception primitive de Leibnitz, qui, non plus que Newton, n'a pas eu occasion de s'en occuper. Le *Traité des Infiniment petits* de l'Hospital, publié en 1654, traite exclusivement des fonctions d'une seule variable. La transition d'un cas à l'autre est cependant si naturelle, qu'Euler, ayant à différentier une fonction de deux variables x et y, écrit immédiatement le résultat sous la forme $P dx + Q dy$, et ne signale même pas dans la science l'introduction d'une idée nouvelle. Quoique les règles de Leibnitz n'aient pas été posées en vue de ce problème plus général, elles s'y appliquent en effet, et souvent même le résolvent complétement. Lorsque par exemple on s'est habitué à dire

$$d.ab = adb + bda,$$

en regardant a et b comme deux fonctions quelconques d'une même variable x, si l'on doit différentier le même produit ab lorsque les variables sont indépendantes, il est tout naturel d'employer la même formule, et, malgré

l'importance de la question nouvelle qui se trouve abordée, on comprend qu'il n'y a pas lieu à regarder comme une découverte cette extension donnée à une formule aussi connue et à l'expression de laquelle on n'a d'ailleurs rien à changer.

Quoi qu'il en soit, nous n'avons rien d'essentiel à ajouter à ce que le Calcul différentiel d'Euler contient sur les différentielles premières d'une fonction de plusieurs variables.

La théorie du déterminant d'un nombre quelconque de fonctions contenant un nombre égal de variables fait le sujet du chapitre III. Cette théorie, qui se rattache d'une manière beaucoup moins directe à la conception primitive, est aussi beaucoup plus récente, et due presque entièrement à Jacobi. La définition de ce déterminant est telle, que dans le cas d'une seule fonction il se réduit à la dérivée. L'analogie des déterminants et des dérivées est d'ailleurs complète, et l'importance des applications, faites la plupart par l'illustre auteur de la théorie, donne à cette ingénieuse conception le droit de figurer parmi les principes de la science.

Nous avons placé immédiatement après la théorie des différentielles du premier ordre son application à l'étude des tangentes et des plans tangents, qui est à la fois une des plus célèbres, des plus importantes et des plus simples que l'on en puisse faire. On s'étonnera peut-être cependant qu'un chapitre consacré à la géométrie vienne interrompre l'exposition des principes analytiques; mais il n'y a, je crois, aucun inconvénient à aborder immédiatement les questions géométriques dont l'étude n'exige du lecteur aucune idée nouvelle. Les théories qui, comme celle de la courbure des surfaces, restent habituellement en dehors des études élémentaires, seront au contraire placées plus utilement après l'exposition du calcul différentiel, parce que, tout en formant une application très-intéressante des principes relatifs aux différentielles du second ordre, elles n'en sont pas la traduction géométrique.

La détermination des plans tangents a été tout naturellement rapprochée de celle des tangentes, quoiqu'elle lui soit, dans l'ordre historique, postérieure de bien des années. Parent, dans ses *Essais et Recherches de mathématiques et de physique*, a le premier parlé de représenter une surface par une équation entre trois variables, mais il n'a pas fait connaître l'équation générale du *plan tangent*. Jean Bernoulli, sans la donner explicitement, a

été conduit, dans la solution d'un problème difficile, à faire entrer dans les formules les éléments qui la déterminent. On voit, en lisant son Mémoire, qu'il lui eût été bien facile de l'obtenir, mais on ne doit pas pour cela regarder J. Bernoulli comme l'*inventeur* de la théorie du plan tangent, qui en réalité n'appartient à personne.

La théorie des enveloppes a naturellement trouvé place dans le Chapitre consacré aux tangentes. Conçue par Leibnitz dès le début des nouveaux calculs, elle se rattache très-simplement à la théorie précédente, et n'exige comme elle que la considération des dérivées du premier ordre. On peut la considérer, il est vrai, comme la généralisation de la théorie des développées d'Huyghens ou des caustiques de Tchirnaus. Mais ces enveloppes d'une espèce particulière seront étudiées dans un autre Chapitre, où l'on fera connaître les propriétés qui leur sont propres.

Le Chapitre V complète la théorie des différentielles du premier ordre; il contient l'expression de la différentielle de quelques fonctions géométriques, et en particulier de la longueur d'un arc de courbe. Quoique cette recherche appartienne à la Géométrie, elle ne suppose chez le lecteur que les seules idées qui, dès l'apparition de la théorie de Leibnitz, furent immédiatement familières à tous les géomètres. L'étude des arcs de courbe occupe une grande place dans l'histoire de la science, et le calcul intégral lui doit l'origine de ses plus belles théories générales; mais ces questions seront traitées dans un autre volume, nous pouvons à peine les indiquer dans celui-ci.

La théorie des dérivées d'ordre supérieur et celle du changement de la variable indépendante, qui n'est au fond que la recherche des formules générales qui donnent les dérivées des fonctions implicites, forment les Chapitres VI et VII. Les questions qui y sont résolues se posent d'elles-mêmes, et leur solution ne pouvait arrêter aucun géomètre digne de ce nom. Les simplifications que l'on peut apporter au calcul successif des dérivées appartenant à l'enseignement plus encore qu'aux principes mêmes de la science, peut-être trouvera-t-on surabondants les détails qui nous permettent de consigner à l'avance quelques résultats utilisés plus tard dans la théorie des séries.

Les formules pour le changement de la variable indépendante, dans le cas d'une seule variable, ont été données pour la première fois dans le *Traité des infiniment petits* de l'Hospital, et l'exposition complète de la théorie géné-

rale occupe une place importante dans le *Calcul différentiel* d'Euler, qui ne laisse en dehors de ses méthodes aucun des cas utiles ou curieux que l'on peut avoir à considérer.

Le Chapitre VIII est consacré à la formation des équations différentielles. Ces équations devaient naître naturellement des problèmes inverses relatifs aux tangentes, et l'on ne pouvait tarder à voir, comme Jean Bernoulli le remarqua le premier, qu'à une même équation différentielle correspondent une infinité de courbes, dont l'équation générale contient une constante arbitraire. De là à éliminer la constante par la différentiation, il n'y a qu'un pas qui devait conduire forcément à éliminer plusieurs constantes par le moyen des dérivées d'ordre supérieur. Euler fut le premier à exposer cette théorie. Cependant, je le répète, on ne pourrait pas, sans injustice pour Leibnitz et les frères Bernoulli, lui en attribuer l'invention. Il n'a d'ailleurs fait lui-même qu'esquisser la théorie de l'élimination des fonctions arbitraires dont nous donnons l'importante application faite par Monge à l'étude des diverses classes de surfaces. Parmi les travaux qui ont servi à constituer cette partie de la science, signalons enfin un excellent Mémoire d'Ampère, sur lequel nous aurons à revenir.

La correspondance des géomètres du dix-huitième siècle offre, presque à chaque page, des exercices et des développements sur une théorie importante qui, née en même temps que le calcul différentiel, appliquée souvent à la solution des mêmes problèmes, et se développant avec lui, en a reçu et lui a fourni de tels secours, qu'il est aujourd'hui presque nécessaire de les étudier en même temps.

Le Livre II est consacré à l'exposition de cette doctrine, dont nous devons esquisser rapidement l'histoire.

On peut faire remonter à Archimède l'emploi d'une série infinie. La méthode qu'il emploie pour carrer la parabole suppose en effet la sommation d'une progression illimitée. Dans le *Traité sur l'Hélice,* il a été conduit, comme Cavalleri, Pascal et Wallis l'ont été depuis, à considérer l'aire d'une portion de courbe comme la somme d'une infinité d'éléments; mais il n'y a pas là de séries proprement dites, parce que ces éléments sont variables et diminuent à mesure que leur nombre augmente, tandis que les termes d'une série, également en nombre infini, ont chacun une valeur fixe qui, bien

entendu, tend vers zéro lorsque le rang du terme augmente indéfiniment. Ces sommes d'éléments se présentaient en outre comme des formes transitoires auxquelles on ne pouvait s'arrêter, et qui par elles-mêmes n'eussent été d'aucun secours.

C'est encore la recherche d'une quadrature qui conduisit Mercator à la série célèbre qui représente $l(1+x)$, et dont la démonstration, qui a précédé la découverte du calcul différentiel et celle du calcul intégral, revient au fond à remplacer la fraction $\frac{1}{1+x}$ par une progression indéfinie, et à intégrer ensuite les deux membres de l'équation. Cette série, publiée en 1672 dans l'ouvrage intitulé *Logarithmotechnia*, est le premier exemple d'une formule composée d'un nombre illimité de termes, et utilement employée pour le calcul numérique de l'expression qu'elle représente : chacune des parties dont se compose la démonstration de Mercator était alors bien connue. Huyghens avait montré l'identité des logarithmes avec les aires hyperboliques, et l'*Arithmetica infinitorum* de Wallis faisait connaître l'aire des courbes dont l'ordonnée est proportionnelle à une puissance de l'abscisse, c'est-à-dire, dans notre langage actuel, l'intégrale de chacun des termes de la progression. Le seul, mais le grand mérite de Mercator, est donc d'avoir appelé l'attention sur l'expression indéfinie qu'il était sans doute facile de former, mais dont un géomètre moins perspicace aurait méconnu l'importance.

Lorsque Mercator publia sa découverte, Newton était depuis plusieurs années en possession de l'idée fondamentale qui y conduit, et la communiqua à Barrow, autrefois son maître et alors son collègue, en mettant sous ses yeux le manuscrit du Traité intitulé : *Analysis per æquationes numero terminorum infinitas*. Newton, dans ce petit Traité, transporte pour ainsi dire au calcul algébrique les méthodes de l'Arithmétique. Les séries ordonnées suivant les puissances de la variable sont, à ses yeux, la généralisation des fractions décimales qui peuvent représenter tous les nombres. De même que ces fractions décimales participent aux propriétés des nombres entiers et se prêtent aussi facilement qu'eux au calcul, les séries transforment les expressions fractionnaires ou irrationnelles en polynômes entiers, et ramènent les expressions les plus compliquées à un type uniforme et simple.

Quoique ce mode de développement s'applique utilement à un grand nombre de problèmes, c'est en vue surtout de la quadrature des courbes que Newton le considère d'abord. Comme Mercator, il fait usage de la formule de Wallis, qui exprime l'aire d'une courbe dont l'ordonnée est proportionnelle à une puissance de l'abscisse; mais il va beaucoup plus loin que lui, en appliquant la méthode, non-seulement aux fonctions algébriques explicites, mais encore à la résolution des équations littérales dont il développe la racine en série, et trouvant enfin l'expression d'un arc de cercle en fonction de son sinus, puis par la méthode du retour des suites, dont il est l'inventeur, le développement du sinus en série ordonnée suivant les puissances de l'arc. Dans ce premier essai, l'illustre auteur se contente de former les termes du développement sans s'attacher à démontrer leur expression générale qu'il devine par analogie. La formule pour le développement de la puissance d'un binôme ne s'y trouve pas; c'est longtemps après, en 1676, dans une lettre à Oldenbourg, qu'il indique longuement comment il a été conduit à la deviner et à en vérifier ensuite l'exactitude. L'opuscule de Newton fut communiqué par Barrow à plusieurs géomètres dont il excita la vive admiration; mais loin d'être stimulé par de tels suffrages, Newton cessa dès lors de poursuivre ses idées, persuadé que Mercator, étant entré dans cette voie, trouverait aisément le reste avant que lui-même fût d'un *âge assez mûr pour rien publier :* il avait alors vingt-six ans et possédait déjà, outre la méthode des séries, les principes du calcul des fluxions et la décomposition de la lumière! La gloire de Newton ayant appelé sur ses moindres actes les minutieuses recherches de la postérité, tous ces faits ont été mis hors de doute et ne peuvent être contestés : mais s'il s'agissait de tout autre, le silence qu'il garda envers le public ne permettrait-il pas d'assigner à ses recherches une date postérieure à la publication de Mercator? Tant il est vrai que sur de telles questions on ne doit raisonner qu'avec une extrême réserve.

Gregory découvrit, peu de temps après, la série qui exprime un arc en fonction de sa tangente, et Leibnitz y parvint également après lui, mais à l'aide de principes différents et sans avoir eu connaissance du résultat. Ils doivent être cités l'un et l'autre parmi les créateurs de la théorie des séries. On doit également mentionner Jacques Bernoulli, inventeur d'un théorème

général qui donne l'expression d'une fonction quelconque en série dont les termes contiennent en facteur ses dérivées successives, et qui est une conséquence immédiate du développement beaucoup plus important découvert plus tard par Taylor.

L'ouvrage de Taylor intitulé *Methodus incrementorum* contient, avec de très-belles applications, une nouvelle manière de présenter l'analyse infinitésimale en la rattachant au calcul des différences finies. C'est là qu'il donna pour la première fois le théorème célèbre qui porte son nom, et dont les travaux des plus grands géomètres ont constamment depuis accru l'importance. Toutes les séries connues jusque-là en sont de faciles corollaires, et il en peut fournir une infinité d'autres. Taylor cependant n'en donna pas une seule, et cette circonstance explique le peu d'importance que les géomètres semblent avoir attaché d'abord à sa découverte. Aujourd'hui encore le théorème de Taylor, modifié d'une manière insignifiante, est désigné souvent sous le nom de théorème de Maclaurin, et il a été souvent cité comme appartenant à d'Alembert, qui, ignorant sa publication très-antérieure, l'a donné comme nouveau dans l'*Encyclopédie*.

Taylor est loin d'ailleurs d'avoir complétement traité la question; l'étude des conditions nécessaires pour que sa série soit convergente n'a été faite que peu à peu. D'illustres géomètres ont attaché de l'importance à en avoir donné des démonstrations nouvelles qui les mettent mieux en évidence, et c'est tout récemment que Cauchy est parvenu enfin à les renfermer dans une règle générale qu'il regardait avec raison comme une de ses plus importantes découvertes.

Tous les géomètres s'accordent aujourd'hui à regarder la convergence d'une série comme une condition nécessaire de son légitime emploi. Les premiers inventeurs de cette grande théorie partageaient cette opinion, qui semble d'ailleurs si naturelle. Les séries dont ils faisaient usage devaient toujours, suivant eux, donner la valeur numérique de la fonction représentée. Leibnitz paraît avoir été le premier à désirer des règles de convergence.

On lit dans une lettre adressée par lui à Hermann, le 2 juillet 1705 :

« Je ne demande pas que l'on trouve la valeur d'une série quelconque sous forme finie; un tel problème surpasserait les forces des géomètres. Je

voudrais seulement que l'on trouvât moyen de décider si la valeur exprimée par une série est possible, c'est-à-dire convergente, et cela sans connaître l'origine de la série. Il est nécessaire, pour qu'une série indéfinie représente une quantité finie, que l'on puisse démontrer sa convergence, et que l'on s'assure qu'en la prolongeant suffisamment l'erreur devient aussi petite que l'on veut. »

Pendant longtemps pourtant les géomètres, presque sans exception, ont accepté sur ce point une doctrine bien étrange; non contents d'appliquer les développements en série aux cas légitimes où ils sont convergents, ils se sont crus en droit de les étendre sans restriction. La généralité inhérente aux formules algébriques a trompé sur ce point les plus scrupuleux et les plus habiles; regardant les séries comme des polynômes, ils croyaient pouvoir sans crainte exécuter sur elles les opérations et transformations reconnues légitimes pour la somme d'un nombre quelconque de termes, et les nécessités particulières imposées par la condition qu'elles fussent convergentes ont été pendant longtemps méconnues. Euler, qui le premier a formulé explicitement cette opinion, croyait qu'un raisonnement où interviennent les séries divergentes est suffisamment exact dès que la suite des calculs amène un résultat en termes finis, ou une série convergente.

De tels principes, adoptés par un esprit aussi sage, et qui partout ailleurs a si bien connu et respecté la rigueur mathématique, nous offre une de ces contradictions où l'esprit humain tombe quelquefois et qu'il faut renoncer à expliquer. Quoi qu'il en soit, quelques applications heureuses tinrent lieu d'une démonstration qu'il était impossible de faire, et que pendant longtemps personne ne songea à réclamer.

C'est vers le commencement du siècle que Poisson rappela les géomètres à la vérité et à la rigueur, en montrant à quels résultats peut conduire l'emploi des séries divergentes. Quelques lignes énergiques de Gauss et d'Abel ont également contribué à faire cesser ce scandale géométrique et à établir solidement la nécessité absolue de la convergence en faisant disparaître de la science une erreur qui, tenant aux principes, aurait pu en causer un grand nombre d'autres. Mais il est inutile d'insister sur une doctrine que rien ne justifie et qui est réfutée par le seul examen des conséquences absurdes qu'elle entraîne.

Les règles qui permettent de décider de la convergence d'une série acquirent une importance nouvelle lorsque cette convergence eut été reconnue indispensable. La solution du problème dans quelques cas particuliers est aussi ancienne que l'emploi des séries; mais l'étude approfondie n'en a été faite que très-tard et très-lentement.

Nous pouvons citer d'abord quelques règles presque évidentes données par d'Alembert, et relatives aux séries numériques, l'expression du reste de la série de Taylor par Lagrange, l'étude d'une série importante dont Gauss a donné la condition de convergence en la rattachant à des règles élégantes, et enfin des méthodes nombreuses et auxquelles bien peu de cas peuvent échapper, pour décider de la convergence des séries numériques à termes positifs.

A l'étude des conditions de convergence des séries, nous avons dû joindre l'exposition des méthodes qui facilitent leur sommation approchée lorsqu'elles sont lentement convergentes. Nous en exposons trois qui reposent sur des principes très-différents, et dont chacune pourra, dans certains cas, se trouver plus avantageuse que les deux autres. L'une de ces méthodes est due à Stirling, la seconde à Euler, la troisième, qui est d'une grande élégance, a été proposée par M. Kummer.

La série de Taylor, à cause de sa grande généralité, devait plus que toute autre fixer l'attention des géomètres; l'expression du reste, successivement obtenue sous diverses formes plus ou moins appropriées aux cas les plus remarquables que l'on devait traiter, semblait, avant les beaux travaux de Cauchy, donner le dernier mot de la question envisagée sous forme abstraite. En approfondissant le résultat de Taylor, sans sortir du point de vue auquel il s'est placé, on y voit tout d'abord et assez facilement une généralisation du principe sur lequel repose le calcul différentiel : l'accroissement infiniment petit d'une fonction quelle qu'elle soit, si l'on y néglige les infiniment petits d'ordre supérieur au premier, est proportionnel à l'accroissement de la variable; les exceptions dont la possibilité est évidente, puisque la fonction reste indéterminée, ne pouvant jamais se rapporter qu'à certaines valeurs singulières de la variable et le théorème restant forcément exact en général et pour toute fonction continue. Si l'on étudie la question de plus près, en se bornant toujours cependant au cas d'un accroissement infiniment petit, on démontre que l'excès de l'accroissement d'une fonction sur la partie que l'on

peut nommer principale et proportionnelle à l'accroissement de la variable, devient forcément proportionnel au carré de celui-ci, lorsque l'on y néglige les infiniment petits d'ordre supérieur au second; la portion principale de ce qui est négligé dans cette seconde approximation est elle-même proportionnelle au cube de l'accroissement de la variable, et ainsi de suite indéfiniment, les exceptions possibles se rapportant, non à des fonctions singulières, car le théorème est une conséquence nécessaire de la loi de continuité, mais à des valeurs spéciales de la variable pour lesquelles la continuité est rompue.

Ce point de vue très-important et très-lumineux du théorème de Taylor n'en donnerait cependant qu'une intelligence imparfaite.

C'est à Cauchy que revient l'honneur d'avoir le premier rattaché cette question importante à ses véritables principes. La possibilité ou l'impossibilité de développer une fonction par la formule de Taylor peut être reconnue sans qu'il soit nécessaire de calculer les termes mêmes de la série, pourvu que la fonction à développer soit définie pour les valeurs réelles et imaginaires de la variable. Cette introduction des imaginaires dans une question à laquelle leur théorie semble d'abord complétement étrangère est un des plus grands progrès que l'analyse doive à Cauchy et qu'elle ait faits dans ce siècle.

Les expressions imaginaires se présentent comme une conséquence nécessaire des formules les plus simples de l'Algèbre; les racines des équations du second degré impossibles ont la forme $a+b\sqrt{-1}$, qui est aussi celle des racines de toute équation algébrique, et généralement des résultats fournis par des opérations algébriques quelconques exécutées sur de telles expressions. Ces théorèmes furent admis par les géomètres avant d'avoir été rigoureusement démontrés. Euler les énonçait en 1742, dans les *Miscellanea Berolinensia*, comme bien connus. C'est cependant en 1746 qu'on en trouve la première démonstration générale donnée par d'Alembert, démonstration insuffisante, il faut l'avouer, ainsi que toutes celles qui furent données jusqu'au Mémoire où Gauss reprend cette question après avoir justement critiqué les raisonnements proposés jusqu'à lui. Peu de questions du reste ont été plus souvent traitées. Gauss n'y a pas consacré moins de cinq Mémoires, et Cauchy, auquel on a souvent attribué la première démonstration rigoureuse, y est revenu lui-même à plusieurs reprises.

Non-seulement les opérations algébriques exécutées sur les expressions imaginaires donnent pour résultat des expressions de même forme qu'elles, mais encore le logarithme d'une expression imaginaire admet une infinité de valeurs, toutes de la forme $a + b\sqrt{-1}$, et la puissance dont l'exposant est imaginaire peut être mise sous la même forme, à laquelle on est toujours ramené. C'est là une découverte importante d'Euler, qui fait d'autant plus d'honneur à sa pénétration, que les discussions de Leibnitz et de Bernoulli sur ce sujet n'avaient fait qu'embrouiller la question en en montrant toutes les difficultés. Euler dissipa tous les nuages en faisant connaître l'expression des lignes trigonométriques au moyen d'exponentielles imaginaires, d'où l'on a déduit tant de belles conséquences, signalées en grande partie par lui-même. Citons seulement ici la décomposition des lignes trigonométriques en produits, et les nombreuses formules auxquelles elle conduit, et dont les démonstrations, peu rigoureuses il faut l'avouer, ont été confirmées depuis par une analyse plus sévère. C'est à Euler également que l'on doit les séries qui expriment les sinus et cosinus du multiple d'un arc en fonction des puissances entières du sinus ou du cosinus, et réciproquement les puissances du sinus ou du cosinus en série dont les termes sont les sinus ou cosinus des multiples de l'arc; les résultats qu'il a fait connaître sont soumis, il est vrai, à des restrictions qu'il n'a pas connues, et les géomètres, trompés par leurs idées sur la généralité des formules algébriques, ont mis longtemps à les soupçonner. Poisson signala le premier une contradiction qu'elles présentent, et dont l'explication ne fut pas donnée immédiatement; mais en mathématiques les formules ne se démentent jamais, et lorsqu'il s'y présente quelque résultat paradoxal, on peut affirmer qu'un examen plus attentif le fera disparaître. Poinsot ne tarda pas, en effet, dans son Mémoire sur les sections angulaires, à préciser le sens et les conditions d'exactitude de ces divers développements. L'examen des questions de convergence est malheureusement laissé de côté dans son travail, et a été fait pour la première fois par Abel, dans son important Mémoire sur le binôme.

Ce Mémoire d'Abel nous ramène à la théorie des fonctions imaginaires, dont nous ne nous sommes écarté qu'en apparence en parlant des séries trigonométriques. L'illustre géomètre norvégien y étudie, avec une rigueur jusque-là bien rare dans les questions de ce genre, la série du binôme, dans

laquelle il suppose aux lettres qui y figurent des valeurs imaginaires. Il ne s'agissait pas seulement pour lui de savoir si la formule de Newton *reste exacte* et représente encore $(1+x)^m$, lorsque x et m sont imaginaires. Une telle proposition n'aurait aucun sens précis. La série, en effet, est complétement déterminée lorsque x et m sont donnés, et la fonction admet, d'après la définition, un nombre infini de valeurs ; quelle est celle qui représente la série ? Abel résout complétement la question, préparant ainsi par l'étude d'un cas particulier difficile et important la théorie générale créée peu de temps après par Cauchy, et qui a pris rapidement une telle importance, que nous devons nous y arrêter particulièrement.

Pour comprendre la portée de cette théorie, il faut premièrement se former une idée nette du degré de généralité renfermé dans cette expression : *une fonction imaginaire quelconque*, et ne pas se laisser égarer par l'analogie, très-trompeuse cette fois, avec une fonction réelle quelconque.

Nous avons une idée très-claire du degré d'indétermination que comporte cette expression, *une fonction quelconque d'une variable réelle*. Nous entendons que, pour chaque valeur de la variable, on peut choisir librement celle de la fonction, sans que le choix soit gêné par aucune autre condition que celle de fournir une suite continue représentant les points d'une courbe dont la forme reste arbitraire. L'analogie porte tout naturellement à regarder une fonction imaginaire quelconque comme impliquant un égal degré d'indétermination et pouvant recevoir, pour une valeur donnée de la variable $x=\alpha+\beta\sqrt{-1}$, une partie réelle et une partie imaginaire arbitraires toutes deux, sans autre restriction que celles qui résultent de la condition de continuité. Si l'on prend, en un mot, α, β pour coordonnées d'un point ayant pour troisième coordonnée la partie réelle de la valeur correspondante d'une fonction arbitraire, on doit penser, à priori, que la surface décrite par ce point est entièrement arbitraire comme la fonction qui lui donne naissance ; mais il y aurait là une erreur grave. La condition d'avoir une dérivée déterminée équivaut en effet à deux équations qui sont imposées à la partie réelle aussi bien qu'à la partie imaginaire d'une fonction quelconque, et que nous supposerons toujours satisfaites. L'existence de ces équations explique comment une fonction dont la définition n'est pas donnée peut avoir néanmoins des propriétés très-précises, et rend

raison de l'existence des beaux théorèmes de Cauchy, qui seraient sans cela incompréhensibles. Nous nous bornons à indiquer dans ce volume comment les valeurs infinies ou mal déterminées d'une fonction font connaître les limites en dehors desquelles son développement est impossible. Nous aurons à y revenir dans un autre volume, où l'emploi du calcul intégral simplifiera les démonstrations en permettant de les compléter. Cette théorie est d'autant plus importante, que Lagrange affirme dans un ouvrage célèbre que le théorème de Taylor, loin de devoir être regardé comme une conséquence du calcul différentiel, doit être établi à priori et contient les véritables principes de ce calcul, dégagés de toute idée d'infiniment petit ou de limite. La démonstration donnée par l'illustre auteur, malgré l'autorité imposante de son nom, n'a pu être acceptée par les géomètres, mais on n'en doit pas moins admirer cette affirmation si formelle, quoique non justifiée, d'un principe qui, établi un demi-siècle plus tard sur des bases bien différentes, devait acquérir en même temps un degré de généralité auquel les partisans de ces idées ne songeaient pas même alors. En voyant combien d'explications délicates sont nécessaires pour fixer le sens et les limites du théorème de Taylor, on comprend qu'il tient à des vérités d'un accès trop difficile pour qu'on en puisse faire, comme l'avait voulu Lagrange, la pierre fondamentale de l'édifice : quelque élégante et facile que soit la doctrine à laquelle on est conduit en se plaçant tout d'abord aussi haut, les géomètres ne peuvent oublier que la précision des énoncés et la solidité absolue des preuves sont le caractère essentiel des sciences mathématiques, et si l'on est excusable de s'en écarter momentanément pour atteindre plus vite un but important, on ne saurait se montrer trop sévère lorsqu'il s'agit d'établir les bases d'une longue suite de théories.

Lorsque dans la série de Taylor on attribue à la variable une valeur imaginaire, elle se transforme en série ordonnée suivant les sinus et cosinus des multiples d'un même arc. Les séries de ce genre, si importantes aujourd'hui, ont été considérées pour la première fois par Daniel Bernoulli, qui par des procédés ingénieux, mais singulièrement hardis, et, il faut l'avouer même, bien peu rigoureux, a donné l'expression d'une constante, de la variable x, du carré et du cube de cette variable, en série de cette forme. Qu'il nous suffise de dire ici que le point de départ de la démonstration

est l'équation

$$-\frac{1}{2} = \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \ldots + \cos nx + \ldots,$$

que Bernoulli nomme *incongruè vera,* et qu'il faudrait simplement appeler inexacte et absurde, car le second membre est évidemment indéterminé. Une année après, Euler, portant son attention sur ces questions, les a rattachées à sa théorie des exponentielles imaginaires ; mais c'est dans ce siècle seulement qu'une importante application, due à Fourier, fut l'occasion de nouvaux travaux qui montrent, en toute rigueur, la possibilité de représenter par des séries de ce genre toutes les fonctions continues ou discontinues. Mais ce sujet important n'appartient pas à ce volume, et nous nous bornons à y faire connaître les méthodes simples et peu rigoureuses d'Euler.

Il était impossible de s'étendre autant que nous l'avons fait sur la théorie des séries, sans rencontrer un grand nombre de résultats élégants et célèbres qui se déduisent des formules générales. On doit faire néanmoins une distinction essentielle entre une série ordonnée suivant les puissances ascendantes d'une variable ou toute autre loi régulière, et une série purement numérique dont la somme représente un nombre et non une fonction : la particularisation de la lettre variable peut conduire de la première à la seconde, mais le problème inverse est indéterminé. Par exemple, la formule

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \ldots,$$

donnée sans démonstration par Newton, peut être considérée indifféremment comme provenant de la série

$$x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} + \frac{x^{11}}{11} + \ldots,$$

dans laquelle on suppose $x = 1$, ou de

$$\sqrt{2}\left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \ldots\right),$$

où l'on suppose $x = \frac{\pi}{4}$. Elle appartient ainsi à deux théories très-différentes, et pourrait d'ailleurs se déduire de beaucoup d'autres.

Les ouvrages et les Mémoires d'Euler contiennent un grand nombre de sommations de ce genre, que nous sommes bien loin de reproduire toutes; c'est dans son Introduction à l'étude de l'analyse infinitésimale et dans la collection des Mémoires de Saint-Pétersbourg qu'il convient de les étudier.

Malgré l'importance de la série de Taylor, il est souvent plus simple d'obtenir les termes du développement qu'elle devrait fournir, en employant d'autres méthodes dont le Chapitre III du second Livre fournit des exemples. On y a placé d'abord plusieurs démonstrations d'une formule générale due à Lagrange, et qui exprime sous forme de série ordonnée suivant les puissances de α la racine z d'une équation quelconque, mise préalablement sous la forme

$$z = a + \alpha\varphi(z).$$

Cette belle formule a été l'objet de nombreux travaux, et d'habiles géomètres ont différé d'opinion sur le caractère distinctif de la racine qu'elle fournit. Ces questions seront discutées plus tard. Dans ce Chapitre nous nous bornerons à donner sur ce point quelques indications fort simples. La formule de Lagrange donne comme corollaire deux autres formules dignes d'intérêt, qui sont dues à Burmann et à Abel.

La méthode des coefficients indéterminés est très-souvent la plus commode à employer pour obtenir les termes d'un développement dont la légitimité a été démontrée; nous donnons plusieurs exemples de son application, en signalant de remarquables séries dues à M. Tchébychef. La théorie des fonctions génératrices, créée par Laplace, quelques remarques sur les notations symboliques, et une digression sur les fonctions désignées par X_n et sur les nombres de Bernoulli, terminent le Chapitre, qui n'a pas d'autre unité que l'absence du théorème de Taylor dans l'étude de séries qui pourraient s'en déduire.

Le Chapitre IV contient la définition des fonctions imaginaires. Les points principaux qui y sont traités ont été indiqués plus haut à l'occasion du théorème de Taylor.

Le Chapitre V est consacré au développement des fonctions de plusieurs variables; il contient l'extension à ce cas de la formule de Taylor et de celle de Lagrange.

Le Chapitre VI fait connaître le développement de quelques fonctions sous forme de produits infinis; les formules fondamentales dont se déduisent la plupart des autres sont celles qui donnent les expressions de $\sin x$ et $\cos x$, et qui s'appliquent aux valeurs réelles ou imaginaires de la variable; elles sont dues à Euler, qui, peu rigoureux dans leur démonstration et dans l'étude de leurs conséquences, en a déduit cependant un très-grand nombre de résultats exacts et importants, qu'une analyse irréprochable a confirmés depuis.

Les développements sous forme de fractions continues sont étudiés dans le Chapitre VII, où se trouvent indiquées les formules les plus remarquables obtenues sur ce sujet par Euler, Lambert, Lagrange et Gauss; ces développements peuvent d'ailleurs varier beaucoup pour une même fonction, et leur importance, si grande en Arithmétique, est beaucoup moindre en Analyse, parce que la condition de n'admettre que des dénominateurs entiers, qui entraîne les plus belles propriétés de ces fractions, est ici supprimée sans que rien vienne la remplacer.

Les principes de la théorie des résidus, créée par Cauchy, sont exposés dans le Chapitre VIII. L'illustre géomètre a remarqué que dans un grand nombre de problèmes où figurent des fonctions qui passent par une valeur infinie, la partie importante à considérer, celle qui le plus souvent détermine seule le résultat, n'est pas, comme toutes les analogies sembleraient l'indiquer, la *partie principale*, c'est-à-dire la fonction simple, dont pour des valeurs voisines la différence avec la fonction est infiniment petite relativement à chacune d'elles, mais une certaine fraction dont le dénominateur est toujours du premier degré, dont Cauchy a désigné le numérateur sous le nom de *résidu*, et dont il a fait dans presque toutes les parties de la science d'élégantes et utiles applications.

Le second Livre est enfin terminé par deux Chapitres relatifs aux valeurs singulières des fonctions et aux questions de maximum et minimum. On a dû les placer après l'étude des séries sur l'emploi desquelles sont fondées la plus grande partie des méthodes et des démonstrations qui y sont exposées.

L'application du calcul infinitésimal à la théorie des courbes et des surfaces fait l'objet du troisième Livre. La généralité des résultats qui s'y trouvent exposés est presque toujours absolue, et presque tous les théorèmes sont indépendants de la définition spéciale de la courbe ou de la surface à laquelle

ils se rapportent. Descartes, Fermat, Pascal, Huyghens, Roberval, et quelques autres, auraient sans doute résolu sans le secours du nouveau calcul chacune des questions auxquelles on l'appliqua d'abord; mais la force et la beauté de l'idée nouvelle consistent précisément à supprimer toute distinction entre les fonctions que l'on étudie ou entre les lieux qu'elles servent à représenter. En réunissant dans les mêmes recherches les courbes mécaniques et les courbes géométriques exclusivement considérées par Descartes, Leibnitz détruisit une barrière nuisible au progrès de la science, en même temps qu'il annonçait le premier l'existence de lois générales applicables à la variation de toutes les grandeurs continues; et si les résultats les plus merveilleux auxquels cette voie peut conduire sont restés inconnus aux inventeurs du calcul différentiel, on ne peut leur refuser l'honneur d'y avoir incontestablement fait les premiers pas.

On doit ajouter que cette généralité dans les résultats, qui fait l'importance du calcul différentiel, en fait aussi la simplicité. Si l'étude individuelle des courbes et des surfaces est facilitée, comme celle des fonctions particulières, par la connaissance des lois communes à tous les cas, elle exige cependant, il faut le reconnaître, avec une force d'invention tout aussi grande, des procédés d'investigation incomparablement plus variés, et notre admiration pour les grands génies qui ont ouvert les voies nouvelles ne doit pas faire priser moins haut les travaux de ceux qui persévérèrent dans l'ancienne route ou diminuer l'importance qui s'attache à leurs découvertes.

Le premier Chapitre de ce troisième Livre est consacré à l'étude de la courbure des lignes planes et à la théorie des développées, qui y est liée trop intimement pour qu'on doive les séparer. L'illustre Huyghens, inventeur de la seconde de ces théories, ne paraît pas cependant avoir eu nettement la notion de la courbure; il ne l'a pas du moins formulée explicitement. Leibnitz et Newton y ont été conduits les premiers par des voies différentes. C'est dans les *Acta Eruditorum* de 1686 que Leibnitz donna le premier la définition du cercle osculateur, en expliquant l'importance qu'on y doit attacher dans l'étude des courbes. « Dans chaque portion infiniment petite d'une courbe, on peut considérer, dit-il, comme on l'a fait jusqu'ici, non-seulement la direction, mais la variation de cette direction, c'est-à-dire la flexion (*flexura*); et de même que pour indiquer la direction on fait usage de la

ligne la plus simple possible qui est la ligne droite, je mesure la flexion d'une courbe par la ligne la plus simple qui ait non-seulement même direction, mais encore même courbure qu'elle, c'est-à-dire par le cercle qui non-seulement la touche, mais lui est osculateur. La ligne droite, dont la direction est toujours la même, est très-propre à indiquer une direction; de même le cercle est très-propre à indiquer la courbure, parce que la courbure d'un cercle est la même en tous ses points. Le cercle osculateur d'une courbe en un point est celui qui forme avec elle le plus petit angle de contact; parmi le nombre infini des cercles qui touchent une courbe en un point, on peut, en effet, toujours en assigner un qui s'y assimile mieux que tous les autres, et rampe, pour ainsi dire, davantage vers elle, de sorte qu'aucun autre cercle ne puisse être placé entre eux. »

Le passage précédent est extrait d'une Note fort courte de Leibnitz, extrêmement curieuse à plus d'un titre. On y voit un exemple de la manière dont ce puissant esprit approfondissait tout en paraissant tout effleurer. Il avait aperçu très-nettement, quoiqu'il l'exprime sous une forme peu précise, la théorie de l'osculation et des contacts de divers ordres; mais ici, comme en bien d'autres circonstances, il se contente d'avoir donné les germes d'une théorie nouvelle, laissant à d'autres le soin de les faire fructifier. Les indications qu'il donne sur la manière de trouver le cercle osculateur sont non-seulement très-vagues, mais absolument inexactes, car il se trompe sur le nombre des racines égales que l'on doit trouver lorsque l'on cherche l'intersection d'une courbe avec son cercle osculateur. On peut conclure de cette inadvertance que l'exemple choisi par lui, qui est celui d'une section conique considérée à son sommet, est le seul qu'il ait traité jusqu'au bout; s'il en eût essayé un autre, il aurait certainement reconnu que trois points seulement d'intersection et non pas quatre viennent se confondre en un seul. Plusieurs de ces indications, quoique exactes quand on les interprète comme il faut, manquent peut-être d'une base précise, et l'on comprend, en lisant de pareils écrits, que la doctrine qu'ils renferment restât inabordable au commun des lecteurs.

Jacques Bernoulli, reprenant quelques années après l'exposition des mêmes principes, signala l'inadvertance de Leibnitz, relative au nombre des points d'intersection d'une courbe avec son cercle osculateur; mais, malgré

l'évidence des explications qui lui furent données à plusieurs reprises, Leibnitz revint sur le même sujet et n'abandonna que fort tard sa première assertion.

Puisqu'il ne prononce pas le nom d'Huyghens, Leibnitz ne paraît pas avoir aperçu immédiatement l'intime relation de sa théorie nouvelle avec celle des développées; mais, dans une lettre écrite cinq années plus tard, il dit à Huyghens: « Les centres des cercles mesurant la courbure tombent dans votre génération par évolution. » Huyghens répondit : « Vous me parlez de votre discours: *De angulo contactus et osculi*, qu'il me souvient d'avoir lu et qui ne me paraît pas nouveau, parce que j'avais considéré ces sortes de contact dans mon Traité de l'évolution des courbes, et même longtemps auparavant. » — « Je crois bien, répond Leibnitz, que vous aviez vu le cercle qui se décrit du point de la courbe évolue, et dont le rayon est la moindre droite qu'on peut mener de ce point à la courbe décrite; mais peut-être n'aviez-vous pas songé à le considérer comme la mesure de la courbure, et moi, lorsque j'avais considéré le plus grand cercle qui touche la courbe intérieurement, je ne m'étais pas avisé de songer aux évolutions. » Newton de son côté, dans le livre des *Principes* publié en 1687, fait un usage continuel de la théorie du rayon de courbure, et montre une pleine connaissance de la relation qui lie cette théorie à celle des développées.

Le Chapitre est terminé par l'étude de systèmes de coordonnées curvilignes sur un plan et la démonstration de formules remarquables dues à M. Lamé, qui, après avoir créé cette théorie, lui a consacré un ouvrage qui semble avoir bien peu laissé à faire à ceux qui voudraient l'accroître ou la simplifier. Nous signalons particulièrement la relation remarquable qui lie les rayons de courbure des courbes orthogonales avec leurs dérivées prises par rapport aux arcs normaux, formule très-élégante, qui contient implicitement la loi suivant laquelle peuvent varier les côtés des rectangles infiniment petits dans lesquels un plan est décomposé par deux séries de courbes orthogonales : chaque rectangle en particulier est évidemment arbitraire; mais les côtés successifs ont entre eux des relations nécessaires qui changeraient si les courbes étaient situées sur une autre surface, et qui ne sont les mêmes que pour deux surfaces applicables l'une sur l'autre.

L'étude des lignes tracées sur la sphère est le but du second Cha-

pitre; on y considère un élément signalé par Euler sous le nom de *courbure sphérique,* et présenté comme fournissant la généralisation naturelle de la notion de courbure des lignes planes. Les travaux des géomètres modernes ont étendu la généralisation aux lignes tracées sur une surface quelconque et augmenté par là l'importance des théorèmes très-simples que nous démontrons dans le cas des courbes sphériques. L'extension des belles formules de M. Lamé au cas d'un système de lignes se coupant à angle droit sur la sphère doit être particulièrement signalée.

Le troisième Chapitre est consacré aux lignes à double courbure. Sans nous occuper particulièrement d'aucune courbe, nous donnons, comme pour les courbes planes, les propriétés qui leur sont communes à toutes; elles sont pour la plupart des conséquences de la loi de continuité, mais le lien qui les y rattache est caché : des yeux très-exercés et attentifs peuvent seuls l'apercevoir. Toute courbe a en chaque point un plan osculateur, un cercle osculateur dont l'axe, intersection de deux plans normaux infiniment voisins, est la génératrice d'une surface développable, ayant pour arête de rebroussement le lieu des centres des sphères osculatrices.

Le plan osculateur a été pour la première fois considéré par Jean Bernoulli, qui, en l'introduisant dans la solution d'un problème de Géométrie, a indiqué très-suffisamment le moyen de le déterminer. Mais ces considérations paraissent avoir fort peu attiré l'attention avant le beau Mémoire où Monge a pour la première fois exposé la théorie générale des développées, et qui forme la base de nos connaissances générales sur les courbes à double courbure. C'est là que pour la première fois se trouve indiquée la surface développable qui contient les développées et son arête de rebroussement lieu des centres des sphères osculatrices. Il a montré également que le lieu des centres de courbure n'est pas une développée, et rendu facile la solution de tous les problèmes résolus dans ce troisième Chapitre.

La théorie générale des surfaces, telle qu'elle est exposée dans les Chapitres V, VI et VII, est renfermée presque entièrement dans le Mémoire d'Euler sur la courbure des sections normales, et dans les écrits où Monge a fait connaître l'existence et les propriétés des lignes de courbure. Ces propriétés si simples et si admirables par leur généralité ne pouvaient tarder à devenir classiques et en quelque sorte élémentaires. Rien n'est plus utile à

la clarté d'une théorie que son introduction dans l'enseignement régulier. Les efforts successifs des maîtres, et souvent aussi ceux des élèves, en s'exerçant sur toutes leurs conséquences, approfondissant les difficultés incidentes sans laisser aucun point inexploré, réduisent peu à peu à des termes d'une extrême évidence les propositions qui, énoncées pour la première fois par leurs inventeurs, ont pu sembler les plus merveilleuses et les plus inattendues. Parmi les travaux qui ont le plus contribué à atteindre ce but, on doit citer au premier rang l'ingénieuse théorie de l'indicatrice, à l'aide de laquelle M. Dupin a si heureusement relié entre eux les résultats d'Euler et de Monge. Citons aussi, parmi les progrès importants qui restaient à faire après les travaux de ces deux grands génies, le théorème capital relatif aux surfaces orthogonales, découvert aussi par M. Dupin, et auquel les études de M. Lamé ont ajouté depuis tant d'importance. N'oublions pas enfin le beau théorème de Malus sur les rayons lumineux, complété par M. Dupin et démontré par lui pour la première fois dans toute sa généralité.

Les premières recherches de Monge sur la théorie des surfaces sont consignées dans un Mémoire dont le titre semble annoncer des études toutes différentes. C'est, en effet, dans son Mémoire sur les déblais et remblais qu'il donne pour la première fois la condition pour que des droites soient normales à une même surface et que se trouve démontrée, pour une surface quelconque, l'existence des lignes de courbure. Une singularité de ce Mémoire doit être signalée : il semble par son titre complétement étranger à la théorie des surfaces ; il est intitulé en effet : *Mémoire sur la théorie des déblais et remblais*. La question qui s'y trouve traitée est curieuse, mais elle est résolue, il faut l'avouer, par des considérations tellement peu rigoureuses, qu'il est permis de conserver des doutes sur l'exactitude même des conclusions. C'est sous forme de lemme destiné à faciliter l'étude de cette théorie incomplète et sans importance, que Monge a produit une de ses plus belles découvertes.

Le dernier Chapitre de ce volume traite des lignes tracées sur une surface quelconque ; les résultats principaux en sont empruntés à l'un des plus beaux et des plus célèbres Mémoires de Gauss. Ils sont relatifs à la déformation des surfaces suivant une loi telle, que la longueur des lignes qui y sont tracées reste sans altération. Dans une telle déformation, le produit des rayons de

courbure reste invariable en chaque point; mais la réciproque n'est pas exacte, et les points d'une surface peuvent correspondre un à un à ceux d'une autre surface, de telle sorte que le produit des rayons de courbure soit le même aux points correspondants, sans que pour cela les lignes correspondantes aient la même longueur; d'autres conditions sont nécessaires pour que deux surfaces soient applicables l'une sur l'autre; leur étude successivement perfectionnée par plusieurs géomètres habiles, a conduit à une méthode très-simple qui permet de décider si deux surfaces sont applicables l'une sur l'autre, sans sortir des limites du calcul différentiel.

Le même Chapitre contient enfin quelques résultats remarquables relatifs à l'élément nommé par M. Liouville *courbure géodésique*, et qui joue dans l'étude des lignes tracées sur une surface un rôle tout analogue à celui de la courbure dans l'étude des lignes planes.

Tel est le résumé succinct des vingt-six Chapitres qui composent ce premier volume; il y reste d'importantes lacunes et des imperfections nombreuses que je ne me dissimule pas. En comparant ce que j'ai pu faire avec le plan que je m'étais tracé, je sais mieux que personne combien je suis resté loin du but que j'aurais voulu atteindre. Je voudrais pouvoir offrir aux jeunes géomètres le moyen d'étudier les travaux des maîtres de la science sans être jamais arrêtés par l'ignorance des principes sur lesquels ils reposent; mais un tel programme s'étendrait presque sans limites, et j'ai dû me borner, dans la mesure de mes forces et de mon érudition, à aplanir pour eux les premiers pas. On peut faire beaucoup mieux sans doute, mais sans parvenir, j'en ai la conviction, à surmonter toutes les difficultés. Peut-être même aurait-on tort de le regretter; rien ne peut suppléer à l'étude directe des grands maîtres, et en aidant les jeunes gens à s'en affranchir trop longtemps, il pourrait arriver qu'en facilitant leurs études, on retardât chez eux, pour bien longtemps peut-être, le développement de l'esprit d'invention.

J. BERTRAND.

TRAITÉ

DE

CALCUL DIFFÉRENTIEL

ET

DE CALCUL INTÉGRAL.

PREMIÈRE PARTIE.

CALCUL DIFFÉRENTIEL.

LIVRE PREMIER.

ÉTUDE DES DIFFÉRENTIELLES ET DES DÉRIVÉES.

CHAPITRE PREMIER.

INFINIMENT PETITS DES DIFFÉRENTS ORDRES, LEUR USAGE EN GÉOMÉTRIE.

Définitions.

1. On nomme *infiniment petit* ou *quantité infiniment petite*, un nombre ou une grandeur variable qui diminue indéfiniment et s'approche autant qu'on veut d'une limite nulle, sans jamais l'atteindre.

Lorsque l'on considère simultanément plusieurs infiniment petits, on choisit arbitrairement l'un d'entre eux comme *infiniment petit principal ;* cela fait, on adopte les définitions suivantes.

On nomme *infiniment petit du premier ordre* tout infiniment petit dont le rapport

à l'infiniment petit principal tend vers une limite finie lorsqu'ils s'approchent tous deux indéfiniment de zéro.

On nomme *infiniment petit du second ordre* tout infiniment petit dont le rapport au carré de l'infiniment petit principal tend vers une limite finie.

On nomme en général *infiniment petit de l'ordre n* un infiniment petit dont le rapport à la puissance $n^{ième}$ de l'infiniment petit principal a une limite finie.

Il ne faut pas croire que tout infiniment petit soit nécessairement d'un ordre déterminé; nous rencontrerons en effet des infiniment petits tels, qu'aucune puissance de l'un d'eux ne soit du même ordre que l'autre. Soient α et β de tels infiniment petits : le rapport $\frac{\alpha}{\beta}$ ne peut pas avoir une limite finie, car sans cela ils seraient de même ordre. Lorsque cette limite est nulle, on dit que l'*ordre* de α est supérieur à celui de β, et c'est le contraire si la limite est infinie.

Il résulte évidemment des définitions précédentes que si deux infiniment petits α et β sont l'un de l'ordre n et l'autre de l'ordre n', leur produit $\alpha\beta$ est de l'ordre $n + n'$.

2. Soit $\varphi(x)$ une fonction quelconque d'une variable x; si l'on donne à x un accroissement infiniment petit h, que nous regardons comme infiniment petit principal, l'accroissement infiniment petit correspondant de la fonction, $\varphi(x+h) - \varphi(x)$, est un infiniment petit de premier ordre, et il ne peut y avoir exception que pour des valeurs particulières de la variable x.

Si, en effet, il en était autrement, le rapport $\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h}$ aurait, pour chaque valeur de x, une limite nulle ou infinie. Je dis que ces deux hypothèses sont inadmissibles.

Supposons d'abord que le rapport considéré ait constamment pour limite zéro, lorsque x reste compris entre certaines limites. Soient a et b deux valeurs de x choisies arbitrairement entre ces limites; partageons l'intervalle $b - a$ en n parties égales et nommons h la valeur $\frac{b-a}{n}$ de chacune de ces parties; posons :

$$(1)\qquad \begin{aligned} \frac{\varphi(a+h) - \varphi(a)}{h} &= E_1, \\ \frac{\varphi(a+2h) - \varphi(a+h)}{h} &= E_2, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\varphi(a+nh) - \varphi[a+(n-1)h]}{h} &= E_n. \end{aligned}$$

Si n augmente indéfiniment, h tend vers zéro, et d'après notre hypothèse il en est de même de $E_1, E_2, \ldots, E_n$. Cela posé, ajoutons membre à membre toutes les équations (1) après avoir multiplié par h les deux membres de chacune d'elles; nous aurons

$$\varphi(a+nh) - \varphi(a) = \varphi(b) - \varphi(a) = h(E_1 + E_2 + \ldots + E_n).$$

Soit η la plus grande en valeur absolue des quantités $E_1, E_2, \ldots, E_n$ (η est infiniment petit), nous pouvons conclure de l'égalité précédente que $\varphi(b) - \varphi(a)$ est plus petit en valeur absolue que le produit $h.n\eta$, c'est-à-dire (à cause de $nh = b - a$), que cette différence $\varphi(b) - \varphi(a)$ est moindre en valeur absolue que le produit $\eta(b-a)$ et comme η est infiniment petit, il est impossible que la différence $\varphi(b) - \varphi(a)$, qui ne dépend nullement de h, ait une valeur finie quelconque; cette différence est donc nulle, deux valeurs de la fonction φ, choisies arbitrairement, sont donc égales entre elles, par conséquent cette fonction est constante.

Il est démontré par là que les accroissements d'une fonction qui ne se réduit pas à une constante ne peuvent pas être des infiniment petits d'un ordre supérieur aux accroissements correspondants de la variable, si ce n'est toutefois pour des valeurs exceptionnelles de cette variable. On peut en conclure immédiatement que le rapport

$$\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h}$$

ne peut pas non plus croître indéfiniment lorsque h tend vers zéro, ou, en d'autres termes, que l'accroissement h de la variable ne peut pas être un infiniment petit d'ordre supérieur à l'accroissement de la fonction.

Un peu de réflexion fait apercevoir l'identité de cet énoncé avec le précédent. Quand on considère, en effet, à la fois une fonction $\varphi(x)$ et la variable x dont elle dépend, rien n'empêche de désigner cette fonction par une lettre y et de regarder y comme une variable dont x est une fonction $\psi(y)$. Cette vérité acquiert une complète évidence si l'on regarde $\varphi(x)$ comme l'ordonnée d'une courbe ayant pour équation $y = \varphi(x)$: cette courbe étant construite, il est clair que l'on peut regarder l'abscisse de l'un de ses points comme fonction de l'ordonnée, tout aussi bien que l'ordonnée comme fonction de l'abscisse; et du moment qu'il est prouvé, d'une manière générale, que l'accroissement infiniment petit de l'une de ces quantités ne peut être d'un ordre supérieur à celui de l'autre, la proposition s'applique nécessairement à l'un et à l'autre, et l'on doit en conclure que les deux accroissements sont de même ordre.

3. Quelle que soit la fonction $\varphi(x)$, le rapport $\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h}$ a, d'après ce qui précède, une limite finie lorsque h tend vers zéro; cette limite est une nouvelle

fonction de x que l'on nomme la *dérivée de la fonction* φ; on la représente souvent en marquant d'un accent le signe de cette fonction.

$\varphi'(x)$ est la dérivée de $\varphi(x)$.

La recherche et l'étude des dérivées ont une grande importance dans le calcul infinitésimal; nous y consacrerons plusieurs chapitres. Notre seul but en ce moment est de donner quelques exemples d'infiniment petits de divers ordres.

Nous indiquerons immédiatement quelques conséquences géométriques de la proposition précédente.

4. *Si les coordonnées des points d'une courbe s'expriment en fonction d'une variable* α, *ce qui pour une courbe quelconque peut évidemment être réalisé d'une infinité de manières, la distance de deux points infiniment voisins de la courbe est un infiniment petit de même ordre que la différence des valeurs de* α *auxquelles ils correspondent.*

Si l'on nomme en effet x et y les coordonnées de l'un des points, et $x+h$, $y+k$ les coordonnées de l'autre, δ désignant l'accroissement de α, puisque x et y sont fonctions de α, il résulte du théorème général que leurs accroissements h et k sont l'un et l'autre de même ordre que δ. Or on a

$$\frac{\sqrt{h^2+k^2}}{\delta}=\sqrt{\left(\frac{h}{\delta}\right)^2+\left(\frac{k}{\delta}\right)^2},$$

et par conséquent ce rapport a une limite finie, ce qui prouve la proposition énoncée, car $\sqrt{h^2+k^2}$ est la distance des deux points considérés.

La même proposition s'applique aux courbes à double courbure; si x, y, z sont les coordonnées d'un point d'une telle courbe et fonctions toutes trois d'une même variable α, en donnant à α un accroissement infiniment petit δ, x, y, z deviendront $x+h$, $y+k$, $z+l$, et h, k, l seront de même ordre δ. Or on a

$$\frac{\sqrt{h^2+k^2+l^2}}{\delta}=\sqrt{\left(\frac{h}{\delta}\right)^2+\left(\frac{k}{\delta}\right)^2+\left(\frac{l}{\delta}\right)^2},$$

et par conséquent le rapport de la distance de deux points infiniment voisins à l'accroissement correspondant de α a une limite finie.

5. *Si les points d'une courbe correspondent un à un à ceux d'une autre courbe, de telle sorte qu'un point de l'une des courbes étant choisi, son correspondant se trouve déterminé, la distance de deux points infiniment voisins de l'une des courbes est de même ordre que celle des points correspondants sur l'autre.*

Si l'on suppose, en effet, que les coordonnées x, y, z des points de la première courbe soient exprimées en fonctions d'une variable α, les coordonnées x_1, y_1, z_1 du point correspondant de la seconde courbe sont également fonctions de α. Si donc on veut considérer deux points infiniment voisins de l'une des courbes et leurs

correspondants sur l'autre, il suffit d'attribuer à α deux valeurs infiniment voisines, α et $\alpha + \delta$. D'après ce qui précède, les distances des points ainsi obtenus seront l'une et l'autre de même ordre que δ, et par conséquent ce sont des infiniment petits de même ordre.

D'après cela, s'il était démontré, dans un cas particulier, que la distance de deux points infiniment voisins de la seconde courbe est constamment un infiniment petit d'ordre supérieur à la distance des points correspondants de la première, il faudrait conclure que les coordonnées des points de la seconde courbe sont constantes et que celle-ci se réduit à un point.

6. *Si une ligne droite se déplace dans l'espace suivant une loi continue quelconque, de telle sorte que chacune de ses positions corresponde à une valeur attribuée à une variable α, l'angle de deux positions infiniment voisines de cette droite est de même ordre que la différence des valeurs correspondantes de α.*

Pour le démontrer, supposons que par l'origine O des coordonnées on mène des parallèles aux diverses droites considérées, qui évidemment formeront entre elles les mêmes angles que celles-ci. Nous obtiendrons ainsi un cône dont les génératrices répondent aux diverses valeurs de la variable α. Si l'on coupe ce cône par une sphère concentrique dont le rayon soit égal à l'unité, à chaque valeur de α correspondra un point de la courbe d'intersection. Si donc on considère deux valeurs infiniment rapprochées de cette variable, α et $\alpha + \delta$, les points M et M′ qui leur correspondent sur la courbe sont (4) à une distance de même ordre que δ, et par suite, dans le triangle isocèle OMM′, l'angle O est de même ordre que δ, car on a $\sin \frac{O}{2} = \frac{MM'}{2}$.

7. *Si les points d'une surface correspondent, un à un, à ceux d'une autre surface, de telle sorte qu'un point de l'une étant choisi, son correspondant se trouve déterminé sur l'autre, la distance de deux points infiniment voisins de l'une des surfaces est de même ordre que celle de leurs correspondants.*

Considérons, en effet, deux points A et B de la première surface et leurs correspondants P et Q sur la seconde. Supposons que B se rapproche de A en suivant une certaine courbe sur la première surface, Q se rapprochera en même temps de P en suivant une courbe correspondante. Si nous portons exclusivement notre attention sur ces deux courbes, nous rentrons dans le cas examiné plus haut, et nous pouvons conclure de ce qui a été dit (5) que les distances AB et PQ sont des infiniment petits de même ordre.

8. Donnons maintenant un exemple d'infiniment petit du second ordre. Considérons une courbe plane quelconque et la tangente en un point M. Si d'un point M′

situé sur la courbe à une distance infiniment petite du premier ordre de M on abaisse sur cette tangente une perpendiculaire M'P, M'P sera un infiniment petit du second ordre.

Et d'abord il est facile de voir, par la considération du triangle MM'P, que M'P est un infiniment petit d'un ordre supérieur au premier; on a, en effet, dans ce triangle,

$$\frac{M'P}{MM'} = \sin PMM',$$

et comme l'angle PMM' est évidemment infiniment petit, MM' étant du premier ordre, M'P est (1) un infiniment petit d'un ordre supérieur. Il nous reste à prouver que sin PMM' ou, ce qui revient au même, l'angle PMM' est un infiniment petit du premier ordre, car, cela étant, M'P sera le produit de deux infiniment petits du premier ordre et par conséquent du second ordre. Pour faire cette démonstration, considérons la tangente en M' à la courbe donnée, et soit I le point où elle coupe la tangente en M. Si l'on nomme ε l'angle formé par ces deux tangentes, on a évidemment

$$\varepsilon = IMM' + IM'M,$$

en sorte que ε est de même ordre que les angles IMM' et IM'M. Il suffit donc d'établir que cet angle ε est du premier ordre. Or cela résulte de ce qui a été démontré (6). En effet, la direction de la tangente en M est déterminée par l'abscisse du point M; si donc cette abscisse augmente d'une quantité infiniment petite du premier ordre, la tangente s'infléchira de manière à former avec la position voisine un angle du premier ordre, et cet angle est précisément ε.

Nous signalerons une conséquence immédiate de la proposition précédente. Si d'un point O on abaisse une perpendiculaire OP sur une ligne droite AB, et que l'on joigne ensuite le même point O à un point P' de la même ligne infiniment voisin de P, PP' étant considéré comme infiniment petit principal, la différence OP' — OP est du second ordre, car elle est égale à la portion de la ligne OP' comprise entre le cercle décrit du point O comme centre avec OP pour rayon et la tangente à ce cercle qui est précisément PP'.

9. La même proposition s'étend aux courbes à double courbure. Si en un point M d'une courbe à double courbure on mène une tangente à cette courbe, la distance de cette tangente à un point M', situé sur la même courbe et infiniment voisin de

M, est infiniment petite du second ordre, lorsque MM′ est considéré comme infiniment petit principal.

Il est clair, en effet, que la distance d'un point à une droite est de même ordre que celle de la projection du point à celle de la droite sur un plan choisi arbitrairement. On peut donc substituer à la courbe donnée sa projection sur un plan sans altérer l'ordre de la distance qui nous occupe, et par suite, en vertu du théorème relatif aux courbes planes, cette distance est du second ordre.

10. La géométrie nous fournit également des exemples simples d'infiniment petits d'un ordre supérieur au second.

Considérons une courbe plane quelconque et sa tangente en un point M. Si sur cette tangente on porte une longueur infiniment petite MT, et qu'on élève en T une perpendiculaire TM′, terminée en M′ sur la courbe, TM′ sera (8) un infiniment petit du second ordre. Si donc on pose $MT = h$, on aura $TM' = Kh^2$, K ayant une limite finie lorsque h tend vers zéro. Considérons actuellement un cercle de rayon R,

tangent en M à la courbe donnée et situé du même côté qu'elle par rapport à la tangente. Prolongeons la ligne TM′ jusqu'à ce qu'elle rencontre le cercle en M″; on aura, par la propriété connue du cercle,

$$TM'' = \frac{MT^2}{2R - TM''} = \frac{h^2}{2R - TM''},$$

et par suite

$$M'M'' = TM'' - TM' = h^2 \left(\frac{1}{2R - TM''} - K \right).$$

Si donc on détermine R de telle sorte que $\left(\frac{1}{2R - TM''} - K \right)$ ait pour limite zéro, c'est-à-dire, en nommant K_1 la limite de K, si l'on prend $R = \frac{1}{2K_1}$, la distance M′M″ sera un infiniment petit d'un ordre supérieur au second.

Il existe donc, en chaque point d'une courbe plane, un cercle tangent qui dans le voisinage du point de contact est infiniment plus voisin de la courbe que celle-ci ne l'est de la tangente. Ce cercle, qui joue un grand rôle dans l'étude des courbes, se nomme cercle osculateur.

Remarque. — Les théorèmes précédents peuvent être en défaut pour des points exceptionnels; c'est ainsi que le rapport $\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h}$, dont la limite ne peut pas

être constamment nulle, peut tendre vers zéro pour une valeur particulière de la variable.

Substitution des infiniment petits.

11. Lorsqu'on emploie les infiniment petits, c'est presque toujours comme intermédiaires, et ils figurent dans les raisonnements, soit par leurs rapports qui ont des limites finies, soit par la somme d'un nombre indéfiniment croissant d'entre eux. Lorsque l'on a ainsi en vue la recherche de la limite d'un rapport ou de celle d'une somme, on peut souvent simplifier la question à l'aide du principe suivant :

Dans la recherche de la limite d'un rapport ou de la limite d'une somme, on peut remplacer un infiniment petit par un autre dont le rapport au premier ait pour limite l'unité.

Soient, en effet, α et β deux infiniment petits, et α', β' deux autres, tels que

$$\lim \frac{\alpha}{\alpha'} = 1, \quad \lim \frac{\beta}{\beta'} = 1,$$

on a identiquement

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha'}{\beta'} \cdot \frac{\alpha}{\alpha'} \cdot \frac{\beta'}{\beta},$$

et en passant à la limite, puisque $\frac{\alpha}{\alpha'}$ et $\frac{\beta}{\beta'}$ ont pour limite l'unité,

$$\lim \frac{\alpha}{\beta} = \lim \frac{\alpha'}{\beta'}.$$

Soit maintenant

$$\text{(A)} \qquad \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$$

une somme d'infiniment petits dont le nombre n augmente indéfiniment, à mesure qu'ils tendent vers zéro, de telle sorte que la somme converge vers une limite finie. Soient β_1, β_2, ..., β_n d'autres infiniment petits, tels que

$$\lim \frac{\alpha_1}{\beta_1} = 1, \quad \lim \frac{\alpha_2}{\beta_2} = 1, \ldots, \quad \lim \frac{\alpha_n}{\beta_n} = 1.$$

Je dis que la somme (A) aura même limite que la somme

$$\text{(B)} \qquad \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n.$$

Soient, en effet,

$$\frac{\beta_1}{\alpha_1} = 1 + \varepsilon_1, \quad \frac{\beta_2}{\alpha_2} = 1 + \varepsilon_2, \ldots, \quad \frac{\beta_n}{\alpha_n} = 1 + \varepsilon_n,$$

ε_1, ε_2, ..., ε_n, étant par hypothèse des infiniment petits. On déduit de ces équations

$$\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n + \alpha_1 \varepsilon_1 + \alpha_2 \varepsilon_2 + \ldots + \alpha_n \varepsilon_n.$$

Soit η la plus plus grande en valeur absolue des quantités $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ (η est infiniment petit), il est clair que la différence

$$\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n - (\alpha_1 + \alpha_2 \ldots + \alpha_n)$$

est moindre que

$$\eta\,(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n).$$

Or η tend vers zéro, et le second facteur a par hypothèse une limite finie, en sorte que les deux sommes (A) et (B) ont même limite.

12. Pour que deux infiniment petits α et β puissent être substitués l'un à l'autre, il suffit, d'après ce qui précède, que la limite du rapport $\frac{\beta}{\alpha}$ soit l'unité, en d'autres termes, il suffit que l'on ait

$$\frac{\beta}{\alpha} = 1 + \varepsilon,$$

ε étant infiniment petit, ou, ce qui revient au même,

$$\beta - \alpha = \alpha\varepsilon,$$

c'est-à-dire que la différence $\beta - \alpha$ soit infiniment petite par rapport à α. Le théorème (11) peut donc être énoncé comme il suit :

Deux infiniment petits α et β peuvent être substitués l'un à l'autre, et l'on peut négliger leur différence, soit dans la recherche d'une limite de rapport, soit dans celle d'une limite de somme, pourvu que cette différence soit infiniment petite par rapport à l'un d'eux.

Ce théorème, quelle que soit la forme que l'on donne à son énoncé, est d'un grand usage dans le calcul infinitésimal.

Emploi des infiniment petits dans la solution de quelques problèmes. Détermination de la tangente à quelques courbes.

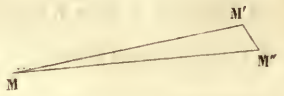
13. Nous montrerons immédiatement l'utilité des infiniment petits dans la solution de plusieurs problèmes de géométrie, et nous déterminerons d'abord la tangente à quelques courbes.

Pour déterminer en un point la tangente à une courbe, il faut, comme on sait, joindre le point de contact donné à un point voisin situé sur la même courbe, et chercher la limite de la direction ainsi définie lorsque le second point se rapproche indéfiniment du premier : en d'autres termes, et plus brièvement, il faut joindre le point de contact donné au point *infiniment voisin* de la courbe, l'expression *infiniment voisin* exprimant suffisamment le rapprochement indéfini de deux points considérés.

Le théorème suivant est souvent fort utile pour la détermination des tangentes.

Si l'on considère un point M d'une courbe et un point M′ situé sur la même courbe à une distance infiniment petite du premier ordre de M, la direction limite de MM′ ne change pas lorsqu'on substitue au point M′ un autre point M″, situé hors de la courbe, mais à une distance de M′ infiniment petite d'ordre supérieur au premier.

Considérons, en effet, le triangle MM′M″.



Les côtés de ce triangle étant proportionnels aux sinus des angles opposés, on a

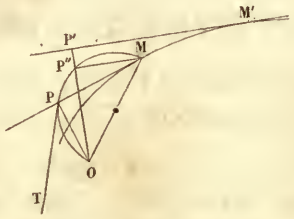
$$M'M'' = MM' \frac{\sin M}{\sin M''}.$$

Si donc M′M″ est, comme on l'a supposé, infiniment petit d'ordre supérieur à MM′, sin M est nécessairement infiniment petit; il en est donc de même de l'angle M, et par suite les deux directions MM′, MM″, se confondent à la limite. C'est précisément ce qu'il fallait démontrer.

14. Nous appliquerons le principe précédent à la solution de quelques problèmes.

Problème Ier. — *On abaisse d'un point fixe* O *des perpendiculaires sur les tangentes d'une courbe plane; trouver la tangente à la courbe lieu des pieds de ces perpendiculaires.*

Soient OP, OP′ les perpendiculaires abaissées du point O, sur les tangentes en deux points voisins M et M′, la ligne PP′ est (5) un infiniment petit de même ordre que MM′, que nous regarderons comme l'infiniment petit principal. D'après



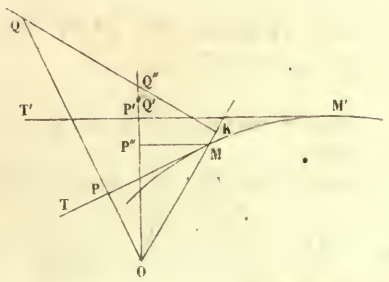
cela, dans la détermination de la direction PP′, on peut substituer au point P′ un autre point qui en soit (13) à une distance infiniment petite du second ordre. Menons donc par le point M une parallèle à la tangente M′P′; cette parallèle coupe OP′ en un point P″, qui peut être substitué à P′, car P′P″ est égal à la distance de M à la tangente en M′ et est (8) infiniment petit du second ordre. Mais les points P et P″ sont situés sur une circonférence de cercle décrite sur OM comme diamètre;

la direction PP″ a donc pour limite la tangente à cette circonférence. La tangente cherchée est donc également tangente au cercle qui passe par les points O, M, P, et la perpendiculaire à la tangente que l'on nomme la *normale* s'obtiendra par conséquent en joignant le point P au milieu de OM.

On peut remarquer que les rayons vecteurs OM et OP, menés du point O aux deux courbes lieux des points M et P, les coupent l'une et l'autre sous des angles OMP et OPT qui sont égaux comme ayant même mesure dans le cercle MPO.

PROBLÈME II. — *On abaisse d'un point* O *des perpendiculaires sur les tangentes d'une courbe plane, et l'on prolonge chaque perpendiculaire* OP *jusqu'en un point* Q, *tel que* $OP \cdot OQ = a^2$, *a étant une constante ; trouver la tangente à la courbe lieu des points* Q.

Soient Q et Q′ deux points infiniment voisins du lieu considéré et correspondant à deux tangentes MT, M′T′ dont les points de contact sont M et M′. On sait (5) que la distance QQ′ est infiniment petite de même ordre que MM′, que nous prendrons pour infiniment petit principal. Menons par le point M, comme dans la solution du problème précédent, une parallèle MP″ à la tangente M′P′, et nommons P″



le point où cette parallèle coupe OP′. P′P″ sera, comme on l'a remarqué (8), infiniment petit du second ordre. Déterminons ensuite un point Q″ tel, que $OP'' \cdot OQ'' = a^2$; Q′Q″ sera infiniment petit du second ordre, car OQ′ est une fonction de OP′, et OQ″ est la même fonction de OP″; on passe donc de l'une de ces lignes à l'autre en attribuant à la variable OP′, dans cette fonction, l'accroissement infiniment petit du second ordre P′P″, et la fonction s'accroît alors (2) d'une quantité Q′Q″ infiniment petite du même ordre, c'est-à-dire du second.

D'après cela, on peut substituer au point Q′ le point Q″, et la tangente cherchée est la direction limite de QQ″. Or les points P et P″ sont situés sur la circonférence de cercle décrite sur OM comme diamètre, et l'on sait qu'en portant sur les cordes d'un cercle issues de l'extrémité d'un diamètre des longueurs inversement proportionnelles à ces cordes elles-mêmes, le lieu des points obtenus est une ligne droite perpendiculaire à ce diamètre. Les points Q et Q″ sont donc sur une droite perpendiculaire à OM, et la tangente cherchée est par conséquent la perpendiculaire

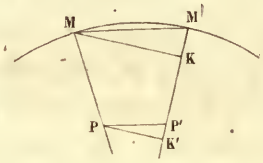
QK, abaissée du point Q sur OM. Les triangles OQK, OMP étant évidemment semblables, on a

$$OM.OK = OP.OQ = a^2,$$

et il en résulte qu'en opérant sur la courbe lieu des points Q, comme on l'a fait sur la courbe proposée, on reproduirait cette courbe même, en sorte que les deux courbes peuvent être regardées comme conjuguées.

PROBLÈME III. — *Sur les normales à une courbe plane on porte une longueur constante à partir du point où chaque normale perce la courbe; trouver la tangente au lieu des points ainsi obtenus.*

Soient M et M′ deux points infiniment voisins de la courbe donnée, et P, P′ les points correspondants que l'on en déduit, de telle sorte que MP, M′P′ étant deux



normales, on ait $MP = M'P' = l$. Joignons MM′ et PP′ et abaissons des points M et P des perpendiculaires MK et PK′ sur M′P′, on aura

$$KK' = MP \cos\varphi = l\cos\varphi,$$

φ étant l'angle de deux normales considérées; on en déduit

$$M'P' - KK' = M'K - P'K' = l(1 - \cos\varphi) = 2l\sin^2\frac{\varphi}{2}.$$

L'angle φ étant (6) infiniment petit du premier ordre, M′K − P′K′ est, d'après cela, infiniment petit du second ordre. Or on a $M'K = MM'\cos MM'K$; MM′ est infiniment petit du premier ordre, l'angle MM′K est infiniment peu différent d'un droit, donc M′K est infiniment petit d'un ordre supérieur au premier; il en est donc de même de P′K′, dont la différence avec M′K est du second ordre. Mais on a

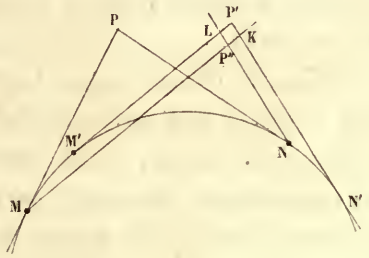
$$P'K' = PP'\cos PP'K,$$

et il faut par conséquent de deux choses l'une, ou que PP′ soit infiniment petit d'un ordre supérieur au premier, ou que PP′K diffère infiniment peu d'un angle droit. Dans la première hypothèse (5), la courbe se réduit à un point, et par suite la ligne MM′ est un cercle de rayon l; dans la seconde hypothèse, qui, dans le cas général, est la seule admissible, l'angle PP′K étant droit à la limite, PP′ est perpendiculaire à K′P′, c'est-à-dire à M′P′ qui à la limite ne diffère pas de MP, la tangente à la courbe lieu des points P est par conséquent parallèle à la tangente au point correspon-

dant de la courbe proposée, les deux courbes ont donc les mêmes normales, et sont dites des *courbes parallèles*.

PROBLÈME IV. — *Un angle de grandeur constante est circonscrit à une courbe donnée ; trouver la tangente à la courbe lieu des positions de son sommet.*

Soient P un des points du lieu, M et N les points de contact correspondants des deux tangentes qui s'y rencontrent; P′ un second point du lieu infiniment voisin de P, M′ et N′ les points de contact qui correspondent à ce second point. Les coordonnées du point P étant des fonctions déterminées de l'abscisse du point M, les distance PP′ et MM′ sont (5) des infiniment petits de même ordre; nous les regarderons comme du premier ordre. Cela posé, menons par les points M et N des parallèles aux tangentes en M′ et N′, nous obtiendrons un parallélogramme P″KP′L



dont les côtés sont (8) infiniment petits du second ordre, et l'on pourra (13) substituer à P′ le sommet opposé P″ de ce parallélogramme. Mais P et P″ sont situés sur un segment capable de l'angle P décrit sur MN comme corde, et PP″ est à la limite tangente à ce segment, d'où l'on conclut que la courbe cherchée a la même tangente en P que ce segment, lequel est circonscrit au triangle MNP.

PROBLÈME V. — *Déterminer la tangente à la cycloïde.*

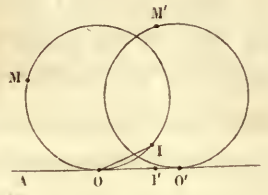
La cycloïde est une courbe fort remarquable; nous la prendrons souvent pour exemple de l'application des méthodes générales. Commençons par donner sa définition.

La cycloïde est engendrée par un point d'une circonférence qui roule sans glisser sur une de ses tangentes supposée fixe (*).

Soient OM une position du cercle générateur, et M la position du point qui décrit

(*) On dit qu'une courbe mobile roule *sans glisser* sur une ligne fixe, lorsque cette courbe se déplace en restant constamment tangente à la ligne fixe qu'elle vient toucher par ses différents points et suivant une loi telle, que chaque arc de courbe mobile soit égal en longueur à l'arc de la ligne fixe sur lequel ses points se sont successivement appliqués. Il résulte de raisons physiques qui ne seraient pas ici à leur place, qu'une roue de voiture roule à très-peu près sans glisser sur le sol, et que, celui-ci étant rectiligne, la courbe décrite par un point de la roue est une cycloïde.

la cycloïde. Considérons le cercle dans une position voisine O′M′, le point M étant transporté en M′ et l'arc OI s'étant appliqué sur la droite d'égale longueur OO′; de telle sorte que OO′ soit égal à la différence O′M′ — OM.



Le point I de la circonférence MOI devant, par suite du mouvement, venir se placer en O′, pour servir de point de contact à la droite et au cercle; on peut faire passer la circonférence MO de sa position actuelle à la position nouvelle O′M′, à l'aide de trois mouvements successifs.

1° Une rotation autour du point de contact actuel O, et dont l'angle égal à IOO′ soit tel, que le point I vienne se placer en I′ sur la droite OO′.

2° Par suite de ce premier mouvement, la circonférence mobile est devenue sécante à la droite AOO′ sur laquelle elle détache la corde OI′; une rotation égale à la première et effectuée autour du point I′ la rendra de nouveau tangente à cette droite.

3° Pour amener enfin la circonférence mobile dans la position désirée, il suffit de faire parcourir à tous les points des droites égales et parallèles à I′O′, de manière à amener en O′ le point primitivement placé en I, qui sera alors évidemment le point de contact de la droite et du cercle.

Le point M pour venir occuper la position M′, qui est celle d'un point voisin sur la cycloïde, aura donc parcouru deux arcs de cercle de même angle ayant respectivement leurs centres en O et en I′ et une droite égale et parallèle à I′O′.

On voit tout d'abord que cette dernière droite I′O′, égale à la différence entre un arc infiniment petit et sa corde, est infiniment petite du troisième ordre (*), et n'influe pas par conséquent (13) sur la direction limite de MM′.

Quant aux deux arcs de cercle, leurs normales étant dirigées vers les points infiniment voisins O et I′, l'angle sous lequel ils se réunissent tend vers zéro, et la ligne qui réunit la première extrémité de l'un à la seconde extrémité de l'autre a pour direction limite une perpendiculaire à la normale commune, c'est-à-dire à la ligne MO.

(*) On démontre, en étudiant la trigonométrie, que la différence entre un arc et son sinus est moindre que le sixième du cube de l'arc, et la différence entre l'arc et sa corde est double de l'excès de l'arc moitié moindre sur le sinus correspondant.

La normale à la cycloïde est donc dirigée vers le point où le cercle générateur touche la droite sur laquelle il roule.

Détermination de quelques plans tangents.

15. Le plan tangent d'une surface en un point est le plan qui, en ce point, contient les tangentes à toutes les courbes tracées sur la surface. Démontrons d'abord l'existence d'un tel plan. Soient M un point pris sur une surface donnée, et MP, MQ deux courbes quelconques qui se croisent en M sur cette surface; je dis que les tangentes à ces courbes sont dans un même plan avec la tangente à une troisième courbe MR menée arbitrairement sur la même surface. Considérons, en effet, cette troisième courbe MR comme la position limite d'une courbe R′R″ constamment située sur la surface et qui, coupant MP et MQ respectivement en A et B, s'approche d'une manière continue de sa position limite MR. Les droites MA, MB et AB sont toujours dans un même plan, qui est celui des trois points M, A, B; leurs directions limites sont donc aussi dans un même plan; or la limite de MA est la tangente à la courbe MP, celle de MB la tangente à la courbe MQ, et AB, réunissant deux points infiniment voisins de la courbe R′R″, est à la limite tangente à cette courbe, c'est-à-dire à MR. Le théorème est donc démontré. On voit cependant qu'il peut souffrir quelques exceptions en des points singuliers, parce que la ligne qui réunit deux points infiniment voisins d'une courbe n'est pas nécessairement tangente lorsque l'un de ces points n'est pas fixe; il pourra donc arriver que la ligne AB ne soit pas, à la limite, tangente à MR. Une pareille exception n'indique pas du reste une imperfection de la démonstration, car le théorème étant en défaut dans quelques cas singuliers, il faut bien que la démonstration laisse voir la possibilité de ces cas exceptionnels.

16. Le plan tangent à une surface S est à une distance infiniment petite du second ordre de tout point M′ de la même surface situé à une distance infiniment petite du premier ordre de son point de contact M. Si l'on conçoit en effet un plan P mené suivant la droite MM′ et perpendiculaire au plan tangent en M, ce plan coupera la surface S suivant une courbe MM′, et la distance du point M′ au plan tangent en M est évidemment la même que la distance à la tangente à cette courbe MM′; elle est par conséquent (8) infiniment petite du second ordre.

17. Pour déterminer le plan tangent à une surface en un point M situé sur la surface, il faut considérer avec ce point M deux autres points infiniment voisins, N et P, et chercher la limite du plan MNP. MN et MP sont, en effet, à la limite, des tangentes à deux courbes tracées sur la surface et par suite leur plan est le plan tangent en M.

On verra, absolument comme (13), que les points N et P étant supposés situés à des distances infiniment petites du premier ordre de M, on peut leur substituer d'autres points N′ et P′ tels, que NN′ et PP′ soient infiniment petits d'un ordre supérieur. Une telle substitution n'altérant pas la direction limite des droites MN et MP, ne change pas non plus la limite du plan MNP.

PROBLÈME I. — *On abaisse d'un point* O *des perpendiculaires sur les plans tangents d'une surface donnée; trouver le plan tangent à la surface lieu des pieds de ces perpendiculaires.*

Soient OP la perpendiculaire abaissée du point O sur le plan tangent en A, OQ et OR, les perpendiculaires respectivement abaissées du même point O sur les plans tangents aux points B et C, infiniment voisins de A. P, Q, R sont trois points infiniment voisins de la surface considérée, et le plan qui les contient est à la limite le plan tangent cherché.

Si les distances AB, AC sont infiniment petites du premier ordre, il en sera de même (7) des distances PQ, PR, et par conséquent on peut substituer aux deux points Q et R d'autres points Q_1 et R_1 tels, que QQ_1 et RR_1 soient infiniment petits du second ordre.

Nous obtiendrons ces points Q_1 et R_1 en menant par le point A des plans parallèles aux plans tangents en B et C et abaissant sur ces plans des perpendiculaires OQ_1, OR_1 : chacun de ces nouveaux plans est, en effet (16), à une distance infiniment petite du second ordre du plan tangent auquel il est parallèle, et la perpendiculaire commune à ces plans les coupe en deux points que l'on peut substituer l'un à l'autre; le plan tangent cherché est donc la limite du plan PQ_1R_1 lorsque les points Q_1 et R_1 se rapprochent indéfiniment du point P. Mais le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées du point O sur *tous* les plans possibles menés par le point A est une sphère décrite sur OA comme diamètre, et le plan PQ_1R_1 qui passe par trois points infiniment voisins de cette sphère, lui est tangent à la limite, en sorte que le plan tangent cherché est tangent en P à la sphère décrite sur OA comme diamètre.

PROBLÈME II. — *On abaisse d'un point fixe* O *des perpendiculaires sur les plans tangents à une surface, et l'on prolonge chaque perpendiculaire* OP *jusqu'en un point* Q *tel, que le produit* OP.OQ *soit égal à un carré donné* a^2; *trouver le plan tangent à la surface lieu des points* Q.

Par des raisonnements tout semblables à ceux qui ont servi dans la solution du problème précédent, on trouvera que le plan tangent demandé au point Q est perpendiculaire sur la droite OA qui joint le point O au point de contact du plan tangent sur lequel OQ est perpendiculaire et qu'il coupe le rayon OA en un point B, tel, que $OA.OB = a^2$, en sorte que la surface proposée et la surface lieu des points Q

peuvent être considérées comme conjuguées, c'est-à-dire qu'en opérant sur la seconde comme on l'a fait sur la première, on reproduirait précisément celle-ci.

Nous ne développerons pas les raisonnements qui ne peuvent offrir aucune difficulté à ceux qui ont bien compris le commencement de ce chapitre.

PROBLÈME III. — *Une surface* S *étant donnée, on détermine une seconde surface* S′ *dont chaque point se déduit de l'un des plans tangents à la surface* S, *à l'aide d'une certaine construction* bien déterminée. *On demande de déterminer le plan tangent en un point de la surface* S′.

Soient A un point de la surface S, MN le plan tangent en ce point, et P le point de la surface S′ déduit du plan MN par la construction convenue.

Le plan tangent cherché passe par le point P et par deux points, Q et R, déterminés à l'aide de la même construction appliquée aux plans qui touchent la surface S en deux points B et C infiniment voisins de A. Or on peut, à ces plans tangents aux points B et C, substituer les plans parallèles menés par le point A, qui en sont (16) situés à des distances infiniment petites du second ordre, et remplacer Q et R par les points Q_1 et R_1 déduits de ces nouveaux plans. Il est clair, en effet, que les coordonnées de l'un de ces points, quelle que soit la construction qui le donne, dépendent des coefficients de l'équation du plan dont on le déduit, et que ces coefficients subissant un changement infiniment petit du second ordre, le changement correspondant des coordonnées est un infiniment petit (2) de même ordre.

Mais les points P, Q_1, R_1, sont trois points infiniment voisins, situés sur la surface lieu des points déduits à l'aide de la construction convenue *de tous les plans* menés par le point A; le plan tangent cherché n'est donc autre chose que le plan tangent à cette dernière surface.

On voit, d'après cela, que le plan tangent à la surface S′ pourra se déterminer en substituant aux plans tangents à la surface S des plans passant par un point fixe. Cette substitution fait disparaître la difficulté provenant de la nature plus ou moins compliquée de la surface donnée.

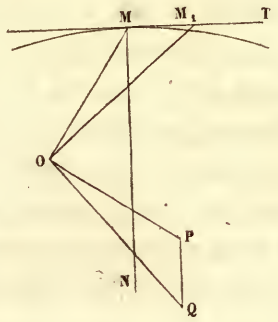
Cette remarque générale comprend implicitement la solution des problèmes I et II et celle d'une infinité d'autres du même genre. Il faut bien remarquer toutefois que la construction, entièrement arbitraire d'ailleurs, à l'aide de laquelle s'obtiennent les points du lieu considéré, doit être indépendante de la position du point de contact.

Si, par exemple, on abaisse d'un point O une perpendiculaire OP sur le plan tangent à une surface donnée, et que l'on porte, sur cette perpendiculaire, une longueur OQ égale à la distance OM du point O au point de contact, le plan tangent au lieu des points Q ainsi définis ne peut pas s'obtenir à l'aide de la remarque précédente, parce que la position de ce point Q ne dépend pas seulement de celle du

plan tangent qui a servi à le déterminer, mais aussi de celle du point M où ce plan touche la surface.

PROBLÈME IV. — *D'un point fixe* O, *on mène à un point quelconque* M *d'une surface donnée* S, *un rayon vecteur* OM, *par le point* M *on mène la normale* MN *à la surface* S, *et par le point* O, *dans le plan* OMN, *une droite* OP *perpendiculaire et égale en longueur* OM. *On demande le plan tangent à la surface* Σ *lieu des points* P.

Soit MT la projection de OM sur le plan tangent en M à la surface S. Cette ligne est évidemment tangente à la courbe d'intersection de la surface S par le plan OMN. Supposons que le point M se déplace sur cette courbe, on pourra admettre, en négligeant les infiniment petits du second ordre, qu'il se transporte en un point M_1 situé sur MT. Si la normale en M_1 à la surface S était située dans le plan OMN, le point correspondant de la surface Σ serait situé dans le même plan à l'extrémité d'une droite PQ, perpendiculaire et égale en longueur à MM_1. Il est clair, en effet, que les triangles OMM_1 et OPQ seraient égaux et auraient les côtés perpendiculaires. Mais les deux points M et M_1 étant situés sur la surface S, à une distance in-



finiment petite du premier ordre l'un de l'autre, la normale en M_1 fera en général un angle infiniment petit du premier ordre avec la normale en M et aussi avec le plan OMN; le point P_1 de la surface Σ qui correspond à M_1, ne coïncidera donc pas avec Q, il s'obtiendra en élevant une droite OP_1 égale et perpendiculaire à OM_1, dans un plan passant par OM_1 et formant avec le plan OMNPQ un angle infiniment petit, et il est clair que pour obtenir cette droite il suffit de faire tourner OQ, sans changer sa longueur, d'un angle infiniment petit autour de OM_1; mais, dans cette rotation, le point Q décrit un arc de cercle infiniment petit QP_1 qui peut, si on néglige les infiniment petits du second ordre, être remplacé par sa tangente, laquelle est perpendiculaire au plan $QPOMM_1$, et par suite le plan P_1QP est perpendiculaire à MT, et il en est de même de la ligne PP_1 qui, réunissant deux points infiniment voisins de la surface Σ, est tangente à cette surface.

Nous allons montrer qu'une seconde tangente de la surface Σ est perpendiculaire à MT.

Pour trouver cette seconde tangente, supposons que le point M se déplace sur la surface S et vienne en un point que nous nommerons M_2, situé à l'extrémité d'une perpendiculaire de longueur infiniment petite MM_2, élevée en M au plan OMM_1. Le point M_2 ainsi défini peut être considéré, aux infiniment petits du second ordre près, comme appartenant à la surface S, car la ligne MM_2 étant perpendiculaire au plan OMN, est aussi perpendiculaire à la normale MN et par suite située dans le plan tangent.

Pour construire le point de la surface Σ qui correspond à M_2, il faut joindre OM_2 et élever au point O, dans le plan inconnu qui passe par OM_2 et par la normale M_2N_2 à la surface S, une perpendiculaire à OM_2 égale en longueur à cette ligne. Quelle que soit la direction inconnue de la normale M_2N_2, cette perpendiculaire, que nous nommerons OP_2, est située dans le plan Π, mené par le point O perpendiculairement à OM_2; or ce plan contient OP, et forme avec le plan POM un angle infiniment peu différent d'un droit; d'ailleurs on a (8), en négligeant les infiniment petits du second ordre,

$$OM_2 = OM,$$

et par suite

$$OP_2 = OP.$$

P_2 et P sont donc sur la circonférence d'un cercle décrit du point O comme centre dans le plan Π dont nous avons parlé; par suite, la ligne infiniment petite PP_2 est, dans ce plan, perpendiculaire au rayon OP, et comme le plan Π fait avec le plan POM un angle infiniment peu différent d'un droit, la direction PP_2 est, à la limite, perpendiculaire au plan POM, et par suite, comme nous l'avions annoncé, perpendiculaire à MT.

Nous avons donc trouvé deux tangentes à la surface Σ, toutes deux perpendiculaires à MT; par conséquent le plan tangent cherché, qui les contient toutes deux, est lui-même perpendiculaire à MT.

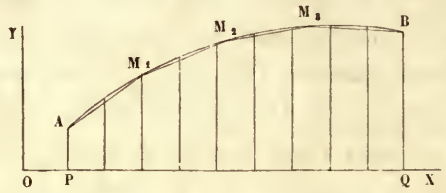
On peut faire au sujet du théorème précédent une remarque curieuse. Les deux surfaces S et Σ sont réciproques l'une de l'autre : c'est-à-dire que si, considérant la surface Σ comme donnée, on opère sur elle comme on l'a fait sur la surface S, on reproduira précisément celle-ci. En menant, en effet, le rayon vecteur OP, puis par le point P la normale à la surface Σ, cette normale est parallèle à MT; le plan qui contient ces deux lignes est donc précisément POM, et dans ce plan, la perpendiculaire menée à OP par le point O est OM; si l'on porte sur elle une longueur égale à OP, on obtient le point M.

Longueur de quelques arcs de courbe.

18. Dans l'évaluation d'une somme d'infiniment petits on peut, sans altérer la limite (11), négliger les infiniment petits d'ordre plus élevé que chacun de ceux que

l'on considère. Ce principe est fréquemment employé dans le calcul infinitésimal. Nous en donnerons dès à présent l'application à la détermination de la longueur de quelques arcs de courbe.

Nous regarderons la longueur d'un arc de courbe comme la limite dont s'approche le périmètre d'un polygone inscrit lorsque ses côtés diminuent indéfiniment. Il est facile de voir que cette définition est légitime et que la limite ne dépend pas de la loi suivant laquelle on fait augmenter le nombre des côtés du polygone inscrit.



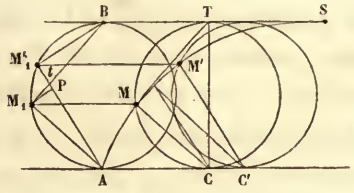
Soit, en effet, AB un arc de courbe. Rapportons-le à deux axes rectangulaires OX, OY, et partageons en un nombre infiniment grand de parties égales la portion PQ de l'axe des X sur laquelle il se projette. Si l'on inscrit dans l'arc AB deux polygones différents se terminant l'un et l'autre aux points A et B, les limites des périmètres de ces polygones seront égales, car les portions infiniment petites comprises entre deux parallèles à l'axe des Y menées par deux points de division consécutifs ont un rapport dont la limite est l'unité. Ces deux portions infiniment petites de polygones ont, en effet, mêmes projections sur l'axe des X, et ces projections sont évidemment égales à la somme des longueurs projetées, multipliée par une valeur moyenne des cosinus des angles formés avec l'axe par les divers côtés ou portions de côtés qui les composent. Mais ces angles diffèrent tous infiniment peu de l'inclinaison sur l'axe de la tangente au point correspondant de l'arc AB. Or des longueurs qui, multipliées par des cosinus finis et infiniment peu différents, donnent le même produit, ont évidemment un rapport dont la limite est l'unité.

19. La différence entre un arc de courbe et sa corde est, d'après ce qui précède, infiniment petite du troisième ordre lorsque l'arc est lui-même infiniment petit du premier ordre.

Pour le démontrer, considérons un arc infiniment petit AMB et sa corde AB. L'arc AMB est, par définition, la limite d'un polygone inscrit dont le nombre de côtés augmente indéfiniment. Si l'on projette chacun de ces côtés sur la corde AB, la somme des projections sera la corde AB elle-même; mais la projection de chaque côté est égale à la longueur de ce côté multipliée par le cosinus de l'angle qu'il forme avec AB, et comme cet angle est infiniment petit du premier ordre, la différence de son cosinus avec l'unité est infiniment petite du second ordre : cela résulte évidemment de la formule $1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{1}{2} x$. Si donc on remplace le polygone

inscrit par sa projection AB, l'erreur commise est égale à la somme de ses côtés multipliés respectivement par des infiniment petits du second ordre; elle est donc égale au périmètre infiniment petit du polygone, multiplié par une moyenne entre des infiniment petits du second ordre, et par conséquent elle est du troisième ordre.

20. *Arc de cycloïde.* — Les considérations qui nous ont fait connaître la tangente en un point de la cycloïde permettent d'évaluer la longueur d'un arc quelconque de cette courbe.



Soient AB la position du cercle mobile lorsque le point générateur est situé sur la droite fixe, et M, M′ deux points infiniment voisins correspondant aux positions du cercle mobile dont les points de contact sont respectivement C et C′. On a vu (14) que pour transporter le point M de la cycloïde sur le point voisin M′, on peut lui faire subir deux rotations successives de même angle, l'une autour du point C et l'autre autour d'un point situé à une distance infiniment petite du troisième ordre du point C′, suivies d'une translation infiniment petite du troisième ordre parallèle à CC′. Il résulte des théorèmes précédemment démontrés, que la translation infiniment petite du troisième ordre peut être négligée, et que l'on peut aussi regarder les deux arcs de cercle comme ayant tous deux le rayon CM et, par conséquent, comme égaux: en modifiant ainsi la longueur du chemin MM′, on ne retranche en effet qu'une portion infiniment petite de sa propre valeur, et la limite de la somme des arcs infiniment petits n'est pas altérée. Évaluons donc l'arc de cercle de rayon CM, et dont l'angle au centre (14, *Problème V*) a pour mesure, dans le cercle générateur, la moitié de l'arc égal à CC′. Or en menant par les points M et M′ des parallèles à la base, elles vont rencontrer la position primitive du cercle générateur en deux points M_1 et M'_1 tels, que l'arc $M_1 M'_1$ est, d'après la génération de la cycloïde, égal à CC′, en sorte que l'angle $M_1 A M'_1$ est égal à l'angle au centre de l'arc que nous voulons évaluer; le rayon de cet arc étant d'ailleurs égal à $M_1 A$, l'arc infiniment petit MM′ de cycloïde peut être remplacé par le double de l'arc $M_1 P$, décrit du point A comme centre et compris entre AM_1 et AM'_1. Si l'on joint le point M_1 au point B diamétralement opposé à A sur le cercle générateur, BM_1 est tangent à $M_1 P$, et la portion $M_1 t$ de cette droite comprise entre AM_1 et AM'_1 peut remplacer l'arc $M_1 P$. Mais BM'_1 étant perpendiculaire à AM'_1, est égal à Bt (8), si l'on néglige les infiniment petits

du second ordre, en sorte que $M_1 t$ peut être remplacé par la différence $BM_1 - BM'_1$, et l'on peut considérer l'arc de cycloïde comme égal au double de cette différence. Si l'on évalue de même les arcs infiniment petits compris entre le point M et le point S le plus élevé de la courbe, leur somme, c'est-à-dire l'arc MS, est, d'après cela, égale au double de la somme des diminutions que subit la ligne BM_1 en variant de BM_1 à zéro, c'est-à-dire enfin qu'elle est égale à $2BM_1$, ou, ce qui revient au même, au double de la portion de tangente MT comprise entre le point M et la tangente au sommet.

21. *Variation de longueur d'une ligne droite.* — Lorsqu'une droite se déplace dans l'espace et vient occuper une position nouvelle, la variation de sa longueur est la somme des variations subies dans chacun des déplacements infiniment petits dont la succession peut être considérée comme produisant le déplacement total. Nous allons faire connaître un théorème souvent utile, à l'aide duquel on peut former, en négligeant les infiniment petits du second ordre, l'expression de ces variations infiniment petites.

Soient AB et A′B′ deux positions infiniment voisines, faisant (6) un angle infiniment petit du premier ordre dont le cosinus ne diffère de l'unité que d'un infiniment petit du second ordre. En négligeant les infiniment petits du second ordre, A′B′ est donc égal à sa projection PQ sur AB, et par conséquent la différence A′B′ — AB est égale à PQ — AB, c'est-à-dire à QB — AP, ou à BB′ cos B′BQ — AA′ cos A′AP,

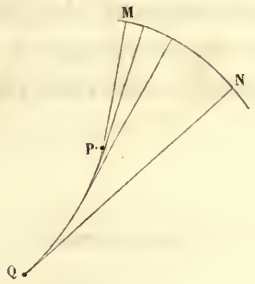
ou, enfin, à la *somme* des déplacements AA′ et BB′ subis par ses extrémités et multipliés respectivement par les cosinus des angles qu'ils forment avec la droite AB, considérée comme dirigée de A vers B quand il s'agit de déplacement BB′, et de B vers A quand il s'agit de AA′.

Nous signalerons deux cas remarquables.

Lorsque la droite reste constamment normale à la ligne parcourue par l'une de ses extrémités, le terme proportionnel au déplacement de cette extrémité contenant en facteur le cosinus d'un angle droit est égal à zéro, et l'accroissement infiniment petit de la longueur est réduit alors à un seul terme.

Lorsque la droite reste constamment tangente à la courbe parcourue par l'une de ses extrémités, le terme proportionnel au déplacement de cette extrémité contient en facteur le cosinus d'un angle nul, et il se réduit par conséquent au déplacement lui-même, c'est-à-dire à l'arc infiniment petit de la courbe à laquelle la droite considérée reste tangente.

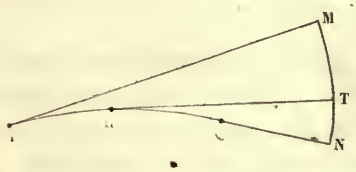
22. *Arc de développée.* — Les deux cas précédents peuvent se présenter en même temps. Si l'on considère deux courbes dont l'une ait pour tangentes les normales



de l'autre, la droite MP, se déplaçant en restant normale à la première et tangente à la seconde, de manière à passer de la position MP à la position NQ, son accroissement, égal d'après ce qui précède à la somme des arcs élémentaires qui composent l'arc PQ, sera précisément l'arc PQ lui-même : on a par conséquent

$$\text{arc PQ} = \text{NQ} - \text{MP}.$$

Réciproquement, si l'on considère une courbe quelconque PQ, et que l'on porte sur chaque tangente RT une longueur RT égale à une constante augmentée de l'arc RQ qui sépare le point de contact du point fixe Q, la courbe MTN, lieu



des points T, aura pour normales les tangentes de la proposée. Si l'on considère, en effet, l'accroissement de la ligne QN, lorsque, coïncidant successivement avec les diverses tangentes dont la longueur a été définie, elle prend la position finale RT, son accroissement total est, par hypothèse, égal à l'arc RQ, c'est-à-dire à la somme des termes infiniment petits proportionnels au déplacement de l'extrémité Q dans l'expression générale de l'accroissement élémentaire. Il faut donc que les autres termes, ceux qui sont proportionnels aux déplacements de l'extrémité N, aient une somme constamment nulle et qu'ils soient par conséquent égaux à zéro. Or il faut pour cela que le cosinus par lequel on multiplie le déplacement du point N soit égal à zéro, et par suite que la droite mobile forme toujours un angle droit avec la courbe que parcourt son extrémité.

L'étude des courbes telles que PRQ et MTN, dont la première a pour tangentes

les normales de la seconde, joue un rôle important dans la géométrie. Nous ne les considérons ici que comme exemple simple de courbes *rectifiables*. Bornons-nous à ajouter que la première, PRQ, se nomme la *développée* de la courbe MTN, et la courbe MTN est dite la *développante* de PRQ. Il résulte évidemment des explications précédentes qu'une courbe n'a qu'une développée et qu'elle a, au contraire, une infinité de développantes. Mais nous reviendrons longuement sur cette théorie importante.

EXERCICES.

1. Quelle que soit la fonction de la variable x désignée par $\varphi(x)$, h désignant un infiniment petit du premier ordre, l'expression

$$\varphi(x+2h) - 2\varphi(x+h) + \varphi(x)$$

est infiniment petite du second ordre.

2. Étant donnés une courbe plane et son cercle osculateur en un point, prouver que la portion d'une parallèle à la tangente commune interceptée entre les deux courbes est infiniment petite du second ordre, lorsque les distances du point de contact aux deux points d'intersection sont du premier ordre.

3. Si d'un point O situé dans le plan d'une courbe plane on abaisse des perpendiculaires sur les tangentes à cette courbe, et que sur chacune on porte, à partir de O, une ligne proportionnelle à sa longueur, que l'on opère de la même manière sur la courbe ainsi obtenue, et que l'on répète indéfiniment la même construction, la courbe limite correspondant à un nombre infini d'opérations coupera sous le même angle tous les rayons vecteurs issus du point O.

4. D'un point O situé dans le plan d'une courbe plane on mène des rayons vecteurs aux points de cette courbe, et l'on prolonge chacun d'eux d'une longueur constante à partir de la courbe donnée. Déterminer la tangente à la courbe lieu des points ainsi obtenus et prouver que la normale à cette courbe, la normale au point correspondant de la courbe donnée, et la perpendiculaire au rayon vecteur mené par le point O, se rencontrent en un même point.

5. D'un point O situé dans le plan d'une courbe plane on mène des rayons vecteurs aux différents points de cette courbe et l'on porte sur chacun d'eux, à partir du point O, une longueur inversement proportionnelle à celle du rayon, déterminer la tangente à la courbe lieu des points ainsi obtenus. Prouver que si deux courbes se coupent, celles que l'on en déduit par cette construction se coupent sous le même angle.

6. Si tous les plans tangents d'une surface la touchent suivant des lignes, ces lignes sont nécessairement droites.

7. D'un point fixe O, on mène des rayons vecteurs aux différents points d'une surface, sur chacun d'eux on porte, à partir de O, une longueur inversement proportionnelle à celle du rayon vecteur; trouver le plan tangent à la surface lieu des points ainsi obtenus.

Les normales aux points correspondants des deux surfaces se rencontrent.

Si deux surfaces se coupent sous un certain angle, celles que l'on en déduit se coupent sous le même angle.

8. Si l'on considère dans un plan deux courbes quelconques, que l'on regarde comme *correspondants* les points pour lesquels les tangentes sont parallèles, et que par un point fixe on mène des droites égales et parallèles à celles qui réunissent deux points correspondants, la tangente à la courbe lieu des points ainsi obtenus est parallèle aux tangentes aux points correspondants des courbes données, et l'arc de cette courbe est la somme ou la différence de ceux qui lui correspondent sur ces courbes données.

9. Prouver par des considérations analogues à celles qui ont été employées pour trouver (20) la longueur de l'arc de cycloïde, que la surface comprise entre la cycloïde et sa base est triple de celle du cercle générateur.

10. Si une courbe plane quelconque roule sans glisser sur une droite fixe, un point du plan lié invariablement à cette courbe et entraîné dans son mouvement, décrit une courbe dont la normale en un point quelconque passe par le point de contact de la droite fixe avec la position correspondante de la courbe mobile.

11. Si d'un point O situé dans le plan d'une courbe plane, on abaisse des perpendiculaires sur les tangentes à cette courbe, la longueur d'un arc de la courbe lieu des pieds de ces perpendiculaires, est égale à celle de la courbe engendrée par le point O lié invariablement à la courbe donnée, pendant que l'arc correspondant de celle-ci roule sans glisser sur une droite fixe.

CHAPITRE II.

DÉRIVÉES ET DIFFÉRENTIELLES DU PREMIER ORDRE.

Définition de la dérivée.

23. Nous avons vu (2) que, $\varphi(x)$ désignant une fonction quelconque de la variable x, l'expression

$$\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h},$$

c'est-à-dire le rapport de l'accroissement de la fonction à l'accroissement de la variable, a, pour chaque valeur de x, une limite déterminée, lorsque l'accroissement h est infiniment petit. Cette limite, qui est elle-même une fonction de x, se nomme la dérivée de $\varphi(x)$, et on la désigne souvent en ajoutant un accent au signe qui représente la première.

$\varphi'(x)$ est la dérivée de $\varphi(x)$.

24. Si l'on considère la fonction $\varphi(x)$ comme l'ordonnée d'une courbe ayant pour équation en coordonnées rectilignes $y=\varphi(x)$, la dérivée $\varphi'(x)$ est le coefficient angulaire de la tangente à cette courbe. Le rapport

$$\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}$$

est en effet le coefficient angulaire de la corde qui joint deux points dont les abscisses sont x et $x+h$, et la limite de ce rapport est par conséquent le coefficient de la tangente, position limite de cette corde.

Nous allons montrer comment on peut calculer la dérivée, d'une fonction donnée explicitement à l'aide des signes habituellement employés dans l'analyse élémentaire.

Dérivées des fonctions simples.

25. Parmi les fonctions employées en analyse, il en est quelques-unes auxquelles on donne le nom de fonctions *simples*. Leur nombre peut être augmenté ou diminué, en quelque sorte arbitrairement. Ces fonctions simples sont, en effet, celles auxquelles on ramène les autres, et par la combinaison desquelles se forment les fonc-

tions *composées*. Or il peut arriver que, suivant le point de vue auquel on se place, une même fonction soit regardée comme simple ou comme composée : je citerai les fonctions sin x et cos x, que l'on regarde souvent et que nous regarderons nous-même comme des fonctions simples; on a cependant

$$\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x},$$

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right),$$

et chacune de ces formules, exprimant cos x par des opérations où figure le signe *sinus*, permettrait de ne pas regarder le cosinus comme une fonction simple. Quoi qu'il en soit, nous considérerons comme fonctions simples, les fonctions : x^m (m étant entier), a^x, $\log x$, sin x, cos x et tang x. Nous chercherons d'abord leurs dérivées, puis nous ferons connaître des théorèmes généraux qui permettent d'en déduire celles de toutes les fonctions explicites.

26. *Dérivée de x^m.* — La première des fonctions simples qui se présente en algèbre est x^m; c'est aussi la première fonction dont nous chercherons la dérivée, en supposant toutefois que l'exposant m soit entier et positif. La fonction x^m, lorsque l'exposant est fractionnaire, peut être regardée comme une fonction simple, mais il nous sera plus commode de ne pas le faire et de ramener ce cas plus général à celui où m est entier.

La dérivée de x^m est, par définition, la limite du rapport

$$\frac{(x+h)^m - x^m}{h},$$

lorsque h tend vers zéro; or cette fraction est égale, m étant entier, à

$$\frac{mhx^{m-1} + \dfrac{m.m-1}{1.2}h^2x^{m-2} + \dots}{h}.$$

En effectuant la division par h, puis supposant $h = 0$, on voit que la limite de cette fraction est mx^{m-1}. Ainsi *la dérivée de x^m est mx^{m-1}*.

27. *Dérivée de a^x.* — La dérivée de a^x est, par définition, la limite du rapport

$$\frac{a^{x+h} - a^x}{h},$$

lorsque h tend vers zéro. On a évidemment

$$a^{x+h} - a^x = a^x(a^h - 1).$$

La dérivée est donc la limite du rapport

$$(A) \qquad a^x \frac{a^h - 1}{h}.$$

Posons $a^h - 1 = \alpha$, et par conséquent $a^h = 1 + \alpha$, $h \log a = \log(1 + \alpha)$; l'expression (A) devient

$$(B) \qquad a^x \frac{\alpha \log a}{\log(1+\alpha)} = \frac{a^x \log a}{\frac{1}{\alpha}\log(1+\alpha)} = \frac{a^x \log a}{\log(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}}.$$

Lorsque h tend vers zéro, α, qui est égal à $a^h - 1$, tend également vers zéro; $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ a par conséquent pour limite la base des logarithmes népériens, habituellement désignée par e; l'expression (B) a donc pour limite $a^x \frac{\log a}{\log e}$, et par conséquent, *la dérivée de* a^x *est* $a^x \frac{\log a}{\log e}$.

La base du système dans lequel on prend les deux logarithmes est arbitraire et n'influe pas sur leur rapport qui figure seul dans l'expression. Lorsque a est égal à e, le rapport des logarithmes devient l'unité, et *la dérivée de* e^x *est* e^x.

28. *Dérivée de* $\log x$. — La dérivée de la fonction $\log x$ est, par définition, la limite du rapport $\frac{\log(x+h) - \log x}{h}$, lorsque h tend vers zéro.

On a

$$(C) \qquad \frac{\log(x+h) - \log x}{h} = \frac{\log\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{h}.$$

Posons $\frac{h}{x} = \alpha$, $h = \alpha x$; cette expression devient

$$\frac{\log(1+\alpha)}{\alpha x} = \frac{1}{x}\log(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Or, α tendant vers zéro, $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ a pour limite le nombre e, l'expression (C) a donc pour limite $\frac{\log e}{x}$, et *la dérivée de* $\log x$ *est* $\frac{\log e}{x}$.

Si le logarithme est pris dans la base e, on le désigne habituellement par $\mathrm{l}x$, et *la dérivée* de $\mathrm{l}x$ *est* $\frac{1}{x}$.

29. *Dérivée de* $\sin x$. — La dérivée de $\sin x$ est, par définition, la limite du rapport

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}.$$

Or on a

$$\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\frac{2\sin\frac{h}{2}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)}{h},$$

et en remarquant qu'en vertu d'un théorème bien connu, $\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$ a pour limite l'unité lorsque h tend vers zéro, on voit que le second membre a pour limite $\cos x$ et *la dérivée de* $\sin x$ *est* $\cos x$.

30. *Dérivée de* $\cos x$. — La dérivée de $\cos x$ est, par définition, la limite du rapport

$$\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}.$$

Or on a

$$\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}=-\frac{2\sin\frac{h}{2}\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)}{h},$$

$\frac{2\sin\frac{h}{2}}{h}$ ayant pour limite l'unité, cette expression a évidemment pour limite $-\sin x$, et *la dérivée de* $\cos x$ *est* $-\sin x$.

31. *Dérivée de* $\operatorname{tang} x$. — La fonction $\operatorname{tang} x$ étant égale au rapport $\frac{\sin x}{\cos x}$, on pourrait ne pas la mettre au nombre des fonctions simples, mais on peut aussi obtenir directement sa dérivée de la manière la plus facile. Cette dérivée est, par définition, la limite du rapport

$$\frac{\operatorname{tang}(x+h)-\operatorname{tang}x}{h}=\frac{\frac{\operatorname{tang}x+\operatorname{tang}h}{1-\operatorname{tang}x\operatorname{tang}h}-\operatorname{tang}x}{h}=\frac{\operatorname{tang}h\,(1+\operatorname{tang}^2x)}{h\,(1-\operatorname{tang}x\operatorname{tang}h)},$$

et comme, h tendant vers zéro, $\frac{\operatorname{tang}h}{h}$ a pour limite l'unité, cette dernière expression tend vers $1+\operatorname{tang}^2x$, c'est-à-dire vers $\frac{1}{\cos^2x}$, et *la dérivée de* $\operatorname{tang} x$ *est* $\frac{1}{\cos^2x}$.

Dérivées des fonctions inverses.

32. Lorsque deux variables sont liées par une équation, chacune d'elles peut être considérée comme fonction de l'autre. Si l'on a, par exemple,

$$x=\psi(y),$$

on peut concevoir cette équation résolue par rapport à y et mise sous la forme

$$y = \varphi(x),$$

le signe φ désignant une fonction que l'on nomme fonction *inverse* de celle qui est désignée par le signe ψ. D'après cela, si l'on prend une fonction quelconque d'une variable, puis la fonction inverse du résultat, les deux opérations se détruisent et l'on retombe sur la variable elle-même. Ainsi, en admettant les notations précédentes, on a

$$\varphi[\psi(y)] = \varphi(x) = y,$$
$$\psi[\varphi(x)] = \psi(y) = x.$$

Exemples. — Si l'on a

$$x = y^2,$$

on en conclut

$$y = \sqrt{x}.$$

La racine carrée est donc la fonction inverse du carré; il est clair d'ailleurs que les deux opérations se détruisent lorsqu'on les effectue successivement.

Si l'on a

$$x = e^y,$$

on en déduit

$$y = \mathrm{l}.x.$$

Le logarithme est donc la fonction inverse de l'exponentielle. On a d'ailleurs, conformément à la remarque générale,

$$\mathrm{l}.e^x = x.$$

33. Connaissant la dérivée d'une fonction, on peut trouver celle de la fonction inverse. Soit x une fonction de y définie par l'équation

$$x = \varphi(y).$$

Supposons que l'on déduise de cette équation

$$y = \psi(x).$$

La dérivée $\varphi'(y)$, de x par rapport à y, est la limite du rapport de l'accroissement de x à l'accroissement correspondant de y. Si donc, pour nous servir d'une notation qui sera souvent employée, on nomme Δx l'accroissement de x, et Δy l'accroissement correspondant de y, la dérivée $\varphi'(y)$ est la limite du rapport $\frac{\Delta x}{\Delta y}$.

La dérivée $\psi'(x)$, de y par rapport à x, est la limite du rapport de l'accroissement de y à l'accroissement correspondant de x, c'est-à-dire $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, et comme les va-

riables x et y sont les mêmes que dans le cas précédent, les rapports $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ et $\frac{\Delta x}{\Delta y}$ ont des limites inverses l'une de l'autre, et l'on a par conséquent

$$\psi'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)}.$$

Cette relation fait connaître la dérivée de la fonction ψ.

34. Appliquons ce qui précède à quelques exemples.

Soit

$$x = y^m;$$

on en déduit

$$y = \sqrt[m]{x} = x^{\frac{1}{m}}.$$

La dérivée de la fonction $x^{\frac{1}{m}}$ par rapport à x est donc l'inverse de la dérivée de y^m par rapport à y, c'est-à-dire $\frac{1}{my^{m-1}}$, et en remplaçant y par sa valeur, cette dérivée est $\frac{1}{mx^{\frac{m-1}{m}}}$, c'est-à-dire $\frac{1}{m}x^{\frac{1}{m}-1}$.

Ainsi la dérivée de $x^{\frac{1}{m}}$ *est* $\frac{1}{m}x^{\frac{1}{m}-1}$, m étant un nombre entier quelconque.

Soit encore

$$x = \sin y;$$

on en déduit

$$y = \arcsin x.$$

La dérivée de arc sin x par rapport à x est donc l'inverse de celle de sin y par rapport à y, elle est donc $\frac{1}{\cos y}$, c'est-à-dire $\frac{\pm 1}{\sqrt{1-x^2}}$.

En posant

$$x = \cos y,$$

on verrait de même que la dérivée de arc cos x est $\frac{\pm 1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Ce résultat, qui est fort important, exige quelques explications.

La fonction sin x est une fonction bien définie, c'est-à-dire que, pour chaque valeur de x, sin x a une valeur unique et déterminée : il n'en est pas de même de la fonction arc sin x. Car, à un même sinus, correspondent un nombre infini d'arcs différents; si α désigne l'un d'entre eux, les autres sont compris dans les formules $2K\pi + \alpha$ et $(2K+1)\pi - \alpha$, K étant un entier arbitraire, et l'on conçoit

dès lors que l'expression générale de leur dérivée doit avoir le signe $\pm$. Si d'ailleurs on considère en particulier l'un des arcs compris parmi ceux que représente l'expression arc sin x, la détermination du signe de la dérivée sera toujours facile. En posant, en effet,

$$x = \sin y,$$

la dérivée de y par rapport à x est $\frac{1}{\cos y}$, et il n'y a dans cette expression aucune ambiguïté. Le signe $\pm$ se présente seulement lorsqu'on remplace cos y par $\pm\sqrt{1-x^2}$, et l'on voit que le signe du radical doit être celui de cos y. De même, en posant

$$x = \cos y,$$

on a

$$y = \operatorname{arc}\cos x,$$

et la dérivée de y par rapport à x est $-\frac{1}{\sin y}$, c'est-à-dire $\frac{\mp 1}{\sqrt{1-x^2}}$, le signe de l'expression étant contraire à celui de sin y.

En posant

$$x = \operatorname{tang} y,$$

on a

$$y = \operatorname{arc\,tang} x.$$

Donc la dérivée de y par rapport à x est

$$\cos^2 y = \frac{1}{1+x^2}.$$

Ici il n'y a pas d'ambiguïté, et cela tient à ce que les arcs qui ont même tangente ayant pour expression générale $K\pi + \alpha$, ils diffèrent les uns des autres par une partie constante, et ont tous même dérivée.

35. La considération des fonctions inverses permet de déduire l'une de l'autre les dérivées des fonctions a^x et $\log x$, qui ont été trouvées séparément.

Si l'on a

$$x = a^y,$$

on en déduit

$$y = \log x.$$

Par conséquent la dérivée de $\log x$ par rapport à x est l'inverse de celle de a^y par rapport à y, c'est-à-dire, les logarithmes étant pris dans la base a,

$$\frac{\log e}{a^y} = \frac{\log e}{x}.$$

Dérivées des fonctions de fonctions.

36. Si la lettre u désigne une fonction donnée de la variable x, toute fonction de u sera une fonction de x que l'on désigne sous le nom de *fonction de fonction*. L'origine de cette dénomination s'aperçoit immédiatement.

Ainsi donc si l'on a

$$u = \varphi(x), \quad y = \mathrm{F}(u),$$

y considéré comme dépendant de x est une *fonction de fonction*.

Nous allons montrer que si les fonctions φ et F sont de telle nature qu'on sache former leurs fonctions dérivées, on pourra trouver aussi la dérivée de y par rapport à x.

Supposons, en effet, que l'on donne à x un accroissement Δx et qu'il en résulte

pour u un accroissement Δu,

pour y un accroissement Δy,

on a identiquement

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta u},$$

en passant à la limite, Δx tendant vers zéro, le premier membre de cette équation a, par définition, pour limite la dérivée de y par rapport à x, et les deux facteurs du second membre tendent respectivement vers la dérivée de u par rapport à x, et vers celle de y par rapport à u. En désignant donc ces deux dérivées par $\varphi'(x)$ et par $\mathrm{F}'(u)$, on voit que la dérivée de y par rapport à x est

$$\varphi'(x)\,\mathrm{F}'(u),$$

résultat que l'on peut énoncer de la manière suivante :

La dérivée d'une fonction de fonction est le produit des dérivées des fonctions simples qui servent à la former, prises chacune par rapport à la variable dont elle dépend immédiatement.

Exemples. — Soit la fonction $y = \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$. Cette expression peut être considérée comme une fonction de fonction. En posant, en effet,

$$\frac{\pi}{2} - x = u,$$

on aura

$$y = \sin u.$$

L'application de la règle générale donne pour la dérivée de y par rapport à x

$$(-1)\cos u = -\sin x,$$

résultat conforme à ce qui a été trouvé (30).

Soit la fonction $y = \cot x = \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$. En posant

$$\frac{\pi}{2} - x = u,$$

on aura

$$y = \operatorname{tang} u.$$

L'application de la règle donne pour la dérivée de y

$$(-1)\frac{1}{\cos^2 u} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Soit encore la fonction $\mathrm{l}x^5$. Posons

$$x^5 = u,$$

$$y = \mathrm{l}u,$$

L'application de la règle donne pour la dérivée de y

$$\frac{1}{u}\cdot 5x^4 = \frac{5x^4}{x^5} = \frac{5}{x};$$

et, en effet, $\mathrm{l}.x^5$ étant égal à $5\mathrm{l}x$, il est clair que sa dérivée doit être égale à cinq fois celle de $\mathrm{l}.x$.

37. Comme dernier exemple, formons la dérivée de la fonction $y = x^{\frac{m}{n}}$, m et n désignant des nombres entiers. Cette fonction peut être considérée comme une fonction de fonction. En posant, en effet,

$$x^{\frac{1}{n}} = u,$$

on aura

$$y = u^m.$$

En appliquant la règle générale et se rappelant les résultats obtenus (26), (34), on trouve pour la dérivée de y

$$y' = mu^{m-1}\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{m}{n}x^{\frac{m-1}{n}}x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1},$$

et par conséquent la dérivée de $x^{\frac{m}{n}}$ s'obtient par la même formule que lorsque l'exposant $\frac{m}{n}$ est entier.

38. On peut étendre la règle donnée pour former la dérivée d'une fonction de fonction à des expressions liées à la variable x au moyen de plusieurs fonctions intermédiaires. Posons, en effet,

$$u=\varphi(x), \quad v=\psi(u), \quad w=f(v), \quad y=\mathrm{F}(w),$$

et cherchons la dérivée de y par rapport à x. Soient Δx un accroissement attribué à x; Δu, Δv, Δw, Δy, les accroissements correspondants de u, v, w, y : on a identiquement

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta w}\cdot\frac{\Delta w}{\Delta v}\frac{\Delta v}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x},$$

et l'on voit que si Δx tend vers zéro, le premier membre a pour limite la dérivée de y par rapport à x, et les facteurs du second membre tendent vers les dérivées de y, w, v, u, prises, pour chacune d'elles, par rapport à la variable dont elle dépend immédiatement. On en conclut que la dérivée de y est le produit obtenu en multipliant les dérivées des diverses fonctions y, w, v, u, prises, pour chacune, par rapport à la variable dont elle dépend immédiatement.

Dérivée d'un produit.

39. Soient u, v, w, des fonctions données d'une même variable x, nommons y leur produit dont on veut avoir la dérivée. On a

$$y=u.v.w.$$

On en conclut, en prenant les logarithmes népériens des deux membres,

$$\mathrm{l}y=\mathrm{l}u+\mathrm{l}v+\mathrm{l}w,$$

et si l'on prend les dérivées des deux membres, on trouve, en appliquant la règle des fonctions de fonctions et désignant par y', u', v', w', les dérivées de y, u, v, w,

$$\frac{1}{y}y'=\frac{1}{u}u'+\frac{1}{v}v'+\frac{1}{w}w',$$

d'où l'on déduit

$$y'=\frac{y}{u}u'+\frac{y}{v}v'+\frac{y}{w}w'=vwu'+uwv'+uvw'.$$

Ainsi, la dérivée d'un produit est la somme des produits obtenus en multipliant successivement la dérivée de chaque facteur par le produit de tous les autres.

Dérivée d'un quotient.

40. Soient u et v deux fonctions d'une même variable x, nommons y leur quotient dont on veut avoir la dérivée. On a

$$y=\frac{u}{v}:$$

on trouve, en prenant les logarithmes des deux membres,

$$\mathrm{l}y = \mathrm{l}u - \mathrm{l}v,$$

et si l'on prend les dérivées des deux membres, cette équation donne, en adoptant les mêmes notations que précédemment,

$$\frac{y'}{y} = \frac{u'}{u} - \frac{v'}{v},$$

d'où l'on déduit

$$y' = \frac{yu'}{u} - \frac{yv'}{v} = \frac{vu' - uv'}{v^2}.$$

Telle est la formule qui donne la dérivée d'un quotient $\frac{u}{v}$, lorsque l'on connaît les dérivées u' et v' de ses deux termes.

Dérivée d'une puissance.

41. Soient u une fonction de x, et m un exposant quelconque, positif ou négatif. Si l'on pose

$$y = u^m,$$

en prenant les logarithmes des deux membres on en conclut,

$$\mathrm{l}y = m\mathrm{l}u,$$

et si l'on prend les dérivées des deux membres par rapport à x, on a, en adoptant toujours les mêmes notations,

$$\frac{y'}{y} = \frac{mu'}{u},$$

d'où l'on déduit

$$y' = \frac{myu'}{u} = mu^{m-1}u'.$$

Remarque. — Si l'on suppose $u = x$, on aura $u' = 1$, et la formule précédente montre que la dérivée de la fonction x^m est mx^{m-1}. Ce résultat avait été obtenu dans le cas d'un exposant entier (26) ou fractionnaire et positif (37). On voit qu'il est entièrement général, car la démonstration précédente s'applique à toutes les valeurs positives ou négatives de m sans exception.

Dérivée de u^v.

42. Considérons enfin l'expression composée u^v, dans laquelle u et v désignent des fonctions de la variable x. Posons

$$y = u^v.$$

En prenant les logarithmes des deux membres on en conclut

$$\mathrm{l}y = v\,\mathrm{l}u,$$

et si l'on prend les dérivées par rapport à x des deux membres de cette équation, en appliquant au second la règle donnée (39) pour la dérivée d'un produit, on a

$$\frac{y'}{y} = v'\,\mathrm{l}u + \frac{v}{u}u',$$

d'où l'on déduit

$$y' = y\left(v'\,\mathrm{l}u + \frac{vu'}{u}\right).$$

Si l'on suppose, par exemple,

$$v = x, \quad u = x,$$

on aura

$$v' = 1, \quad u' = 1,$$

et la dérivée de x^x est

$$x^x(\mathrm{l}x + 1).$$

Quelques applications.

43. Les résultats obtenus dans ce chapitre permettent d'obtenir la dérivée, d'une fonction explicite formée d'une manière quelconque au moyen des opérations simples. Il est important de se familiariser avec ces premiers principes que nous résumerons en en donnant quelques applications.

1° Dérivée de arc tang $\dfrac{3a^2x - x^3}{a(a^2 - 3x^2)} = y$

Posons

$$\frac{3a^2x - x^3}{a(a^2 - 3x^2)} = u,$$

on aura

$$y = \text{arc tang}\, u,$$

et y est une fonction de fonction, dont la dérivée est le produit de $\dfrac{1}{1+u^2}$ par la dérivée de u. Or en appliquant la règle (40) on trouve pour dérivée de u

$$\frac{3(a^4 + 2a^2x^2 + x^4)}{a(a^2 - 3x^2)^2} = \frac{3(a^2 + x^2)^2}{a(a^2 - 3x^2)^2};$$

d'ailleurs

$$\frac{1}{1+u^2} = \frac{a^2(a^2 - 3x^2)^2}{(a^2 + x^2)^3},$$

la dérivée demandée est donc, toutes réductions faites,

$$\frac{3a}{a^2 + x^2}.$$

Ce résultat était facile à prévoir, car les formules connues de la trigonométrie montrent que la fonction y est égale à 3 arc tang $\frac{x}{a}$ et, en l'écrivant ainsi, on trouve immédiatement l'expression précédente pour dérivée.

2° Dérivée de $\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}} = y$.

Considérant y comme la puissance $\frac{1}{2}$ de la fraction $\frac{1+\sin x}{1-\sin x}$ et traitant cette fonction par la règle donnée (41), on trouve pour dérivée de y

$$\frac{1}{2\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}} \cdot \frac{\cos x(1-\sin x)+\cos x(1+\sin x)}{(1-\sin x)^2} = \frac{2\cos x}{2(1-\sin x)\sqrt{(1-\sin^2 x)}} = \frac{1}{1-\sin x}.$$

On peut parvenir au même résultat en remarquant que

$$\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}} = \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right);$$

or la dérivée de tang $\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$ est égale à $\frac{1}{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)}$, et cette expression est équivalente à celle qui précède.

3° Admettant la formule

$$\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx = \frac{\sin\frac{n+1}{2}x \cdot \sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}},$$

en déduire l'expression de la somme

$$\cos x + 2\cos 2x + \ldots + n\cos nx.$$

Il suffit de prendre les dérivées des deux membres et l'on a

$$\cos x + 2\cos 2x + 3\cos 3x + \ldots + n\cos nx = \frac{\frac{n+1}{2}\sin\frac{x}{2}\sin\frac{2n+1}{2}x - \frac{1}{2}\sin^2\frac{n+1}{2}x}{\sin^2\frac{x}{2}}.$$

4° En admettant la formule

$$\sin x \cdot \sin\left(x+\frac{\pi}{m}\right)\sin\left(x+\frac{2\pi}{m}\right)\ldots\sin\left(x+\frac{(m-1)\pi}{m}\right) = \frac{\sin mx}{2^{m-1}},$$

en déduire l'expression de la somme

$$\cot x + \cot\left(x+\frac{\pi}{m}\right) + \ldots + \cot\left(x+\frac{m-1}{m}\right)\pi.$$

Il suffit de prendre les logarithmes, puis les dérivées des deux membres de l'équation ; on trouve

$$\cot x + \cot\left(x + \frac{\pi}{m}\right) + \ldots + \cot\left(x + \frac{m-1}{m}\pi\right) = m \cot mx.$$

Emploi des dérivées pour l'étude des fonctions.

44. Lorsque l'accroissement infiniment petit d'une fonction est de même signe que celui de la variable, on dit que cette fonction est croissante; elle est décroissante dans le cas contraire. En adoptant ces définitions et disant, par exemple, qu'une fonction est croissante, cela signifie évidemment croissante *avec la variable*.

Lorsqu'une fonction $\varphi(x)$ est croissante, sa dérivée est positive, car la fraction $\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}$ dont cette dérivée est la limite, est constamment positive; si la fonction $\varphi(x)$ est au contraire décroissante, la dérivée est négative. Ces remarques évidentes sont souvent utiles dans l'étude des valeurs successives d'une fonction; nous en donnerons quelques exemples :

1° Considérons la fonction

$$y = \frac{\sin x}{x};$$

la dérivée est

$$y' = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2},$$

et comme, entre les limites $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$, on a toujours $x < \operatorname{tang} x$, et par suite $x\cos x - \sin x < 0$, cette dérivée est négative : la fonction $\frac{\sin x}{x}$ est donc décroissante; et cette fonction étant d'ailleurs égale à l'unité pour $x = 0$, et à $\frac{2}{\pi}$ pour $x = \frac{\pi}{2}$, elle est, pour toute valeur intermédiaire de x, plus petite que l'unité et plus grande que $\frac{2}{\pi}$.

2° Soit la fonction

$$y = l(1+x) - x;$$

la dérivée est

$$y' = \frac{1}{1+x} - 1.$$

Elle est négative pour les valeurs positives de x, la fonction est donc décroissante, et comme elle est nulle pour $x = 0$, on a pour toute valeur positive de x

$$l(1+x) - x < 0.$$

3° Considérons enfin la fonction

$$y = l(1+x) - x + \frac{x^2}{2},$$

dont la dérivée est

$$y' = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{x^2}{1+x};$$

cette dérivée étant positive pour les valeurs positives de x, la fonction est croissante, et comme elle est nulle pour $x = 0$, elle est constamment positive et l'on a

$$l(1+x) - x + \frac{x^2}{2} > 0,$$

en sorte que, pour toute valeur positive de x, $l(1+x)$ est compris entre x et $x - \frac{x^2}{2}$, on peut par conséquent le représenter par $x - \frac{\theta x^2}{2}$, θ étant moindre que l'unité.

Ordre de grandeur d'une dérivée infiniment petite.

45. Considérons une fonction de x, $\varphi(x)$, qui s'annule pour $x = 0$. La dérivée $\varphi'(x)$, pour la valeur zéro de la variable, est égale, par définition, à $\lim \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x}$, c'est-à-dire à la limite du rapport $\frac{\varphi(x)}{x}$. Elle est nulle par conséquent toutes les fois que pour de très-petites valeurs de x, $\varphi(x)$ est infiniment petit d'ordre supérieur à celui de x.

On peut aller plus loin : lorsque x étant infiniment petit du premier ordre, $\varphi(x)$ est infiniment petit de l'ordre n, $\varphi'(x)$ est infiniment petit d'ordre $n-1$. On peut en effet, dans ce cas, représenter $\varphi(x)$ de la manière suivante :

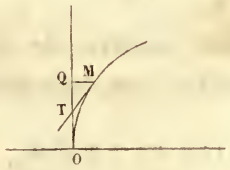
$$\varphi(x) = x^n(A + \varepsilon), \tag{1}$$

A étant une constante et ε une fonction de x qui s'annule avec la variable.

On aura par suite, en nommant ε' la dérivée de ε,

$$\varphi'(x) = nx^{n-1}(A + \varepsilon) + x^n\varepsilon'. \tag{2}$$

Or je dis que $x\varepsilon'$ tend vers zéro. Cela est évident lorsque ε' ne croît pas indéfiniment. Examinons donc seulement le cas où ε' est infini lorsque x est nul; considérons la courbe dont l'équation est $y = \varepsilon$, cette courbe passe par l'origine et est en ce point tangente à l'axe des y.



Soient MT la tangente à cette courbe en un point M infiniment voisin de O, et MQ l'abscisse du point M. ε' est la tangente de l'angle QMT, donc $x\varepsilon'$ est égal à QT, il est, par suite, moindre que QO, c'est-à-dire moindre que ε; ε tendant vers zéro avec x, il en est donc de même de $x\varepsilon'$. D'après cela $x^n\varepsilon$ est infiniment petit par rapport à x^{n-1}, et l'expression (2) de $\varphi'(x)$ est un infiniment petit de l'ordre $n-1$. On voit aussi que le rapport $\frac{\varphi'(x)}{x^{n-1}}$ a pour limite nA.

Cette remarque a été utilisée par M. O. Bonnet dans la démonstration de plusieurs propositions importantes dont nous parlerons plus tard.

Différentielle d'une fonction d'une seule variable.

46. Si l'on représente par $\varphi(x)$ une fonction de la variable x, et par $\varphi'(x)$ sa dérivée, on a

$$\varphi'(x) = \lim \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h},$$

h étant infiniment petit. Par conséquent, en désignant par ε un autre infiniment petit,

$$\varphi(x+h) - \varphi(x) = h[\varphi'(x) + \varepsilon] = h\varphi'(x) + h\varepsilon;$$

$\varphi'(x)$ étant une quantité finie, $h\varepsilon$ est infiniment petit par rapport à $h\varphi'(x)$, et la différence $\varphi(x+h) - \varphi(x)$ est égale à $h\varphi'(x)$, *en négligeant une portion infiniment petite de sa valeur.*

Le produit $h\varphi'(x)$ peut par conséquent (11), lorsque h est infiniment petit, être substitué à l'accroissement $\varphi(x+h) - \varphi(x)$, dans tout problème où il s'agit de calculer un rapport ou une somme d'infiniment petits; on donne à ce produit le nom de *différentielle* de $\varphi(x)$ et on le représente en écrivant la lettre d devant la fonction.

Conformément à cette notation, la différentielle de x se confond avec l'accroissement même de cette variable, puisque la dérivée est dans ce cas égale à l'unité. En substituant donc, à la lettre h, l'expression équivalente dx, la différentielle d'une fonction $\varphi(x)$ prendra la forme

$$d.\varphi(x) = \varphi'(x)\,dx.$$

C'est celle dont nous ferons habituellement usage.

Cette différentielle $d.\varphi(x)$ n'est pas, ainsi qu'on l'a expliqué, rigoureusement égale à l'accroissement de $\varphi(x)$, mais elle peut le remplacer lorsqu'il est infiniment petit, et il n'en résulte aucune erreur sur les limites des sommes ou des rapports dans lesquelles il figure.

47. La représentation géométrique des résultats ajoutant presque toujours à la

clarté, il est bon d'indiquer ici la signification géométrique de la différentielle.

Considérons la courbe dont l'équation en coordonnées rectilignes est

$$y = \varphi(x),$$

le coefficient angulaire de la tangente au point dont les coordonnées sont x et y est (24) $\varphi'(x)$, et l'équation de la tangente, en nommant t et u les coordonnées *courantes* de cette droite, c'est-à-dire les coordonnées de l'un quelconque de ses points,

$$u - y = \varphi'(x)(t - x).$$

Si donc, à partir du point de contact dont les coordonnées sont x et y, on attribue à l'abscisse d'un point de la tangente un accroissement $t - x = h$, l'accroissement correspondant de l'ordonnée est

$$u - y = \varphi'(x)\, h,$$

et la différentielle $h\varphi'(x)$ est l'accroissement de l'ordonnée y, correspondant à un accroissement h de l'abscisse, lorsqu'on substitue à la courbe sa tangente. Lors donc qu'on remplace l'accroissement $\varphi(x + h) - \varphi(x)$, de la fonction $\varphi(x)$, par la différentielle $\varphi'(x)\, h$, cela revient à remplacer un arc de courbe infiniment petit par sa tangente. Ces deux substitutions sont équivalentes, et permises dans les mêmes circonstances.

48. La différentielle d'une fonction $\varphi(x)$, étant, d'après ce qui précède, le produit de la dérivée $\varphi'(x)$ par l'accroissement dx de la variable, il semble que l'emploi de la différentielle, identique au fond à celui de la dérivée, ne pourra présenter aucun avantage spécial, si petit qu'il soit.

La remarque suivante montrera pourtant qu'il en est autrement et que l'emploi des différentielles peut être plus commode que celui des dérivées.

De la relation

$$y = \varphi(x),$$

on déduit

$$dy = \varphi'(x)\, dx, \tag{A}$$

dx est arbitraire, dy l'est donc également; le rapport $\frac{dy}{dx}$ est seul déterminé et égal à la dérivée $\varphi'(x)$, on peut donc dire que :

y étant une fonction de x, l'une des différentielles dy et dx est arbitraire, et son rapport à la seconde est égal à celui des accroissements infiniment petits que peuvent prendre simultanément x et y.

Or cette définition, évidemment équivalente à celle que nous avions adoptée d'a-

bord, a l'avantage très-réel que les deux quantités, x et y, y figurent absolument de la même manière. Donnons sur ce point quelques développements.

Si y est une fonction de x, x est, par cela même, une fonction de y, et rien n'oblige à prendre l'une de ces variables plutôt que l'autre, ou que toute fonction de l'une et de l'autre pour variable principale. Or l'emploi des dérivées exige absolument que l'on fasse un pareil choix, parce que la dérivée n'a de sens déterminé que lorsqu'on indique quelle est la variable dont on prend la dérivée et la variable principale par rapport à laquelle on la prend. Si l'on considère au contraire la différentielle de y définie par la relation

$$dy = \varphi'(x)\,dx, \tag{A}$$

cette équation nous fait connaître le rapport des différentielles dy et dx, c'est-à-dire celui des accroissements infiniment petits que l'on peut simultanément attribuer à x et à y; l'une de ces différentielles est arbitraire, mais rien n'indique que ce soit dx plutôt que dy, la relation (A) pouvant aussi bien s'écrire

$$dx = \frac{1}{\varphi'(x)}\,dy,$$

et donnant, sous cette forme, la différentielle de la variable x considérée comme fonction de la variable y et correspondant à une valeur arbitraire de dy.

Il y a plus : la différentielle d'une fonction reste la même, quelle que soit la variable par rapport à laquelle cette fonction soit exprimée. Soit en effet

$$y = \psi(u)$$

une fonction de u dans laquelle la lettre u désigne elle-même une fonction de x,

$$u = \varphi(x).$$

La différentielle de y, en considérant y comme fonction de x, est le produit de dx par la dérivée de y (36), $\psi'(u)\varphi'(x)$, on a donc

$$dy = \psi'(u)\,\varphi'(x)\,dx.$$

Or la différentielle de y, considérée comme fonction de u, est

$$dy = \psi'(u)\,du,$$

ce qui est précisément la même chose, pourvu que, dans cette dernière équation, on remplace la différentielle du par la valeur

$$du = \varphi'(x)\,dx,$$

qui résulte de la définition même, lorsque u est considéré comme fonction de x.

On voit dans ce cas, comme dans le précédent, que x, y, u, désignant trois variables susceptibles de s'exprimer au moyen de l'une d'entre elles, les relations

$$du = \varphi'(x)\,dx,$$
$$dy = \psi'(u)\,du,$$

qui lient les différentielles dx, dy, du, laissent l'une de ces différentielles arbitraire, et font connaître seulement les rapports des accroissements infiniment petits que peuvent prendre simultanément x, y, et u, rien d'ailleurs n'imposant l'obligation de choisir l'une d'elles pour variable principale de préférence à une autre.

49. La même remarque s'étend à un nombre quelconque de variables x, y, z, u, v, w, pourvu qu'elles soient tellement liées, qu'on puisse les considérer comme des fonctions de l'une quelconque d'entre elles. Si l'on calcule dy, dz, du, dv, dw, en considérant x comme variable principale, on obtiendra des résultats de la forme

$$dy = y'\,dx, \quad dz = z'\,dx, \quad du = u'\,du, \quad dv = v'\,dx, \quad dw = w'\,dx,$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{dy}{y'} = \frac{dz}{z'} = \frac{du}{u'} = \frac{dv}{v'} = \frac{dw}{w'} = \frac{dx}{1};$$

et l'on pourra, sans nouveau calcul, adopter une nouvelle variable principale, u par exemple, les rapports des différentielles dy, dz, du, dv, dw, dx, resteront les mêmes, il suffira de regarder du, et non plus dx, comme recevant une valeur arbitraire.

Pour calculer les dérivées des diverses variables prises par rapport à la variable principale u, il suffit de diviser par du les différentielles de ces mêmes variables. Les dérivées sont par conséquent

$$\frac{dy}{du} = \frac{y'}{u'}, \quad \frac{dz}{du} = \frac{z'}{u'}, \quad \frac{dv}{du} = \frac{v'}{u'}, \quad \frac{dw}{du} = \frac{w'}{u'}, \quad \frac{dx}{du} = \frac{1}{u'};$$

ces résultats sont parfaitement d'accord avec ceux que l'on déduirait de la théorie des fonctions de fonctions.

Dérivées partielles des fonctions de plusieurs variables.

50. Lorsqu'une fonction dépend de plusieurs variables indépendantes les unes des autres, on peut en prendre la dérivée par rapport à l'une quelconque de ces variables, en considérant dans cette opération toutes les autres comme des constantes. Une dérivée prise de cette manière se nomme une *dérivée partielle*.

La recherche d'une dérivée partielle se fait absolument comme celle de la dérivée d'une fonction d'une seule variable et n'exige aucune explication nouvelle.

Si $\varphi(x, y, z)$ est une fonction de trois variables x, y, z, les dérivées partielles par rapport à ces trois variables s'écrivent de la manière suivante :

$$\frac{d\varphi}{dx}, \quad \frac{d\varphi}{dy}, \quad \frac{d\varphi}{dz}.$$

Le sens qu'il faut attacher à ces expressions résulte de ce qui précède. $\frac{d\varphi}{dx}$ est la limite du rapport de l'accroissement infiniment petit de φ à l'accroissement correspondant de x, lorsque y et z restent constants ; de même, dans le calcul de $\frac{d\varphi}{dy}$, x et z sont tous deux constants, x et y le sont dans le calcul de $\frac{d\varphi}{dz}$.

51. La fonction considérée φ restant la même, peut être exprimée d'une infinité de manières différentes, car on peut substituer aux variables x, y, z, trois variables nouvelles qui en soient des fonctions déterminées. En posant, par exemple,

$$u = \psi_1(x, y, z),$$
$$v = \psi_2(x, y, z),$$
$$w = \psi_3(x, y, z),$$

la fonction φ pourra être exprimée au moyen de u, v, w, et il y aura lieu de considérer les dérivées partielles $\frac{d\varphi}{du}, \frac{d\varphi}{dv}, \frac{d\varphi}{dw}$. Nous verrons plus loin le moyen de les calculer sans qu'il soit nécessaire de former explicitement l'expression nouvelle de la fonction φ. Mais il est bon de remarquer dès à présent que, pour déterminer la valeur de $\frac{d\varphi}{du}$, il ne suffit pas de connaître la fonction φ et la variable u. Cette dérivée dépend aussi du choix des deux autres variables v et w que l'on adjoint à u pour exprimer φ, et qui doivent rester constantes dans la différentiation.

Considérons, par exemple, la fonction

$$\varphi = x^2(x + y + z)yz ;$$

on a

$$\frac{d\varphi}{dx} = 2x(x + y + z)yz + x^2yz.$$

Posons

$$x + y + z = u, \quad yz = v ;$$

φ prend la forme

$$\varphi = x^2uv,$$

et sous cette forme on a

$$\frac{d\varphi}{dx} = 2xuv = 2x(x+y+z)yz.$$

On voit donc que la même fonction φ peut avoir, par rapport à la même variable x, des dérivées partielles très-différentes, et que ces dérivées dépendent du choix des variables que l'on adjoint à x pour exprimer φ et qui restent constantes dans l'opération.

52. L'exemple précédent ne peut laisser aucun doute sur l'exactitude de la proposition énoncée. Nous croyons utile cependant d'ajouter quelques explications pour faire mieux sentir la raison de la différence que nous signalons.

Considérons, pour plus de clarté, une fonction de deux variables seulement

$$z = \varphi(x, y), \tag{1}$$

cette fonction z peut s'exprimer également au moyen de x et d'une nouvelle variable ayant avec les deux premières une relation connue. Si l'on choisit une variable u définie par l'équation

$$u = \psi(x, y), \tag{2}$$

on peut, entre les équations (1) et (2), éliminer y et en déduire une relation de la forme

$$z = \mathrm{F}(x, u). \tag{3}$$

La dérivée $\frac{dz}{dx}$ prise dans l'équation (1) est la limite du rapport de l'accroissement de z à celui de x, *lorsque y reste constant*.

La dérivée $\frac{dz}{dx}$ prise dans l'équation (3) est la limite du rapport de l'accroissement de z à celui de x, *lorsque u reste constant*.

Or il est clair que, y restant constant, u est variable, et, u restant constant, y est variable; les deux valeurs de $\frac{dz}{dx}$ déduites des équations (1) et (3) n'ont donc pas la même définition, et il est tout simple qu'elles ne soient pas égales.

Si l'on considère l'équation (1) comme représentant une surface, $\frac{dz}{dx}$ est la limite du rapport de l'accroissement de z à celui de x lorsqu'on se déplace sur la surface sans changer y, c'est-à-dire sur une section parallèle au plan des ZX. En déduisant au contraire $\frac{dz}{dx}$ de l'équation (3), on calcule le rapport de l'accroissement de z à celui de x, lorsqu'on se déplace sur la surface en laissant à u une valeur constante,

c'est-à-dire en suivant une certaine courbe qui dépend de la nature de cette fonction u. Or le rapport de l'accroissement de z à celui de x n'est pas le même pour toutes les courbes que l'on peut tracer sur une même surface à partir d'un point donné. Cela est si vrai, qu'en choisissant la courbe qui résulte de l'intersection de la surface avec le plan parallèle à celui de XY, pour laquelle z est constant, ce rapport peut toujours être rendu égal à zéro. Lors donc que z contient deux variables et que rien n'indique la variable adjointe à x et supposée constante dans l'opération, $\frac{dz}{dx}$ n'est pas déterminé.

Différentielle d'une fonction de plusieurs variables.

53. L'accroissement infiniment petit d'une fonction de plusieurs variables peut s'exprimer comme celui des fonctions d'une seule variable, au moyen d'une expression fort simple qui n'en diffère que d'une portion infiniment petite de sa propre valeur. Considérons d'abord une fonction $\varphi(x, y)$ de deux variables indépendantes l'une de l'autre. Donnons à chacune de ces variables des accroissements infiniment petits du premier ordre h et k, l'accroissement de φ sera

$$\varphi(x+h, y+k) - \varphi(x, y) = \varphi(x+h, y+k) - \varphi(x+h, y) + \varphi(x+h, y) - \varphi(x, y).$$

Or la différence

$$\varphi(x+h, y+k) - \varphi(x+h, y)$$

peut être considérée comme l'accroissement de la fonction $\varphi(x+h, y)$ dans laquelle la variable y a reçu l'accroissement k. On aura donc (46), en négligeant les infiniment petits du second ordre,

$$\varphi(x+h, y+k) - \varphi(x+h, y) = k\varphi'_y(x+h, y).$$

De même, en négligeant les infiniment petits du second ordre, on a

$$\varphi(x+h, y) - \varphi(x, y) = h\varphi'_x(x, y),$$

φ'_x et φ'_y désignant les dérivées de φ prises par rapport à x et par rapport à y.

D'après cela on a, en négligeant toujours les infiniment petits du second ordre,

$$\varphi(x+h, y+k) - \varphi(x, y) = k\varphi'_y(x+h, y) + h\varphi'_x(x, y).$$

Mais $\varphi'_y(x+h, y)$ diffère infiniment peu de $\varphi'_y(x, y)$, le produit par k de la différence de ces expressions peut donc être négligé, et l'on peut écrire, en négligeant toujours les infiniment petits d'un ordre supérieur au premier,

$$\varphi(x+h, y+k) - \varphi(x, y) = h\varphi'_x(x, y) + k\varphi'_y(x, y).$$

54. L'expression précédente est fort remarquable : elle montre que pour les valeurs des variables infiniment peu différentes de valeurs données x et y, l'accroissement de la fonction est une fonction du premier degré des accroissements h et k respectivement attribués à x et à y. On suppose toujours, bien entendu, que les infiniment petits du second ordre soient négligés.

Si l'on représente par dx et par dy les accroissements arbitraires h et k, et que l'on remplace en même temps les dérivées φ'_x, φ'_y, par les notations convenues $\frac{d\varphi}{dx}$ et $\frac{d\varphi}{dy}$, l'expression de l'accroissement de la fonction φ devient

$$\frac{d\varphi}{dx}\,dx + \frac{d\varphi}{dy}\,dy.$$

Cette expression se nomme la différentielle totale de φ, et on la représente par la notation $d\varphi$, en sorte que l'on a, par définition,

$$d\varphi = \frac{d\varphi}{dx}\,dx + \frac{d\varphi}{dy}\,dy.$$

Cette différentielle $d\varphi$ est, en négligeant les infiniment petits du second ordre, l'accroissement de la fonction φ correspondant aux accroissements infiniment petits dx et dy attribués à x et à y.

A peine est-il nécessaire de faire observer que, dans le second membre de l'équation précédente, les numérateurs des fractions $\frac{d\varphi}{dx}$, $\frac{d\varphi}{dy}$, ont des significations différentes, et que ni l'un ni l'autre ne doivent être confondus avec la différentielle totale $d\varphi$ qui s'écrit de même.

Le numérateur de $\frac{d\varphi}{dx}$ est la différentielle de φ par rapport à x, considérée comme seule variable.

Le numérateur de $\frac{d\varphi}{dy}$ est la différentielle de φ par rapport à y, considérée comme seule variable.

Enfin le premier membre est la différentielle totale qui est la somme des deux autres.

Il y a certainement un inconvénient à écrire de la même manière des quantités essentiellement différentes, mais le lecteur bien prévenu n'y verra pas de difficulté sérieuse.

55. Des raisonnements tout semblables montrent que l'accroissement infiniment petit d'une fonction de trois variables $\varphi(x, y, z)$, lorsque x, y, z reçoivent des

accroissements infiniment petits du premier ordre, h, k, l, peut être représenté, en négligeant les infiniment petits du second ordre, par

$$\frac{d\varphi}{dx}h + \frac{d\varphi}{dy}k + \frac{d\varphi}{dz}l,$$

et en posant $h = dx$, $k = dy$, $l = dz$, cette somme se nomme la différentielle *totale* de φ; on a donc par définition

$$d\varphi = \frac{d\varphi}{dx}dx + \frac{d\varphi}{dy}dy + \frac{d\varphi}{dz}dz. \tag{1}$$

Lorsque dx, dy, dz sont infiniment petits du premier ordre, $d\varphi$ représente, en négligeant les infiniment petits du second ordre, l'accroissement de φ correspondant aux accroissements infiniment petits dx, dy, dz des trois variables.

On doit faire ici la même remarque que dans le cas des fonctions de deux variables, l'expression $d\varphi$ a dans l'équation (1) quatre significations distinctes.

56. Le théorème et la définition précédente s'étendent sans difficulté au cas d'un nombre quelconque de variables. L'accroissement infiniment petit d'une fonction $\varphi(x, y, z, u, v)$ correspondant aux accroissements infiniment petits h, k, l, m, n des variables, est égal, en négligeant les infiniment petits du second ordre, à

$$\frac{d\varphi}{dx}h + \frac{d\varphi}{dy}k + \frac{d\varphi}{dz}l + \frac{d\varphi}{du}m + \frac{d\varphi}{dv}u,$$

et si, dans cette somme, on représente les accroissements h, k, l, m, n par dx, dy, dz, du, dv, on obtiendra l'expression

$$\frac{d\varphi}{dx}dx + \frac{d\varphi}{dy}dy + \frac{d\varphi}{dz}dz + \frac{d\varphi}{du}du + \frac{d\varphi}{dv}dv,$$

que l'on nomme différentielle totale de φ et que l'on représente par $d\varphi$: cette différentielle peut remplacer l'accroissement de la fonction lorsque dx, dy, dz, du, dv sont infiniment petits.

57. D'après ce qui précède, u désignant une fonction de plusieurs variables indépendantes, que nous supposerons, pour fixer les idées, au nombre de trois, si l'on attribue à ces variables trois accroissements infiniment petits dx, dy, dz, l'accroissement de u sera donné, *en négligeant les infiniment petits du second ordre*, par la formule

$$du = \left(\frac{du}{dx}\right)dx + \left(\frac{du}{dy}\right)dy + \left(\frac{du}{dz}\right)dz,$$

$\left(\frac{du}{dx}\right)$, $\left(\frac{du}{dy}\right)$, $\left(\frac{du}{dz}\right)$ étant trois fonctions de x, y et z, indépendantes de dx, dy et

dz. On peut énoncer ce résultat en disant : Si l'on donne à x, y, z et u, quatre accroissements infiniment petits simultanés, il existe, en négligeant les infiniment petits du second ordre, une équation du premier degré entre ces quatre accroissements, et trois quelconques d'entre eux restent arbitraires.

Cette forme de l'énoncé est importante, parce que la fonction u n'y est plus distinguée des variables dont elle dépend; x, y, z et u sont quatre variables liées par une équation ; chacune d'elles peut être considérée comme fonction des trois autres.

L'équation du premier degré qui lie dx, dy, dz et du, étant successivement résolue par rapport à chacune de ces différentielles, fera connaître les dérivées de la variable correspondante, par rapport aux trois autres considérées comme indépendantes. Si l'on a, par exemple,

$$du = \mathrm{P}\,dx + \mathrm{Q}\,dy + \mathrm{R}\,dz, \tag{1}$$

en regardant u comme fonction de x, y et z, on aura

$$\mathrm{P} = \frac{du}{dx}, \quad \mathrm{Q} = \frac{du}{dy}, \quad \mathrm{R} = \frac{du}{dz}.$$

Or l'équation (1) donne

$$dy = \frac{1}{\mathrm{Q}}\,du - \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}}\,dx - \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{Q}}\,dz.$$

Par suite

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{\dfrac{du}{dy}}, \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{du}{dx}}{\dfrac{du}{dy}}, \quad \frac{dy}{dz} = -\frac{\dfrac{du}{dz}}{\dfrac{du}{dy}}.$$

La première de ces équations est évidente, car les deux quotients $\frac{dy}{du}$ et $\frac{du}{dy}$ représentent tous deux le rapport des accroissements infiniment petits que peuvent prendre simultanément (48) y et u, lorsque z et x restent constants.

Dérivées des fonctions composées.

58. Une fonction *composée* est une fonction dont la définition implique des opérations à exécuter sur d'autres fonctions qu'il faut préalablement former.

Soient u et v deux fonctions de la variable x. Toute fonction de la forme

$$y = \varphi(u, v),$$

est une fonction composée de x.

Nous allons nous proposer de chercher la dérivée d'une fonction composée. Un tel problème serait plus naturellement placé après les règles relatives à la détermination des dérivées, mais nous avons dû en différer la solution à cause des simplifications apportées à cette recherche par les théorèmes démontrés dans les paragraphes précédents.

Si l'on donne à x un accroissement infiniment petit Δx, il en résultera, pour u et v, deux accroissements Δu et Δv, et, en négligeant les infiniment petits du second ordre, l'accroissement Δy de y sera (54)

$$\Delta y = \frac{d\varphi}{du}\Delta u + \frac{d\varphi}{dv}\Delta v, \tag{1}$$

d'où l'on conclut

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{d\varphi}{du}\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{d\varphi}{dv}\frac{\Delta v}{\Delta x},$$

lorsque Δx tend vers zéro, les limites des deux membres sont rigoureusement égales puisque dans l'équation (1) on n'a négligé que les infiniment petits du second ordre; on a donc

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\varphi}{du}\frac{du}{dx} + \frac{d\varphi}{dv}\frac{dv}{dx}.$$

On verrait de même que u, v, w désignant trois fonctions de x, la dérivée de la fonction composée $y = \varphi(u, v, w)$ est exprimée par la formule

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\varphi}{du}\frac{du}{dx} + \frac{d\varphi}{dv}\frac{dv}{dx} + \frac{d\varphi}{dw}\frac{dw}{dx}.$$

Généralement, la dérivée d'une fonction composée d'un nombre quelconque de fonctions

$$y = \varphi(u, v, w, z, t)$$

est exprimée par la formule

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\varphi}{du}\frac{du}{dx} + \frac{d\varphi}{dv}\frac{dv}{dx} + \frac{d\varphi}{dw}\frac{dw}{dx} + \frac{d\varphi}{dz}\frac{dz}{dx} + \frac{d\varphi}{dt}\frac{dt}{dx},$$

ce que l'on peut énoncer en disant : la dérivée d'une fonction composée est la somme des résultats obtenus en prenant les dérivées de la fonction proposée dans laquelle on considère successivement chacune des fonctions dont elle dépend comme variant seule avec x, toutes les autres étant traitées comme des constantes et la dérivée se réduisant alors à celle d'une fonction de fonction.

59. Le théorème précédent peut s'appliquer à la détermination déjà obtenue de la dérivée d'un produit ou d'une expression de la forme u^v.

Considérons d'abord le produit

$$y = u.v.w,$$

u, v, w désignant des fonctions de la variable x. Ce produit peut être considéré comme une fonction composée de u, de v et de w, et l'on a, en appliquant le théorème précédent,

$$\frac{dy}{dx} = vw\frac{du}{dx} + uw\frac{dv}{dx} + uv\frac{dw}{dx},$$

ce qui s'accorde avec le résultat obtenu (39).

De même en posant

$$y = u^v,$$

u et v désignant des fonctions de x, on peut considérer y comme une fonction composée et l'on a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} + \frac{dy}{dv}\frac{dv}{dx} = vu^{v-1}\frac{du}{dx} + u^v \operatorname{l} u \frac{dv}{dx},$$

ce qui s'accorde avec le résultat déjà obtenu (41).

Dérivées des fonctions implicites.

60. On désigne sous le nom de fonction *implicite* toute fonction bien définie dont l'expression analytique n'est pas donnée.

Parmi les fonctions implicites, nous considérerons seulement ici celles qui sont définies par des équations non résolues.

Considérons d'abord le cas le plus simple, celui d'une fonction y définie par une équation entre cette fonction et la variable x,

(1) $$\varphi(x, y) = 0.$$

Pour déduire d'une telle équation la dérivée, ou, ce qui revient au même, la différentielle de y, remarquons qu'en supposant y remplacé par sa valeur en x, la fonction φ sera identiquement nulle ; sa différentielle sera donc égale à zéro, et l'on aura

(2) $$\frac{d\varphi}{dx}dx + \frac{d\varphi}{dy}dy = 0,$$

on en déduit,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{d\varphi}{dx}}{\dfrac{d\varphi}{dy}},$$

et le problème est résolu.

Il faut bien observer que l'équation (2) est une conséquence rigoureuse de l'équation (1). Comme, en faisant le raisonnement d'une manière incomplète, on pourrait être conduit à penser le contraire, nous insisterons sur ce point important.

L'équation

$$\varphi(x, y) = 0$$

ayant lieu identiquement lorsqu'on y a remplacé y par sa valeur en x, l'accroissement de cette fonction est rigoureusement nul ; il semble donc que sa valeur

$$\frac{d\varphi}{dx}dx + \frac{d\varphi}{dy}dy,$$

dans laquelle on néglige (53) les infiniment petits du second ordre, n'est pas égale à zéro, mais seulement infiniment petite du second ordre, en sorte que l'on a rigoureusement

$$\frac{d\varphi}{dx}dx + \frac{d\varphi}{dy}dy = \varepsilon, \tag{3}$$

ε étant infiniment petit du second ordre. Cette équation serait suffisante pour fournir la valeur de $\frac{dy}{dx}$, car $\frac{\varepsilon}{dx}$ est nul à la limite; mais on peut démontrer que ε est rigoureusement nul et que l'équation (2) a lieu sans aucune erreur. Remarquons en effet que, y étant une fonction de x (peu importe qu'elle soit connue ou inconnue), dy est de la forme $K dx$; le premier membre de l'équation (2) est donc le produit de dx par un certain coefficient fonction de x; or il faut que ce coefficient soit nul pour que le produit soit infiniment petit d'un ordre supérieur au premier, et dans ce cas il est rigoureusement égal à zéro.

61. Soit, par exemple, l'équation

$$f(x, y) = 4y^3 - 3y + \sin x = 0; \tag{1}$$

on a

$$\frac{df(x, y)}{dx} = \cos x, \quad \frac{df(x, y)}{dy} = 12y^2 - 3,$$

et par conséquent

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{3(1 - 4y^2)}. \tag{2}$$

Ce résultat est facile à vérifier. On déduit, en effet, de l'équation (1) $y = \sin \frac{1}{3}x$, et on a par conséquent

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}\cos\frac{1}{3}x,$$

en sorte que l'équation (2) équivaut à

$$\frac{1}{3}\cos\frac{1}{3}x=\frac{\cos x}{3\left(1-4\sin^2\frac{1}{3}x\right)}=\frac{\cos x}{3\left[1-4\left(1-\cos^2\frac{1}{3}x\right)\right]}=\frac{\cos x}{3\left(4\cos^2\frac{1}{3}x-3\right)},$$

c'est-à-dire

$$\cos x=4\cos^3\frac{1}{3}x-3\cos\frac{1}{3}x,$$

ce qui est exact.

62. Passons à un cas plus compliqué. Supposons que y et z soient deux fonctions de x liées à la variable par les équations

$$\varphi(x,y,z)=0,\quad \psi(x,y,z)=0.$$

Si ces équations étaient résolues par rapport à y et à z, en y remplaçant les variables par leurs valeurs en fonction de x, elles deviendraient identiques, chacun des premiers membres aurait par conséquent une différentielle rigoureusement égale à zéro, on a par conséquent

$$\frac{d\varphi}{dx}dx+\frac{d\varphi}{dy}dy+\frac{d\varphi}{dz}dz=0,$$

$$\frac{d\psi}{dx}dx+\frac{d\psi}{dy}dy+\frac{d\psi}{dz}dz=0,$$

d'où l'on déduit

$$\frac{dx}{\frac{d\varphi}{dy}\frac{d\psi}{dz}-\frac{d\varphi}{dz}\frac{d\psi}{dy}}=\frac{dy}{\frac{d\varphi}{dz}\frac{d\psi}{dx}-\frac{d\varphi}{dx}\frac{d\psi}{dz}}=\frac{dz}{\frac{d\varphi}{dx}\frac{d\psi}{dy}-\frac{d\varphi}{dy}\frac{d\psi}{dx}},$$

et ces équations font connaître les différentielles dy, dz, ou, ce qui revient au même, les dérivées

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{d\varphi}{dz}\frac{d\psi}{dx}-\frac{d\varphi}{dx}\frac{d\psi}{dz}}{\frac{d\varphi}{dy}\frac{d\psi}{dz}-\frac{d\varphi}{dz}\frac{d\psi}{dy}},\qquad \frac{dz}{dx}=\frac{\frac{d\varphi}{dx}\frac{d\psi}{dy}-\frac{d\varphi}{dy}\frac{d\psi}{dx}}{\frac{d\varphi}{dy}\frac{d\psi}{dz}-\frac{d\varphi}{dz}\frac{d\psi}{dy}}.$$

63. Si le nombre des équations, toujours égal à celui des fonctions inconnues, devenait plus grand que deux, la marche à suivre serait la même, et il n'y aurait rien à changer au raisonnement. Les rapports des différentielles s'obtiennent dans chaque cas par la résolution d'un système d'équations du premier degré, et l'on sait que l'on ne doit pas chercher autre chose que ces rapports, puisque l'une des différentielles est essentiellement arbitraire.

Si l'on a, par exemple,

$$\varphi_1(x, y, z, u, v) = 0,$$
$$\varphi_2(x, y, z, u, v) = 0,$$
$$\varphi_3(x, y, z, u, v) = 0,$$
$$\varphi_4(x, y, z, u, v) = 0,$$

les différentielles dx, dy, dz, du, dv sont liées par les équations

$$\frac{d\varphi_1}{dx}dx + \frac{d\varphi_1}{dy}dy + \frac{d\varphi_1}{dz}dz + \frac{d\varphi_1}{du}du + \frac{d\varphi_1}{dv}dv = 0,$$
$$\frac{d\varphi_2}{dx}dx + \frac{d\varphi_2}{dy}dy + \frac{d\varphi_2}{dz}dz + \frac{d\varphi_2}{du}du + \frac{d\varphi_2}{dv}dv = 0,$$
$$\frac{d\varphi_3}{dx}dx + \frac{d\varphi_3}{dy}dy + \frac{d\varphi_3}{dz}dz + \frac{d\varphi_3}{du}du + \frac{d\varphi_3}{dv}dv = 0,$$
$$\frac{d\varphi_4}{dx}dx + \frac{d\varphi_4}{dy}dy + \frac{d\varphi_4}{dz}dz + \frac{d\varphi_4}{du}du + \frac{d\varphi_4}{dv}dv = 0,$$

et ces équations, déterminant le rapport de deux quelconques de ces différentielles, permettent de calculer la dérivée de l'une des variables par rapport à une autre variable désignée, que l'on prendra pour variable principale.

64. Lorsque les fonctions implicites que l'on considère dépendent de plusieurs variables indépendantes, il n'y a rien à changer à ce qui précède. Le calcul de la dérivée de la fonction par rapport à l'une des variables, peut se faire comme si toutes les autres variables indépendantes étaient constantes et en les traitant dans les calculs comme des paramètres constants.

Supposons, par exemple, que u et v soient deux fonctions de x et de y définies par les équations

$$\text{(1)} \qquad \begin{aligned} F(x, y, u, v) &= 0, \\ \varphi(x, y, u, v) &= 0. \end{aligned}$$

Pour calculer les dérivées $\frac{du}{dx}$ et $\frac{dv}{dx}$, on fera absolument le même calcul que si, y étant une constante, il s'agissait de deux fonctions d'une seule variable. Un second calcul fera connaître $\frac{du}{dy}$ et $\frac{dv}{dy}$,

Les dérivées $\frac{du}{dx}$, $\frac{dv}{dx}$, se déduiront des équations

$$\frac{dF}{dx}dx + \frac{dF}{du}du + \frac{dF}{dv}dv = 0,$$
$$\frac{d\varphi}{dx}dx + \frac{d\varphi}{du}du + \frac{d\varphi}{dv}dv = 0,$$

et les dérivées $\frac{du}{dy}, \frac{dv}{dy}$ se déduiront des deux suivantes :

$$\begin{aligned} &\frac{dF}{dy}\,dy + \frac{dF}{du}\,du + \frac{dF}{dv}\,dv = 0, \\ &\frac{d\varphi}{dy}\,dy + \frac{d\varphi}{du}\,du + \frac{d\varphi}{dv}\,dv = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Il est bien entendu que dans les équations (2), du et dv n'ont pas la même signification que dans les équations (3). Dans les premières, les différentielles sont prises par rapport à x, et dans les deux autres, elles le sont par rapport à y. Ce qui a été dit (48) n'est pas applicable ici : la différentielle d'une fonction est indépendante de la variable par rapport à laquelle on la prend, lorsque la fonction dépend d'une seule variable et que l'on substitue à cette variable une variable nouvelle qui en dépende ; mais ici les deux variables x et y sont indépendantes et leurs différentielles dx et dy ont un rapport entièrement indéterminé.

65. On peut procéder d'une autre manière et calculer à la fois les quatre dérivées $\frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}, \frac{dv}{dx}, \frac{dv}{dy}$: il faut pour cela prendre pour inconnues les différentielles totales du et dv. Si dans les équations (1) on donne simultanément à x et à y les accroissements dx et dy, il en résultera pour u et v des accroissements que l'on pourra regarder, en négligeant les infiniment petits du second ordre, comme égaux à du et dv (54), et les fonctions F et φ ne variant pas, on aura, en négligeant toujours les infiniment petits du second ordre,

$$\begin{aligned} &\frac{dF}{dx}\,dx + \frac{dF}{dy}\,dy + \frac{dF}{du}\,du + \frac{dF}{dv}\,dv = 0, \\ &\frac{d\varphi}{dx}\,dx + \frac{d\varphi}{dy}\,dy + \frac{d\varphi}{du}\,du + \frac{d\varphi}{dv}\,dv = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

On peut d'ailleurs démontrer que ces équations, qui se présentent à nous comme exactes, aux infiniment petits du second ordre près, sont *rigoureusement* vraies. En effet, du et dv étant des différentielles, sont, par définition, l'un et l'autre de la forme $M\,dx + N\,dy$, et par suite les deux premiers membres des équations (4) sont de la forme

$$P\,dx + Q\,dy,$$

P et Q étant des fonctions de x et de y ; et comme dx et dy sont indépendants l'un de l'autre, une pareille somme ne peut être infiniment petite d'un ordre supérieur au premier que si l'on a $P = 0$, $Q = 0$, et alors elle est rigoureusement nulle.

En résolvant les équations (4) par rapport à du et à dv, on en déduira pour ces différentielles des valeurs de la forme

$$du = \mathrm{A}\,dx + \mathrm{B}\,dy,$$
$$dv = \mathrm{A}'\,dx + \mathrm{B}'\,dy,$$

et par conséquent (53),

$$\frac{du}{dx} = \mathrm{A}, \quad \frac{du}{dy} = \mathrm{B}, \quad \frac{dv}{dx} = \mathrm{A}', \quad \frac{dv}{dy} = \mathrm{B}'.$$

En exécutant les calculs, on trouve

$$\frac{du}{dx} = \frac{\frac{d\varphi}{dx}\frac{d\mathrm{F}}{dv} - \frac{d\varphi}{dv}\frac{d\mathrm{F}}{dx}}{\frac{d\varphi}{dv}\frac{d\mathrm{F}}{du} - \frac{d\varphi}{du}\frac{d\mathrm{F}}{dv}}, \qquad \frac{du}{dy} = \frac{\frac{d\varphi}{dy}\frac{d\mathrm{F}}{dv} - \frac{d\varphi}{dv}\frac{d\mathrm{F}}{dy}}{\frac{d\varphi}{dv}\frac{d\mathrm{F}}{du} - \frac{d\varphi}{du}\frac{d\mathrm{F}}{dv}},$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{\frac{d\mathrm{F}}{dx}\frac{d\varphi}{du} - \frac{d\mathrm{F}}{du}\frac{d\varphi}{dx}}{\frac{d\varphi}{dv}\frac{d\mathrm{F}}{du} - \frac{d\varphi}{du}\frac{d\mathrm{F}}{dv}}, \qquad \frac{dv}{dy} = \frac{\frac{d\varphi}{dy}\frac{d\mathrm{F}}{du} - \frac{d\varphi}{du}\frac{d\mathrm{F}}{dy}}{\frac{d\varphi}{du}\frac{d\mathrm{F}}{dv} - \frac{d\varphi}{dv}\frac{d\mathrm{F}}{du}}.$$

66. On peut également déduire des équations (4) dx et dy exprimés en fonctions de du et dv, et si l'on a

$$dx = \mathrm{A}_1\,du + \mathrm{B}_1\,dv,$$
$$dy = \mathrm{A}'_1\,du + \mathrm{B}'_1\,dv,$$

on en conclura

$$\frac{dx}{du} = \mathrm{A}_1, \quad \frac{dx}{dv} = \mathrm{B}_1, \quad \frac{dy}{du} = \mathrm{A}'_1, \quad \frac{dy}{dv} = \mathrm{B}'_1.$$

Il faut bien remarquer que l'on n'a pas ici, comme (33),

$$\frac{dx}{du} = \frac{1}{\left(\frac{du}{dx}\right)}.$$

Les accroissements dont $\frac{dx}{du}$ exprime le rapport ne sont pas, en effet, les mêmes que ceux qui figurent dans $\frac{du}{dx}$. Lorsque l'on calcule la dérivée partielle $\frac{du}{dx}$, u et x varient, y restant constant. Dans le calcul de $\frac{dx}{du}$, x est considéré comme fonction de u et de v, en sorte que x et u varient, v restant constant; or pour que v reste constant, il faut nécessairement que y change, et par suite les variations considérées sont autres que dans le cas précédent.

Cette remarque étant importante, et l'erreur dans laquelle on tomberait en l'omettant étant des plus graves, nous donnerons ici un exemple.

Soient

$$x = u + v,$$
$$y = u - v,$$

les relations proposées entre x, y, u, v; on en déduit

$$u = \frac{x+y}{2}, \quad v = \frac{x-y}{2},$$

et par conséquent

$$\frac{dx}{du} = 1, \quad \frac{du}{dx} = \frac{1}{2};$$

on n'a donc pas

$$\frac{dx}{du} = \frac{1}{\left(\frac{du}{dx}\right)}.$$

67. Il existe cependant des relations simples qui, dans le cas des fonctions de deux variables, lient les dérivées $\frac{dx}{du}, \frac{dx}{dv}, \frac{dy}{du}, \frac{dy}{dv}$, aux dérivées inverses $\frac{du}{dx}, \frac{dv}{dx}, \frac{du}{dy}, \frac{dv}{dy}$. Ces relations sont

$$(1) \quad \begin{cases} 1 = \dfrac{dx}{du}\dfrac{du}{dx} + \dfrac{dx}{dv}\dfrac{dv}{dx}, \\ 1 = \dfrac{dy}{du}\dfrac{du}{dy} + \dfrac{dy}{dv}\dfrac{dv}{dy}, \\ 0 = \dfrac{dx}{du}\dfrac{du}{dy} + \dfrac{dx}{dv}\dfrac{dv}{dy}, \\ 0 = \dfrac{dy}{du}\dfrac{du}{dx} + \dfrac{dy}{dv}\dfrac{dv}{dx}. \end{cases}$$

Leur démonstration est extrêmement simple; si l'on suppose x et y exprimées en fonctions de u et de v, puis u et v remplacés, dans ces expressions, par leurs valeurs en fonctions de x et de y, on aura deux identités équivalentes à $x = x$, $y = y$, et dont les seconds membres se présenteront sous forme de fonctions composées contenant u et v, qui elles-mêmes contiennent x et y. Or en prenant les dérivées de ces identités par rapport à x, puis les dérivées par rapport à y, les premiers membres donneront pour résultat $\frac{dx}{dx} = 1$, $\frac{dy}{dy} = 1$, $\frac{dx}{dy} = 0$, $\frac{dy}{dx} = 0$, et les seconds membres, par l'application de la règle des fonctions composées, donneront précisément les seconds membres des formules (1).

On formerait aisément des relations analogues pour un nombre quelconque de fonctions, dépendant d'un nombre égal de variables.

EXERCICES.

1. Trouver la dérivée de arc sin x, et celle de arc tang x, sans les considérer comme des fonctions inverses et au moyen des formules

$$\text{arc sin}\,(x+h) - \text{arc sin}\,x = \text{arc sin}\,\left[(x+h)\sqrt{1-x^2} - x\sqrt{1-(x+h)^2}\right],$$

$$\text{arc tang}\,(x+h) - \text{arc tang}\,x = \text{arc tang}\,\frac{h}{1+hx+x^2}.$$

2. P et Q désignant deux fonctions entières de x, telles que l'on ait

$$\sqrt{1-\mathrm{P}^2} = \mathrm{Q}\sqrt{1-x^2},$$

on a nécessairement

$$\frac{d\mathrm{P}}{\sqrt{1-\mathrm{P}^2}} = n\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

n désignant un nombre entier.

3. Si l'on pose $y = \frac{1}{x}$, on a

$$\frac{dy}{\sqrt{1+y^4}} + \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} = 0.$$

4. En posant $x = \frac{y\sqrt{2}}{1-y^4}$, on a

$$\frac{dy}{\sqrt{1-y^4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}.$$

5. En désignant par φ une fonction de quatre variables x, y, u, v, homogène et du second degré par rapport à u et v, si l'on pose

$$\frac{d\varphi}{du} = p, \quad \frac{d\varphi}{dv} = q,$$

et que l'on considère φ comme fonction de x, y, p et q, on aura

$$\frac{d\varphi}{dp} = u, \quad \frac{d\varphi}{dq} = v, \quad \frac{d\varphi}{dx} = -\left(\frac{d\varphi}{dx}\right), \quad \frac{d\varphi}{dy} = -\left(\frac{d\varphi}{dy}\right),$$

$\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)$ et $\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)$ étant les dérivées de φ par rapport à x et à y, lorsque la fonction est exprimée en x, y, u et v.

6. *Généralisation du théorème précédent.* φ désignant une fonction de $2n$ variables $x_1, x_2, \ldots, x_n, u_1, u_2, \ldots, u_n$, homogène et du second degré par rapport aux n dernières de ces variables, si l'on pose

$$\frac{d\varphi}{du_1} = p_1, \quad \frac{d\varphi}{du_2} = p_2, \ldots, \quad \frac{d\varphi}{du_n} = p_n,$$

et que l'on exprime φ en fonction de $x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$, on aura, quel que soit le nombre entier k,

$$\frac{d\varphi}{dp_k} = u_k, \quad \frac{d\varphi}{dx_k} = -\left(\frac{d\varphi}{dx_k}\right).$$

7. z étant une fonction de x et de y définie par les deux équations

$$z = \frac{[y - \varphi(\alpha)]^2}{\varphi'(\alpha)},$$

$$x + \alpha = \frac{y - \varphi(\alpha)}{\varphi'(\alpha)},$$

on a, quelle que soit la fonction $\varphi(\alpha)$,

$$\frac{dz}{dx} \cdot \frac{dz}{dy} = z.$$

8. z étant une fonction de x et de y définie par les deux équations

$$[z - \varphi(\alpha)]^2 = x^2(y^2 - \alpha^2),$$
$$[z - \varphi(\alpha)]\varphi'(\alpha) = \alpha x^2,$$

on a, quelle que soit la fonction $\varphi(\alpha)$,

$$\frac{dz}{dx} \cdot \frac{dz}{dy} = xy.$$

CHAPITRE III.

DÉTERMINANT D'UN SYSTÈME DE FONCTIONS.

Définition des déterminants.

68. Lorsqu'on résout un système d'équations du premier degré en nombre égal à celui des inconnues, les formules qui expriment les diverses inconnues ont un dénominateur commun que l'on nomme le *déterminant* du système des coefficients. D'après cette définition, toutes les fois que le système de n^2 quantités est disposé en groupes de n lignes contenant chacune n de ces quantités, il y a lieu de considérer le *déterminant* du système. On représente habituellement un déterminant en écrivant la lettre D à la gauche du carré où sont inscrits les coefficients qui servent à le former; on a, par exemple,

$$\mathrm{D}\begin{vmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{vmatrix} = ab' - ba'.$$

$$\mathrm{D}\begin{vmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{vmatrix} = a\,b'\,c'' - a\,c'\,b'' + b\,c'\,a'' - b\,a'\,c'' + c\,a'\,b'' - c\,a''\,b'.$$

La théorie des déterminants appartient à l'analyse algébrique. Nous nous bornerons à rappeler l'énoncé des théorèmes fondamentaux qui seront invoqués dans ce chapitre.

69. *Pour qu'un déterminant soit égal à zéro, il faut et il suffit qu'il existe une même relation linéaire entre tous les termes d'une même ligne, soit verticale, soit horizontale.*

Ainsi, par exemple, pour que l'on ait

$$0 = \mathrm{D}\begin{vmatrix} a''', & b''', & c''', & d''' \\ a'', & b'', & c'', & d'' \\ a', & b', & c', & d' \\ a, & b, & c, & d \end{vmatrix},$$

il faut et il suffit qu'il existe quatre facteurs, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$, tels que l'on ait

$$\lambda_1 a + \lambda_2 a' + \lambda_3 a'' + \lambda_4 a''' = 0,$$
$$\lambda_1 b + \lambda_2 b' + \lambda_3 b'' + \lambda_4 b''' = 0,$$
$$\lambda_1 c + \lambda_2 c' + \lambda_3 c'' + \lambda_4 c''' = 0,$$
$$\lambda_1 d + \lambda_2 d' + \lambda_3 d'' + \lambda_4 d''' = 0.$$

70. *Le produit de deux déterminants formés par un même nombre de lettres peut être mis sous forme de déterminant.*

Si l'on considère les deux déterminants

$$\mathrm{D}\begin{vmatrix} a_1^1, & a_2^1, & a_3^1, \ldots, & a_n^1 \\ a_1^2, & a_2^2, & a_3^2, \ldots, & a_n^2 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & & \\ a_1^n, & a_2^n, & a_3^n, \ldots, & a_n^n \end{vmatrix},$$

$$\mathrm{D}\begin{vmatrix} b_1^1, & b_2^1, & b_3^1, \ldots, & b_n^1 \\ b_1^2, & b_2^2, & b_3^2, \ldots, & b_n^2 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & & \\ b_1^n, & b_2^n, & b_3^n, \ldots, & b_n^n \end{vmatrix},$$

leur produit est égal au déterminant

$$\mathrm{D}\begin{vmatrix} c_1^1, & c_2^1, \ldots, & c_n^1 \\ c_1^2, & c_2^2, \ldots, & c_n^2 \\ \ldots\ldots & \ldots & \\ c_1^n, & c_2^n, \ldots, & c_n^n \end{vmatrix},$$

dans lequel les éléments sont définis par l'équation

$$c_i^k = a_1^k b_i^1 + a_2^k b_i^2 + a_3^k b_i^3 + \ldots + a_n^k b_i^n,$$

qui fait connaître l'un quelconque d'entre eux lorsque les nombres k et i reçoivent successivement toutes les valeurs $1, 2, 3, \ldots, n$.

Nous regarderons les deux théorèmes précédents comme bien connus, et nous ne nous arrêterons pas à les démontrer.

Définition du déterminant d'un système de fonctions.

71. Si l'on considère n fonctions de n variables indépendantes

$$\varphi_1(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n), \quad \varphi_2(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n), \ldots, \quad \varphi_n(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n),$$

les dérivées de ces fonctions, prises par rapport aux diverses variables, sont au nombre de n^2, savoir

$$\begin{aligned} &\frac{d\varphi_1}{dx_1}, \frac{d\varphi_1}{dx_2}, \frac{d\varphi_1}{dx_3}, \ldots, \frac{d\varphi_1}{dx_n}, \\ &\frac{d\varphi_2}{dx_1}, \frac{d\varphi_2}{dx_2}, \frac{d\varphi_2}{dx_3}, \ldots, \frac{d\varphi_2}{dx_n}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\frac{d\varphi_n}{dx_1}, \frac{d\varphi_n}{dx_2}, \frac{d\varphi_n}{dx_3}, \ldots, \frac{d\varphi_n}{dx_n}. \end{aligned}$$

Le *déterminant* du système de ces n^2 dérivées a été nommé par Jacobi le *déterminant* du système des fonctions, et, en adoptant la notation proposée par quelques géomètres, nous le représenterons par

$$\frac{\mathrm{D}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n)}{\mathrm{D}(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)}.$$

Si, par exemple, $\varphi(x, y)$ et $\psi(x, y)$ sont deux fonctions des variables x et y, on aura d'après cette notation

$$\frac{\mathrm{D}(\varphi, \psi)}{\mathrm{D}(x, y)} = \frac{d\varphi}{dx}\frac{d\psi}{dy} - \frac{d\varphi}{dy}\frac{d\psi}{dx}.$$

72. Le déterminant d'un système de fonctions joue, dans l'étude simultanée de plusieurs fonctions contenant un nombre égal de variables, un rôle analogue à celui que joue la dérivée dans l'étude d'une fonction d'une seule variable. Le but de ce chapitre est d'indiquer cette analogie, qui se manifestera mieux encore par la suite.

La *dérivée* d'une fonction est la limite du rapport de l'accroissement infiniment petit de cette fonction à l'accroissement correspondant de la variable.

Le *déterminant* d'un système de fonctions peut recevoir une définition analogue qui résulte du théorème suivant :

Si l'on considère n fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n$, *contenant chacune n variables* $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, *et que l'on attribue à chaque variable un accroissement infiniment petit, il en résultera, pour chaque fonction, un accroissement correspondant. Si l'on choisit arbitrairement n systèmes différents d'accroissements pour les variables, il en résultera pour les fonctions n systèmes d'accroissements correspondants. Le déterminant du système des fonctions est égal au rapport du déterminant du système d'accroissements des fonctions au déterminant du système correspondant d'accroissements des variables.*

Soient, en effet,

$$\begin{aligned} &d_1 x_1, \ d_1 x_2, \ \ldots, \ d_1 x_n, \\ &d_2 x_1, \ d_2 x_2, \ \ldots, \ d_2 x_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &d_n x_1, \ d_n x_2, \ \ldots, \ d_n x_n, \end{aligned}$$

les n systèmes d'accroissements infiniment petits attribués successivement aux n variables, $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$; l'accroissement d'une fonction $\varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est (56) de la forme

$$d^k \varphi_i = \frac{d\varphi_i}{dx_1} d_k x_1 + \frac{d\varphi_i}{dx_2} d_k x_2 + \cdots + \frac{d\varphi_i}{dx_n} d_k x_n,$$

qui représente successivement tous les accroissements considérés, quand on y

attribue aux indices k et i toutes les valeurs entières depuis 1 jusqu'à n; mais d'après cette expression de $d^k \varphi_i$, on voit (70) que le déterminant du système

$$\text{(A)}\qquad \begin{array}{l} d^1\varphi_1,\ d^1\varphi_2,\ \ldots,\ d^1\varphi_n, \\ d^2\varphi_1,\ d^2\varphi_2,\ \ldots,\ d^2\varphi_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ d^n\varphi_1,\ d^n\varphi_2,\ \ldots,\ d^n\varphi_n, \end{array}$$

est le produit de deux autres déterminants, savoir ceux des deux systèmes

$$\text{(B)}\qquad \begin{array}{l} \dfrac{d\varphi_1}{dx_1},\ \dfrac{d\varphi_1}{dx_2},\ \ldots,\ \dfrac{d\varphi_1}{dx_n}, \\ \dfrac{d\varphi_2}{dx_1},\ \dfrac{d\varphi_2}{dx_2},\ \ldots,\ \dfrac{d\varphi_2}{dx_n}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{d\varphi_n}{dx_1},\ \dfrac{d\varphi_n}{dx_2},\ \ldots,\ \dfrac{d\varphi_n}{dx_n}, \end{array}$$

et

$$\text{(C)}\qquad \begin{array}{l} d_1x_1,\ d_1x_2,\ \ldots.\ d_1x_n, \\ d_2x_1,\ d_2x_2,\ \ldots,\ d_2x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ d_nx_1,\ d_nx_2,\ \ldots,\ d_nx_n. \end{array}$$

On en conclut que le déterminant du système B, c'est-à-dire le déterminant du système des fonctions proposées, est le rapport du déterminant du système (A) au déterminant du système (C), c'est-à-dire le rapport du déterminant du système d'accroissements infiniment petits des fonctions, au déterminant du système d'accroissement correspondant des variables. Le théorème est donc démontré.

Cas où le déterminant est nul.

73. Lorsqu'une fonction d'une variable est constante, sa dérivée est nulle. Il existe pour un système de fonctions un théorème analogue.

Lorsque plusieurs fonctions ne sont pas distinctes, c'est-à-dire lorsqu'il existe entre elles une relation nécessaire, leur déterminant est égal à zéro.

Montrons d'abord l'analogie de ce théorème avec celui dont nous le rapprochons et dont l'énoncé paraît très-différent.

Lorsqu'une fonction $\varphi(x)$ d'une seule variable n'est pas constante, à chaque valeur de la fonction correspond une valeur déterminée de la variable, et l'équation

$$\text{(1)}\qquad \varphi(x) = y$$

peut être résolue par rapport à x. Si au contraire la fonction φ est constante, en donnant sa valeur, on ne détermine pas x dont cette valeur est indépendante, et l'équation (1) ne peut plus être résolue par rapport à x.

Si l'on considère maintenant deux fonctions $\varphi_1(x_1, x_2)$, $\varphi_2(x_1, x_2)$ et que l'on pose

$$\begin{aligned} \varphi_1(x_1, x_2) &= y_1, \\ \varphi_2(x_1, x_2) &= y_2, \end{aligned} \tag{2}$$

ces deux équations peuvent être résolues par rapport à x_1 et à x_2, pourvu que les fonctions φ_1 et φ_2 soient distinctes et indépendantes; mais s'il existe entre elles une relation nécessaire, l'une des équations devient une conséquence de l'autre, ou bien elles sont incompatibles, et dans l'un et l'autre cas il n'est pas possible de les résoudre par rapport à x_1 et à x_2.

L'analogie que nous avons signalée consiste, on le voit, en ce que, dans les deux cas, les valeurs des fonctions étant supposées connues, ne déterminent pas les valeurs correspondantes des variables; il en est évidemment de même pour n fonctions, lorsqu'il existe entre ces fonctions une relation indépendante des valeurs assignées aux n variables dont elles dépendent.

Démontrons actuellement le théorème énoncé : lorsque plusieurs fonctions ne sont pas distinctes, le déterminant du système de ces fonctions est égal à zéro.

Soient $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n$ les fonctions considérées, et

$$\mathrm{F}(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n) = 0 \tag{3}$$

une relation à laquelle elles satisfont identiquement, c'est-à-dire quelles que soient les valeurs attribuées aux variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dont elles dépendent.

De l'équation (3) on déduit, pour un système d'accroissements infiniment petits quelconques de $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$,

$$\frac{d\mathrm{F}}{d\varphi_1} d\varphi_1 + \frac{d\mathrm{F}}{d\varphi_2} d\varphi_2 + \ldots + \frac{d\mathrm{F}}{d\varphi_n} d\varphi_n = 0,$$

en sorte que, si l'on considère n systèmes d'accroissements attribués aux fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, et qu'on les dispose sur n lignes horizontales, afin de former le numérateur de la fraction qui représente (71) le déterminant du système de fonctions, il existera une même relation linéaire entre les n termes de chaque ligne horizontale. On sait qu'un tel déterminant est nul, le déterminant du système de fonctions, dont il est le numérateur, est donc égal à zéro. C'est ce qu'il fallait démontrer.

74. Réciproquement, si le déterminant du système de n fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, est égal à zéro, il existe entre ces n fonctions une relation indépendante des valeurs attribuées aux variables.

Supposons, en effet, qu'une telle relation n'existe pas; on pourra alors attribuer à $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ des valeurs arbitraires et indépendantes les unes des autres, et il en résultera pour $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des valeurs correspondantes déterminées. Posons donc

$$\varphi_1 = a_1, \quad \varphi_2 = a_2, \quad \ldots, \quad \varphi_n = a_n.$$

Si nous attribuons à ces fonctions des accroissements infiniment petits, $d\varphi_1$, $d\varphi_2, \ldots, d\varphi_n$, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ prendront des valeurs nouvelles, et recevront des accroissements déterminés $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$ qui satisferont (56) aux relations

$$\begin{aligned}
&\frac{d\varphi_1}{dx_1}dx_1 + \frac{d\varphi_1}{dx_2}dx_2 + \ldots + \frac{d\varphi_1}{dx_n}dx_n = d\varphi_1,\\
&\frac{d\varphi_2}{dx_1}dx_1 + \frac{d\varphi_2}{dx_2}dx_2 + \ldots + \frac{d\varphi_2}{dx_n}dx_n = d\varphi_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{d\varphi_n}{dx_1}dx_1 + \frac{d\varphi_n}{dx_2}dx_2 + \ldots + \frac{d\varphi_n}{dx_n}dx_n = d\varphi_n,
\end{aligned}$$

lesquelles sont par conséquent compatibles, quels que soient $d\varphi_1, d\varphi_2, \ldots, d\varphi_n$. Or cela ne peut être, puisque, par hypothèse, le déterminant du système des coefficients est égal à zéro; il y a donc contradiction à admettre que $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ puissent recevoir des accroissements arbitraires, c'est-à-dire à regarder ces fonctions comme indépendantes.

Déterminant d'un système de fonctions de fonctions.

75. La dérivée d'une fonction de fonction $F(u)$ par rapport à une variable x dont u dépend, est le produit de la dérivée par rapport à u, $\frac{dF}{du}$ par la dérivée $\frac{du}{dx}$ de u par rapport à x.

Ce théorème se généralise de la manière suivante :

Si n fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ dépendent immédiatement de n variables $u_1, u_2, \ldots, u_n$ et que $u_1, u_2, \ldots, u_n$ soient elles-mêmes des fonctions de $x_1, x_2, \ldots, x_n$; le déterminant du système des fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, par rapport aux variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, est le produit du déterminant de ce système de fonctions par rapport à $u_1, u_2, \ldots, u_n$, par le déterminant des fonctions $u_1, u_2, \ldots, u_n$, par rapport à $x_1, x_2, \ldots, x_n$. En sorte que l'on a

$$\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)}{D(u_1, u_2, \ldots, u_n)} \cdot \frac{D(u_1, u_2, \ldots, u_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}.$$

Donnons en effet aux variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, n systèmes d'accroissements infini-

ment petits

$$(A)\qquad \begin{array}{l} d_1x_1 \quad d_1x_2 \quad \dots \quad d_1x_n, \\ d_2x_1 \quad d_2x_2 \quad \dots \quad d_2x_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ d_nx_1 \quad d_nx_2 \quad \dots \quad d_nx_n, \end{array}$$

il en résultera pour $u_1, u_2, \dots, u_n$ des accroissements déterminés

$$(B)\qquad \begin{array}{l} d_1u_1 \quad d_1u_2 \quad \dots \quad d_1u_n, \\ d_2u_1 \quad d_2u_2 \quad \dots \quad d_2u_n, \\ \dots \quad \dots\dots\dots\dots \\ d_nu_1 \quad d_nu_2 \quad \dots \quad d_nu_n, \end{array}$$

et pour $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ les accroissements correspondants

$$(C)\qquad \begin{array}{l} d_1\varphi_1 \quad d_1\varphi_2 \quad \dots \quad d_1\varphi_n, \\ d_2\varphi_1 \quad d_2\varphi_2 \quad \dots \quad d_2\varphi_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ d_n\varphi_1 \quad d_n\varphi_2 \quad \dots \quad d_n\varphi_n. \end{array}$$

Le déterminant de $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$, par rapport à $x_1, x_2, \dots, x_n$, est égal au rapport du déterminant du système (C) à celui du système (A).

Le déterminant de $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$, par rapport à $u_1, u_2, \dots, u_n$, est égal au rapport du déterminant du système (C) à celui du système (B).

Le déterminant de $u_1, u_2, \dots, u_n$, par rapport à $x_1, x_2, \dots, x_n$, est égal enfin au rapport du déterminant du système (B) à celui du système (A). Et il est évident, d'après cela, que le premier de ces trois déterminants est égal au produit des deux autres. Ce qui démontre la proposition énoncée.

Déterminant d'un système de fonctions inverses.

76. La dérivée par rapport à x d'une fonction $\varphi(x)$ est l'inverse (32) de la dérivée de x par rapport à φ.

Ce théorème se généralise de la manière suivante :

Si $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ sont fonctions de $x_1, x_2, \dots, x_n$, réciproquement $x_1, x_2, \dots, x_n$ peuvent être considérés comme des fonctions de $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$. Le déterminant des fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$, par rapport à $x_1, x_2, \dots, x_n$, est égal à l'unité divisée par le déterminant des fonctions $x_1, x_2, \dots, x_n$, par rapport aux variables $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$.

Soient, en effet,

$$(A)\qquad \begin{array}{l} d_1x_1 \quad d_1x_2 \quad \dots \quad d_1x_n, \\ d_2x_1 \quad d_2x_2 \quad \dots \quad d_2x_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ d_nx_1 \quad d_nx_2 \quad \dots \quad d_nx_n, \end{array}$$

$$
(B)\qquad
\begin{array}{l}
d_1\varphi_1 \quad d_1\varphi_2 \quad \dots \quad d_1\varphi_n,\\
d_2\varphi_1 \quad d_2\varphi_2 \quad \dots \quad d_2\varphi_n,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
d_n\varphi_1 \quad d_n\varphi_2 \quad \dots \quad d_n\varphi_n,
\end{array}
$$

n systèmes d'accroissements des variables $x_1, x_2, \dots, x_n$, et les accroissements correspondants de $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$. Le déterminant de $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$, par rapport aux variables $x_1, x_2, \dots, x_n$, est (71) le rapport du déterminant du système (B) à celui du système (A); et le déterminant de $x_1, x_2, \dots, x_n$, par rapport à $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ considérées comme variables, est le rapport du déterminant du système (A) à celui du système (B), ce qui rend la proposition évidente.

Exemple. — Si l'on a deux équations

$$
(1)\qquad
\begin{aligned}
\varphi_1(x, y) &= u,\\
\varphi_2(x, y) &= v,
\end{aligned}
$$

et que l'on en déduise

$$
(2)\qquad
\begin{aligned}
x &= \psi_1(u, v),\\
y &= \psi_2(u, v),
\end{aligned}
$$

on aura la relation

$$
(3)\qquad
\frac{d\varphi_1}{dx}\frac{d\varphi_2}{dy} - \frac{d\varphi_1}{dy}\frac{d\varphi_2}{dx} = \frac{1}{\dfrac{dx}{du}\dfrac{dy}{dv} - \dfrac{dx}{dv}\dfrac{dy}{du}}.
$$

On peut vérifier directement cette formule au moyen des règles données (64) pour la différentiation des fonctions implicites.

Pour calculer, en effet, $\frac{dx}{du}$, $\frac{dy}{du}$, $\frac{dx}{dv}$, $\frac{dy}{dv}$, au moyen des équations (1), prenons successivement les dérivées de ces équations par rapport à u, en traitant v comme constant, puis par rapport à v, en traitant u comme constant. Nous aurons

$$
\begin{aligned}
\frac{d\varphi_1}{dx}\frac{dx}{du} + \frac{d\varphi_1}{dy}\frac{dy}{du} &= 1,\\
\frac{d\varphi_2}{dx}\frac{dx}{du} + \frac{d\varphi_2}{dy}\frac{dy}{du} &= 0,\\
\frac{d\varphi_1}{dx}\frac{dx}{dv} + \frac{d\varphi_1}{dy}\frac{dy}{dv} &= 0,\\
\frac{d\varphi_2}{dx}\frac{dx}{dv} + \frac{d\varphi_2}{dy}\frac{dy}{dv} &= 1;
\end{aligned}
$$

on en déduit

$$\frac{dx}{du}=\frac{\dfrac{d\varphi_2}{dy}}{\dfrac{d\varphi_1}{dx}\dfrac{d\varphi_2}{dy}-\dfrac{d\varphi_1}{dy}\dfrac{d\varphi_2}{dx}},\qquad \frac{dx}{dv}=\frac{-\dfrac{d\varphi_1}{dy}}{\dfrac{d\varphi_1}{dx}\dfrac{d\varphi_2}{dy}-\dfrac{d\varphi_1}{dy}\dfrac{d\varphi_2}{dx}};$$

$$\frac{dy}{du}=\frac{-\dfrac{d\varphi_2}{dx}}{\dfrac{d\varphi_1}{dx}\dfrac{d\varphi_2}{dy}-\dfrac{d\varphi_1}{dy}\dfrac{d\varphi_2}{dx}},\qquad \frac{dy}{dv}=\frac{\dfrac{d\varphi_1}{dx}}{\dfrac{d\varphi_1}{dx}\dfrac{d\varphi_2}{dy}-\dfrac{d\varphi_1}{dy}\dfrac{d\varphi_2}{dx}};$$

et la substitution de ces valeurs dans la formule (3) la rend identique.

Réduction du déterminant à un monôme.

77. Le théorème au moyen duquel on a transformé (71) la définition du déterminant, laisse arbitraires les n systèmes d'accroissements infiniment petits attribués aux variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$; il permet, par conséquent, de donner au déterminant plusieurs formes distinctes : nous nous bornerons à indiquer la plus remarquable, qui le réduit à un seul terme.

Parmi les $2n$ quantités, $x_1, x_2, \ldots, x_n, f_1, f_2, \ldots, f_n$, on peut en choisir n à volonté, les autres sont alors déterminées. Si donc on suppose que $n-1$ d'entre elles restent invariables, toutes les autres devront changer à la fois et les rapports de leurs accroissements infiniment petits seront déterminés. Cela posé, nous supposerons que les n systèmes d'accroissements simultanés attribués aux variables soient compris dans le tableau suivant :

$$\text{(A)}\qquad \begin{array}{llllll}
d_1x_1, & d_1x_2, & \ldots, & \ldots, & d_1x_n, & d_1f_1, \quad 0, \quad 0, \quad \ldots, \quad 0,\\
0, & d_2x_2, & \ldots, & \ldots, & d_2x_n, & d_2f_1, \quad d_2f_2, \quad 0, \quad \ldots, \quad 0,\\
0, & 0, & d_3x_3, & \ldots, & d_3x_n, & d_3f_1, \quad d_3f_2, \quad d_3f_3, \quad \ldots, \quad 0,\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
0, & 0, & \ldots, & 0, & d_nx_n, & d_nf_1, \quad d_nf_2, \quad d_nf_3, \quad \ldots, \quad d_nf_n.
\end{array}$$

La première ligne de ce tableau indique que les premiers accroissements infiniment petits attribués à $x_1, x_2, \ldots, x_n$, sont tels, que $f_2, f_3, \ldots, f_n$ ne changent pas, ce qui, comme on l'a dit, détermine complétement leurs rapports. La seconde ligne montre que les seconds accroissements adoptés, savoir $d_2x_1, d_2x_2, \ldots, d_2x_n$, sont tels, que $f_3, f_4, \ldots, f_n$ ne changent pas, et l'on suppose, de plus, $d_2x_1 = 0$. Cela détermine encore les rapports de tous les accroissements, puisque, comme dans le cas précédent, $n-1$ des quantités considérées sont supposées invariables. Enfin la dernière ligne montre que dans le $n^{ième}$ système d'accroissements, $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ restent invariables.

Après avoir profité ainsi de la liberté laissée par l'énoncé dans le choix des accroissements simultanés, on aura (71) l'expression du déterminant du système, en divisant le déterminant des quantités contenues dans le carré de droite par celui des quantités contenues dans le carré de gauche, mais, à cause des termes nuls, chacun de ces déterminants se réduit évidemment au produit des termes placés dans la diagonale, et leur rapport est

$$(1) \qquad \frac{d_1 f_1 \;\; d_2 f_2 \;\; d_3 f_3 \;\; \dots \;\; d_n f_n}{d_1 x_1 \;\; d_2 x_2 \;\; d_3 x_3 \;\; \dots \;\; d_n x_n} = \left(\frac{d_1 f_1}{d_1 x_1}\right)\left(\frac{d_2 f_2}{d_2 x_2}\right) \dots \left(\frac{d_n f_n}{d_n x_n}\right).$$

Il est donc, comme nous l'avions annoncé, réduit à un seul terme. Pour comprendre la signification des rapports $\left(\frac{d_1 f_1}{d_1 x_1}\right)$, $\left(\frac{d_2 f_2}{d_2 x_2}\right)$, $\dots$, $\left(\frac{d_n f_n}{d_n x_n}\right)$, il faut se reporter au tableau (A).

On voit par ce tableau que $\frac{d_1 f_1}{d_1 x_1}$ est le rapport de l'accroissement de f_1 à celui de x_1, lorsque $f_2, f_3, \dots, f_n$ sont supposés invariables; il faut donc, pour le calculer, exprimer f_1 en fonction des variables $x_1, f_2, f_3, \dots, f_n$, et prendre la dérivée du résultat par rapport à x_1 : de même $\frac{d_2 f_2}{d_2 x_2}$ est le rapport de l'accroissement de f_2 à celui de x_2, quand $x_1, f_3, f_4, \dots, f_n$ sont invariables; il faut donc, pour le calculer, exprimer f_2 en fonction des variables $x_1, x_2, f_3, \dots, f_n$, et prendre la dérivée du résultat par rapport à x_2. En continuant ainsi, on verra que pour calculer les facteurs du produit (1), il faut mettre les équations qui lient les $2n$ variables $x_1, x_2, \dots, x_n, f_1, f_2, \dots, f_n$, sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
f_1 &= \mathrm{F}_1(x_1, f_2, f_3, \dots, \dots, f_n),\\
f_2 &= \mathrm{F}_2(x_1, x_2, f_3, \dots, \dots, f_n),\\
f_3 &= \mathrm{F}_3(x_1, x_2, x_3, f_4, \dots, f_n),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
f_n &= \mathrm{F}_n(x_1, x_2, \dots x_n),
\end{aligned}$$

et le produit des dérivées $\frac{df_1}{dx_1}, \frac{df_2}{dx_2}, \dots, \frac{df_n}{dx_n}$, est alors le déterminant cherché.

Comme application, cherchons le déterminant du système suivant :

$$\begin{aligned}
x &= \rho \cos\theta,\\
y &= \rho \sin\theta \sin\psi,\\
z &= \rho \sin\theta \cos\psi,
\end{aligned}$$

ρ, θ et ψ étant les variables indépendantes.

On déduit de ces équations,

$$z = \sqrt{\rho^2 - x^2 - y^2},$$
$$x = \rho \cos\theta,$$
$$y = \rho \sin\theta \sin\psi.$$

Sous cette forme, l'expression de z ne contient que l'une des variables ρ, θ, ψ, celle de x en contient deux, et celle de y enfin les contient toutes trois. Le déterminant est donc, en vertu du théorème précédent,

$$\frac{dz}{d\rho}\cdot\frac{dx}{d\theta}\cdot\frac{dy}{d\psi} = \frac{\rho}{z}\cdot(-\rho\sin\theta)\,\rho\sin\theta\cos\psi = -\rho^2\sin\theta.$$

EXERCICES.

1. La condition nécessaire et suffisante pour que deux fonctions d'un nombre quelconque de variables dépendent l'une de l'autre, est que leurs dérivées partielles, par rapport aux mêmes variables, soient proportionnelles.

2. La condition nécessaire et suffisante pour que n fonctions de $n+p$ variables aient entre elles une relation indépendante de ces variables, est que les déterminants des n fonctions, par rapport à n quelconques des variables, soient égaux à zéro.

3. Si deux angles u et v sont liés à deux autres angles θ et ψ, et à trois constantes m, n, p, par les équations

$$\frac{\cos u}{m\cos\theta} = \frac{\sin u\cos v}{n\sin\theta\cos\psi} = \frac{\sin u\sin v}{p\sin\theta\sin\psi},$$

le déterminant des fonctions u et v, par rapport à θ et ψ, est

$$\frac{mnp\sin\theta}{\sin u\,(m^2\cos^2\theta + n^2\sin^2\theta\cos^2\psi + p^2\sin^2\theta\sin^2\psi)^{\frac{3}{2}}}.$$

4. Soient $u_1, u_2, \ldots, u_n$, n fonctions distinctes de n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Si l'on établit entre ces fonctions une relation

$$F_1(u_1, u_2, \ldots, u_n) = 0,$$

on pourra, en vertu de cette relation, exprimer l'une des variables, x_n par exemple, en

fonction des $n-1$ autres, et il sera permis de regarder $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$, comme fonctions de $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$; on aura alors

$$\frac{\mathrm{D}(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1})}{\mathrm{D}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})} = \frac{\dfrac{d\mathrm{F}_1}{du_n}}{\dfrac{d\mathrm{F}_1}{dx_n}} \frac{\mathrm{D}(u_1, u_2, \ldots, u_n)}{\mathrm{D}(x_1, x_2, \ldots, x_n)},$$

la dérivée $\dfrac{d\mathrm{F}_1}{dx_n}$ étant prise en ayant égard à ce que $u_1, u_2, \ldots, u_n$ sont des fonctions de x_n.

5. Les données étant les mêmes que dans la question précédente, si l'on se donne une seconde relation

$$\mathrm{F}_2(u_1, u_2, \ldots, u_n) = 0,$$

et que l'on regarde, par suite, $u_1, u_2, \ldots, u_{n-2}$, comme fonctions de $x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}$, on aura

$$\frac{\mathrm{D}(\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2)}{\mathrm{D}(x_n, x_{n-1})} \cdot \frac{\mathrm{D}(u_1, u_2, \ldots, u_{n-2})}{\mathrm{D}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-2})} = \frac{\mathrm{D}(\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2)}{\mathrm{D}(u_n, u_{n-1})} \cdot \frac{\mathrm{D}(u_1, u_2, \ldots, u_n)}{\mathrm{D}(x_1, x_2, \ldots, x_n)}.$$

6. Si l'on pose

$$u_1 = \frac{x_1}{x_n}, \quad u_2 = \frac{x_2}{x_n}, \ldots, \quad u_{n-1} = \frac{x_{n-1}}{x_n},$$

x_n étant une fonction de $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ définie par l'équation

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 1,$$

on a

$$\frac{\mathrm{D}(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1})}{\mathrm{D}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})} = \frac{1}{x_n^{n+1}}.$$

7. Si l'on pose

$$\begin{aligned}
x_1 &= \cos\varphi_1, \\
x_2 &= \sin\varphi_1 \cos\varphi_2, \\
x_3 &= \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \cos\varphi_3, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_{n-1} &= \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \ldots \sin\varphi_{n-2} \cos\varphi_{n-1}, \\
x_n &= \sin\varphi_1, \sin\varphi_2 \ldots \sin\varphi_{n-1} \cos\varphi_n,
\end{aligned}$$

on a

$$\frac{\mathrm{D}(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\mathrm{D}(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)} = \sin^n\varphi_1 \sin^{n-1}\varphi_2 \sin^{n-2}\varphi_3 \ldots \sin^2\varphi_{n-1} \sin\varphi_n.$$

CHAPITRE IV.

THÉORIE ANALYTIQUE DES TANGENTES ET DES PLANS TANGENTS.

Équations de la tangente et de la normale à une courbe plane.

78. Lorsqu'une courbe plane est définie par une équation connue entre les coordonnées rectilignes x et y de ses points, on peut, d'après ce qui a été dit (24), trouver l'équation de la tangente à cette courbe. On a vu, en effet, que le coefficient angulaire de cette tangente, au point dont les coordonnées sont x et y, est la dérivée $\frac{dy}{dx}$ de y par rapport à x, et les chapitres précédents font connaître le moyen de la calculer.

En représentant par t et u les coordonnées d'un point quelconque de la tangente dont le point de contact a pour coordonnées x et y, l'équation de cette tangente est

$$u - y = \frac{dy}{dx}(t - x). \tag{1}$$

La normale qui lui est perpendiculaire et qui passe également par le point dont les coordonnées sont x et y, a pour équation

$$u - y = -\frac{dx}{dy}(t - x), \tag{2}$$

ou, ce qui revient au même,

$$(u - y)\,dy + (t - x)\,dx = 0. \tag{3}$$

79. L'équation de la normale peut s'obtenir plus directement. Soient, en effet, t et u les coordonnées d'un point de la normale; le cercle dont ce point est le centre et qui passe par le pied x, y de la normale, a une équation de la forme

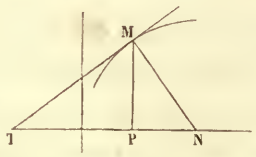
$$(y - u)^2 + (x - t)^2 = R^2, \tag{1}$$

x et y désignant les coordonnées de l'un quelconque de ses points. En différentiant cette équation, on en conclut

$$(y - u)\,dy + (x - t)\,dx = 0, \tag{2}$$

et comme ce cercle touche évidemment la courbe proposée au point dont les coordonnées sont x et y, le rapport $\frac{dy}{dx}$ a la même valeur en ce point, pour le cercle et pour la courbe; on peut donc, dans l'équation (2), regarder dy et dx comme se rapportant à la courbe, et elle ne diffère pas alors de l'équation déjà trouvée (78) entre t et u.

80. Les axes de coordonnées étant rectangulaires, si l'on abaisse, du point de contact M, l'ordonnée MP, la ligne PT, comprise entre le point P et l'intersection T de la tangente avec l'axe des X, reçoit le nom de *sous-tangente*.



On la désigne abréviativement par S_t; MN étant la normale, PN est la *sous-normale* que nous désignerons par S_n, enfin MT et MN reçoivent respectivement les noms de *tangente* et de *normale*. Les expressions de ces quatre lignes s'obtiennent immédiatement d'après les équations de la tangente et de la normale : on trouve

$$\mathrm{PT} = \mathrm{S}_t = y\frac{dx}{dy}, \quad \mathrm{MT} = t = \sqrt{y^2 + y^2\left(\frac{dx}{dy}\right)^2} = y\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2},$$

$$\mathrm{PN} = \mathrm{S}_n = y\frac{dy}{dx}, \quad \mathrm{MN} = \mathrm{N} = \sqrt{y^2 + y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

La sous-tangente et la sous-normale ont un signe que les formules précédentes donnent exactement, si l'on convient de regarder la sous-tangente comme positive quand la ligne TP est dirigée dans le sens des X positifs, et la sous-normale comme positive quand PN est dirigé dans le même sens. Nous ne nous arrêterons pas à cette discussion, qui n'offre ni difficulté ni intérêt.

81. On a souvent besoin d'introduire dans les calculs les angles formés par la tangente ou la normale à une courbe avec les axes de coordonnées, et il est nécessaire d'éviter toute ambiguïté sur le sens dans lequel ces angles sont comptés.

Le coefficient angulaire de l'équation de la tangente est $\frac{dy}{dx}$; si donc α désigne l'angle formé par la partie positive de l'axe des X avec la portion de cette tangente supérieure à l'axe, on a

$$\text{(1)} \qquad \operatorname{tang}\alpha = \frac{dy}{dx}.$$

La direction de la normale se détermine par les angles λ et μ, que forme, avec les axes, la perpendiculaire abaissée de l'origine des coordonnées sur la tangente. La perpendiculaire pouvant être prise dans un sens ou dans l'autre, les angles λ et μ sont affectés d'une certaine indétermination, et l'on peut les changer *tous deux en même temps*, en leurs suppléments. Le rapport $\frac{\cos\lambda}{\cos\mu}$ est, néanmoins, parfaitement déterminé, et l'on a, quelle que soit celle des directions opposées que l'on adopte,

$$\frac{\cos\mu}{\cos\lambda} = -\frac{dx}{dy}, \tag{2}$$

ou, ce qui revient au même,

$$\cos\lambda\, dx + \cos\mu\, dy = 0. \tag{3}$$

L'équation de la courbe étant

$$F(x, y) = 0,$$

le rapport $\frac{dy}{dx}$ est fourni par l'équation

$$\frac{dF}{dx}\, dx + \frac{dF}{dy}\, dy = 0, \tag{4}$$

d'après laquelle l'équation (2) équivaut à

$$\frac{\frac{dF}{dx}}{\cos\lambda} = \frac{\frac{dF}{dy}}{\cos\mu}. \tag{5}$$

Ainsi donc : les cosinus des angles que forme la normale à une courbe plane avec les axes de coordonnées, sont proportionnels aux dérivées partielles du premier membre de l'équation de la courbe.

La somme des carrés de ces cosinus étant, pour une droite quelconque, égale à l'unité, on en conclut

$$\cos\lambda = \pm \frac{\frac{dF}{dx}}{\sqrt{\left(\frac{dF}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dy}\right)^2}},$$

$$\cos\mu = \pm \frac{\frac{dF}{dy}}{\sqrt{\left(\frac{dF}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dy}\right)^2}}, \tag{6}$$

les signes supérieurs ou inférieurs devant être pris en même temps à cause de l'équation (5).

82. On distingue quelquefois sur la normale à une courbe la direction extérieure et la direction intérieure à la courbe. Pour définir ces deux directions, il faut regarder la courbe dont l'équation est

$$F(x, y) = 0,$$

comme partageant le plan en deux parties, l'une extérieure à la courbe et définie par la condition $F(x, y) > 0$, et l'autre intérieure, définie par la condition $F(x, y) < 0$. Cela posé, si nous nommons normale *extérieure* celle qui est dirigée vers la portion du plan extérieure à la courbe, λ et μ étant les angles formés par cette normale avec les directions des axes positifs, on aura toujours

$$\cos\lambda = + \frac{\frac{dF}{dx}}{\sqrt{\left(\frac{dF}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dy}\right)^2}},$$

$$\cos\mu = + \frac{\frac{dF}{dy}}{\sqrt{\left(\frac{dF}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dy}\right)^2}}.$$

Si nous portons, en effet, sur la normale extérieure une longueur infiniment petite ε, les coordonnées de son extrémité seront

$$x + \varepsilon\cos\lambda, \quad y + \varepsilon\cos\mu.$$

Or on a (53), en négligeant les infiniment petits du second ordre,

$$F(x + \varepsilon\cos\lambda,\ y + \varepsilon\cos\mu) = F(x, y) + \frac{dF}{dx}\varepsilon\cos\lambda + \frac{dF}{dy}\varepsilon\cos\mu,$$

et puisque $F(x, y)$ est nul, le second membre se réduit à

$$\varepsilon\left(\frac{dF}{dx}\cos\lambda + \frac{dF}{dy}\cos\mu\right),$$

c'est-à-dire, en remplaçant $\cos\lambda$ et $\cos\mu$ par leurs valeurs (81),

$$F(x + \varepsilon\cos\lambda, y + \varepsilon\cos\mu) = \pm\varepsilon\left[\frac{\left(\frac{dF}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dy}\right)^2}{\sqrt{\left(\frac{dF}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dy}\right)^2}}\right] = \pm\varepsilon\sqrt{\left(\frac{dF}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dy}\right)^2}.$$

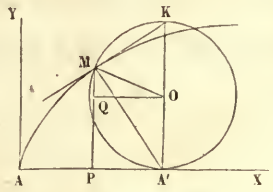
L'extrémité de la longueur ε étant, par hypothèse, extérieure à la courbe, la valeur correspondante de F est positive, et il faut, par conséquent, dans le second membre, adopter les signes supérieurs, ce qui exige qu'on les adopte aussi dans les valeurs de $\cos\lambda$ et de $\cos\mu$.

Détermination de quelques tangentes.

83. Donnons maintenant quelques exemples de détermination de tangentes, en choisissant, de préférence, les problèmes déjà traités par des considérations géométriques.

PROBLÈME I. — *Tangente à la cycloïde.*

Soient AX la droite sur laquelle roule le cercle générateur, A le point de contact de ce cercle dans sa position initiale, A′ le point de contact du cercle dans une se-



conde position, M la position correspondante du point générateur; on aura, par la définition même du roulement,

$$\text{A}'\text{M} = \text{A}'\text{A}.$$

Si l'on prend pour axe des X la ligne AX, et pour axe des Y une perpendiculaire élevée en A, les deux coordonnées du point M seront,

$$\text{MP} = y, \quad \text{PA} = x,$$

et l'on aura, en désignant par a le rayon du cercle et par u l'angle MOA′,

$$y = \text{QP} + \text{MQ} = a - a\cos u,$$

$$x = \text{AA}' - \text{OQ} = au - a\sin u.$$

Les deux équations

$$y = a(1 - \cos u), \tag{1}$$

$$x = a(u - \sin u), \tag{2}$$

donneraient, par l'élimination de u, l'équation de la cycloïde. Cette élimination est facile, car on tire de la première de ces équations,

$$u = \arccos\left(1 - \frac{y}{a}\right),$$

et l'on peut porter cette valeur dans la seconde équation, en remarquant en outre que l'on a

$$\sin u = \sqrt{\frac{2y}{a} - \frac{y^2}{a^2}};$$

mais il est plus simple de différentier directement les équations (1) et (2). On en déduit

$$dy = a \sin u du,$$

$$dx = a(1 - \cos u)\, du,$$

d'où l'on conclut

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin u}{1 - \cos u} = \cot \frac{1}{2} u.$$

La tangente ayant pour coefficient angulaire $\cot \frac{1}{2} u$, l'angle qu'elle forme avec l'axe des X est égal à $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} u$, et la normale fait avec le même axe l'angle $\frac{1}{2} u$. On en conclut, conformément à ce qui a été dit (14), que la normale est MA′, et la tangente MK.

De l'équation

$$\frac{dy}{dx} = \cot \frac{1}{2} u$$

on peut déduire l'expression de $\frac{dy}{dx}$ en fonction de y, dont nous aurons à faire usage. On a, en effet,

$$\cos u = \frac{a - y}{a},$$

$$\sin u = \frac{\sqrt{2ay - y^2}}{a},$$

$$1 - \cos u = \frac{y}{a};$$

par suite,

$$\frac{dy}{dx} = \cot \frac{1}{2} u = \frac{\sin u}{1 - \cos u} = \sqrt{\frac{2a - y}{y}}.$$

Cette équation prend une autre forme si, laissant les axes parallèles à leur direction actuelle et changeant le sens de l'axe des Y, on transporte l'origine des coordonnées au sommet de la courbe, dont l'ordonnée est $2a$. Les formules de transformation sont

$$y = 2a - y_1, \quad x = x_1 + \pi a,$$

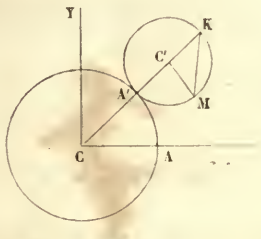
et l'on a, en supprimant l'indice de y,

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{y}{2a - y}}.$$

Problème II. — *Tangente à l'épicycloïde.*

L'épicycloïde est la courbe engendrée par un point de la circonférence d'un

cercle mobile roulant sur un cercle fixe, de telle sorte que les arcs des deux circonférences, dont les points s'appliquent successivement les uns sur les autres, soient constamment égaux en longueur.



Considérons un cercle de rayon r roulant sur une circonférence fixe de rayon R. Soit A la position initiale de l'un des points de la circonférence mobile; lorsque cette circonférence sera venue, dans son mouvement, toucher la circonférence fixe en A', le point A sera venu en M à l'extrémité de l'arc A'M, égal en longueur à A'A. Si l'on prend pour axes de coordonnées deux diamètres rectangulaires CX et CY de la circonférence fixe, dont le premier, CX, passe par le point A; en posant $A'CA = \varphi$, on aura $A'C'M = \varphi\,\frac{R}{r}$, et les coordonnées du point M seront

$$x = (R + r)\cos\varphi - r\cos\left(\varphi + \frac{R\varphi}{r}\right),$$

$$y = (R + r)\sin\varphi - r\sin\left(\varphi + \frac{R\varphi}{r}\right),$$

on en déduit

$$dy = (R + r)\left[\cos\varphi - \cos\left(\varphi + \frac{R\varphi}{r}\right)\right]d\varphi,$$

$$dx = (R + r)\left[-\sin\varphi + \sin\left(\varphi + \frac{R\varphi}{r}\right)\right]d\varphi,$$

et par suite

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos\varphi - \cos\varphi\left(\varphi + \frac{R\varphi}{r}\right)}{\sin\left(\varphi + \frac{R\varphi}{r}\right) - \sin\varphi} = \operatorname{tang}\left(\varphi + \frac{R\varphi}{2r}\right).$$

Or en joignant KM, on voit que l'angle formé par cette droite avec l'axe des X est précisément $\varphi + \frac{R\varphi}{2r}$; elle est donc la tangente au point M; et la normale est par conséquent dirigée vers le point A'.

Problème III. — *On abaisse, d'un point* O, *des perpendiculaires sur les tangentes d'une courbe plane; déterminer la tangente à la courbe lieu des pieds de ces perpendiculaires.*

Pour résoudre ce problème, dont la solution géométrique a été donnée (14), prenons pour origine des coordonnées le point O; soient x, y les coordonnées d'un point M de la courbe donnée, l'équation de la tangente MP est

$$u - y = \frac{dy}{dx}(t - x). \tag{1}$$

Celle de la perpendiculaire OP,

$$u = -\frac{dx}{dy}t. \tag{2}$$

Si entre ces deux équations et celle de la courbe donnée, on élimine y et x, on obtiendra l'équation de la courbe lieu des points P; mais, pour déterminer la tangente, cette élimination n'est pas nécessaire. Éliminons en effet entre les équations (1) et (2) le rapport $\frac{dy}{dx}$, nous obtiendrons la relation suivante, entre les coordonnées u et t du point P,

$$u - y = -\frac{t}{u}(t - x),$$

c'est-à-dire

$$u^2 + t^2 = uy + tx, \tag{3}$$

et en différentiant cette équation,

$$2u\,du + 2t\,dt = u\,dy + t\,dx + y\,du + x\,dt. \tag{4}$$

Or on déduit de l'équation (2)

$$u\,dy + t\,dx = 0.$$

L'équation (4) devient donc

$$2u\,du + 2t\,dt = y\,du + x\,dt,$$

d'où l'on déduit

$$\frac{du}{dt} = \frac{\frac{x}{2} - t}{u - \frac{y}{2}},$$

et l'on voit que la tangente cherchée, dont le coefficient angulaire est $\frac{du}{dt}$, est perpendiculaire à la ligne qui joint le point P du lieu, au point milieu de OM dont les coordonnées sont $\frac{x}{2}$ et $\frac{y}{2}$. Ce qui équivaut au résultat trouvé (14).

Problème IV. — *On abaisse d'un point* O *des perpendiculaires sur les tangentes*

d'une courbe plane, et l'on prolonge chaque perpendiculaire OP *jusqu'en un point* Q, *tel que*

$$OP.OQ = a^2,$$

a étant une ligne donnée. Trouver la tangente à la courbe lieu des points Q.

La solution géométrique de ce problème a été donnée (14). L'analyse conduit facilement au même résultat. En nommant x et y les coordonnées du point de contact M, l'équation de la tangente MT est

$$u - y = \frac{dy}{dx}(t - x), \tag{1}$$

et celle de la perpendiculaire OP

$$u = -\frac{dx}{dy}t. \tag{2}$$

On a d'ailleurs, en nommant x_1, y_1 les coordonnées du point Q,

$$OQ^2 = x_1^2 + y_1^2 = \frac{a^4}{OP^2} = \frac{a^4\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]}{\left(y - x\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

et en remplaçant $\frac{dy}{dx}$ par $-\frac{x_1}{y_1}$ (à cause de l'équation (2) à laquelle $u = y_1$, $t = x_1$, satisfont), il vient

$$x_1^2 + y_1^2 = \frac{a^4\left(1 + \frac{x_1^2}{y_1^2}\right)}{\left(y_1 + x\frac{x_1}{y_1}\right)^2},$$

ou, en réduisant,

$$yy_1 + xx_1 = a^2. \tag{3}$$

En différentiant cette équation, on en conclut

$$y\,dy_1 + y_1\,dy + x\,dx_1 + x_1\,dx = 0; \tag{4}$$

mais le point Q, étant sur la droite représentée par l'équation (2), on a

$$y_1\,dy + x_1\,dx = 0,$$

et l'équation (4) se réduit à

$$y\,dy_1 + x\,dx_1 = 0,$$

donc

$$\frac{dy_1}{dx_1} = -\frac{x}{y},$$

c'est-à-dire que la tangente cherchée est perpendiculaire à la droite OM, ce qui est d'accord avec le résultat trouvé (14).

84. Dans la solution des deux problèmes précédents certains termes disparaissant d'eux-mêmes de l'équation obtenue par la différentiation, il en est résulté une grande simplification dans les calculs. Cette simplification tient à une circonstance géométrique commune aux deux problèmes; elle se présenterait également dans un grand nombre de cas analogues. Voici l'énoncé général d'un problème pour lequel elle a lieu, et qui comprend les deux précédents comme cas particuliers.

PROBLÈME V. — *Déterminer la tangente à une courbe dont les points se déduisent, suivant une loi connue, des tangentes à une autre courbe donnée.*

Soit

$$\varphi(x, y) = 0$$

l'équation de la courbe donnée; l'une de ses tangentes a pour équation

$$u - y = \frac{dy}{dx}(t - x).$$

Les coordonnées x_1, y_1 du point correspondant de la courbe cherchée sont des fonctions données des coefficients de cette équation, elles ont, par conséquent, des expressions de la forme

$$x_1 = F_1\left(\frac{dy}{dx}, \quad y - x\frac{dy}{dx}\right),$$

$$y_1 = F_2\left(\frac{dy}{dx}, \quad y - x\frac{dy}{dx}\right).$$

Pour déduire de ces équations le coefficient angulaire de la tangente cherchée $\frac{dy_1}{dx_1}$, posons

$$\frac{dy}{dx} = u, \quad y - x\frac{dy}{dx} = v,$$

$$x_1 = F_1(u, v),$$

$$y_1 = F_2(u, v),$$

on aura

$$dx_1 = \frac{dF_1}{du}du + \frac{dF_1}{dv}dv,$$

$$dy_1 = \frac{dF_2}{du}du + \frac{dF_2}{dv}dv,$$

mais

$$dv = d(y - ux) = dy - u\,dx - x\,du.$$

Or, à cause de l'équation $\frac{dy}{dx} = u$, cette valeur de dv se réduit à $-x\,du$, et l'on a

$$dx_1 = \frac{dF_1}{du}\,du - x\,\frac{dF_1}{dv}\,du,$$

$$dy_1 = \frac{dF_2}{du}\,du - x\,\frac{dF_2}{dv}\,du,$$

on en conclut

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{\dfrac{dF_2}{du} - x\,\dfrac{dF_2}{dv}}{\dfrac{dF_1}{du} - x\,\dfrac{dF_1}{dv}},$$

ce qui résout le problème. La simplification du résultat tient à ce que la différentielle du se trouvant facteur commun, le rapport $\frac{dy_1}{dx_1}$ se détermine sans qu'il soit nécessaire de connaître la dérivée de $\frac{dy}{dx}$, que, sans cette circonstance, il aurait fallu calculer.

On voit que dans l'expression de dx_1 et dans celle de dy_1, les termes en dy et en dx se détruisent, et qu'il ne reste que ceux dont le multiplicateur est du. Les calculs sont donc les mêmes que si, en passant d'une tangente à la tangente infiniment voisine, on se contentait de faire varier le coefficient angulaire u, sans changer les coordonnées x et y du point de contact, et la tangente cherchée est la même que si la droite qui sert à déterminer les différents points de la courbe, tournait autour d'un point fixe : c'est ce que nous avons déjà vu (14).

85. Problème VI. — *On porte, à partir des différents points d'une courbe plane donnée, une longueur constante sur les normales à cette courbe; trouver la tangente à la courbe lieu des points ainsi obtenus.*

Soient x, y les coordonnées d'un point de la courbe donnée, t, u les coordonnées du point correspondant de la courbe qui s'en déduit; en nommant λ, μ les angles formés par la normale avec les axes, on a évidemment

$$(1)\qquad \begin{aligned} t &= x + l\cos\lambda,\\ u &= y + l\cos\mu, \end{aligned}$$

on en déduit par la différentiation

$$(2)\qquad \begin{aligned} dt &= dx + ld\cos\lambda,\\ du &= dy + ld\cos\mu. \end{aligned}$$

Multiplions la première de ces équations par $\cos\lambda$, la seconde par $\cos\mu$, et ajoutons-les ensuite, il viendra

$$(3)\qquad \cos\lambda\,dt + \cos\mu\,du = dx\cos\lambda + dy\cos\mu + l\,(\cos\lambda\,d\cos\lambda + \cos\mu\,d\cos\mu);$$

mais de l'équation

$$\cos^2\lambda + \cos^2\mu = 1,$$

on déduit, en différentiant,

$$\cos\lambda\, d\cos\lambda + \cos\mu\, d\cos\mu = 0, \tag{4}$$

d'ailleurs (81)

$$dx\cos\lambda + dy\cos\mu = 0, \tag{5}$$

et l'équation (3) devient

$$\cos\lambda\, dt + \cos\mu\, du = 0; \tag{6}$$

la comparaison des équations (5) et (6) donne

$$\frac{dt}{du} = \frac{dy}{dx},$$

les tangentes aux deux courbes sont donc parallèles, ainsi que nous l'avons trouvé géométriquement (14).

86. Problème VII. — *Lorsqu'un angle de grandeur constante se meut de telle sorte que ses côtés touchent constamment une courbe plane donnée, son sommet* P *décrit une courbe, dont la normale s'obtient en joignant le point* P *au centre du cercle qui passe par ce point et par les points* A *et* B, *où les côtés de l'angle mobile touchent la courbe donnée.*

Soit

$$y = \varphi(x)$$

l'équation de la courbe donnée; nommons α, β et α', β' les coordonnées des deux points de contact, et a la tangente trigonométrique de l'angle donné. Outre les égalités $\beta = \varphi(\alpha)$, $\beta' = \varphi(\alpha')$, on aura, pour déterminer les coordonnées x, y du point P, les équations

$$y - \beta = \frac{d\beta}{d\alpha}(x - \alpha), \tag{1}$$

$$y - \beta' = \frac{d\beta'}{d\alpha'}(x - \alpha'), \tag{2}$$

$$\frac{d\beta}{d\alpha} - \frac{d\beta'}{d\alpha'} = a\left(1 + \frac{d\beta}{d\alpha}\cdot\frac{d\beta'}{d\alpha'}\right). \tag{3}$$

Eliminant $\frac{d\beta}{d\alpha}$ et $\frac{d\beta'}{d\alpha'}$ entre ces équations, on aura

$$a[(y-\beta)(y-\beta') + (x-\alpha)(x-\alpha')] + (y-\beta')(x-\alpha) - (y-\beta)(x-\alpha') = 0. \tag{4}$$

Cette égalité, en y considérant x et y comme seules variables, représente un

cercle qui passe par le point P et les points (α, β) (α', β'). Si l'on différentie cette équation, on aura

$$
\begin{aligned}
&[2ay - a(\beta+\beta') + (\alpha'-\alpha)]\,dy + [2ax - a(\alpha+\alpha') + (\beta-\beta')]\,dx \\
&+ \left\{[(y-\beta) - a(x-\alpha)] - [(x-\alpha) + a(y-\beta)]\,\frac{d\beta'}{d\alpha'}\right\} d\alpha' \\
&- \left\{[(y-\beta') + a(x-\alpha')] - a[(y-\beta') + (x-\alpha')]\,\frac{d\beta}{d\alpha}\right\} d\alpha = 0.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Si maintenant on remplace dans l'équation (5) les valeurs de $y-\beta$ et de $y-\beta'$ tirées des équations (1) et (2), les coefficients de $d\alpha$ et $d\alpha'$ disparaîtront à cause des équations (1), (2) et (3). L'expression du coefficient différentiel $\frac{dy}{dx}$ est donc la même, soit que l'on considère, dans l'équation (4), α et α' comme variables ou comme constants. La tangente, au lieu des points P, se confond donc avec celle du cercle représenté par l'équation (4), lorsqu'on y regarde α, β, α', β' comme constants.

Remarque relative aux problèmes précédents.

87. Les problèmes précédents sont tous compris dans ce même énoncé général : les points d'une courbe Σ se déduisent par une certaine construction des points et des tangentes d'une autre courbe S ; connaissant la tangente en un point donné de la courbe S, trouver la tangente au point correspondant de la courbe Σ.

Le problème a été résolu dans les cas particuliers choisis pour exemples, mais il ne faut pas croire pour cela que la solution soit toujours possible. Si l'on choisit au hasard la construction à l'aide de laquelle les points de la courbe Σ se déduisent des points et des tangentes de la courbe S, la tangente à la courbe Σ ne sera pas déterminée lorsqu'on se donnera seulement le point correspondant de S et la tangente en ce point. Si cette détermination a été possible dans les cas particuliers que l'on a examinés, c'est que ces cas ont été choisis pour qu'il en fût ainsi.

On a déjà expliqué (84) à quoi tient, pour deux d'entre eux, la simplification qu'a présentée la solution ; nous allons montrer pourquoi le résultat demandé est impossible en général.

Soient x et y les coordonnées d'un point de la courbe S, et p le coefficient angulaire de la tangente en ce point. x_1 et y_1 étant les coordonnées au point correspondant de la courbe Σ, on aura, d'après la définition de cette courbe,

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \varphi(x, y, p), \\
y_1 &= \mathrm{F}(x, y, p),
\end{aligned}
\tag{1}
$$

φ et F étant deux fonctions dont l'énoncé détermine la nature. Or on déduit de (1)

$$dx_1 = \frac{d\varphi}{dx}\,dx + \frac{d\varphi}{dy}\,dy + \frac{d\varphi}{dp}\,dp,$$

$$dy_1 = \frac{d\mathrm{F}}{dx}\,dx + \frac{d\mathrm{F}}{dy}\,dy + \frac{d\mathrm{F}}{dp}\,dp,$$

par suite,

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{\dfrac{d\varphi}{dx} + \dfrac{d\varphi}{dy}\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{d\varphi}{dp}\dfrac{dp}{dx}}{\dfrac{d\mathrm{F}}{dx} + \dfrac{d\mathrm{F}}{dy}\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{d\mathrm{F}}{dp}\dfrac{dp}{dx}} = \frac{\dfrac{d\varphi}{dx} + p\dfrac{d\varphi}{dy} + \dfrac{d\varphi}{dp}\dfrac{dp}{dx}}{\dfrac{d\mathrm{F}}{dx} + p\dfrac{d\mathrm{F}}{dy} + \dfrac{d\mathrm{F}}{dp}\dfrac{dp}{dx}}.$$

On voit que $\frac{dy_1}{dx_1}$, coefficient angulaire de la tangente cherchée, contient non-seulement x, y et p, comme dans les cas particuliers qui ont été examinés, mais encore $\frac{dp}{dx}$. Lors donc qu'on se donnera un point de la courbe S et la tangente en ce point, la tangente au point correspondant de la courbe Σ restera, en général, indéterminée.

Tangentes aux courbes rapportées aux coordonnées polaires.

88. Lorsqu'une courbe est définie par une équation en coordonnées polaires,

$$\mathrm{F}(\omega, \rho) = 0,$$

on peut facilement déterminer, en chaque point, la direction de sa tangente. Soit M un point donné sur la courbe ayant ω et ρ pour coordonnées; soit M′ un point voisin, menons les rayons vecteurs OM, OM′, et du point O comme centre, avec OM pour rayon, décrivons un arc de cercle MP terminé au rayon OM′ : on aura évidemment

$$\mathrm{OM} = \rho, \quad \text{arc MP} = \rho\, d\omega.$$

De plus, M′P étant l'accroissement infiniment petit de ρ, peut être considéré (46) comme égal à $d\rho$; or on a, dans le triangle MM′P,

$$\frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{M'P}} = \frac{\sin \mathrm{MM'P}}{\sin \mathrm{M'MP}}.$$

A la limite, $\frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{M'P}}$ est égal à $\rho\,\frac{d\omega}{d\rho}$, le triangle MM′P est rectangle, et le rapport $\frac{\sin \mathrm{MM'P}}{\sin \mathrm{M'MP}}$ devient égal à la tangente de l'angle V formée par le rayon vecteur avec la portion de tangente dirigée du côté vers lequel l'angle ω décroît. On a donc

$$\operatorname{tang} \mathrm{V} = \rho\,\frac{d\omega}{d\rho}.$$

Lorsqu'une courbe est rapportée à des coordonnées polaires, on désigne quelquefois sous le nom de tangente, normale, sous-tangente, sous-normale, quatre lignes que nous allons définir.

Élevons par le pôle O une perpendiculaire au rayon vecteur OM; soit T l'intersection de cette perpendiculaire avec la tangente, et N son intersection avec la normale en M, MT se nomme *la tangente*, MN *la normale*, OT *la sous-tangente*, ON *la sous-normale*.

Le calcul de ces quatre lignes n'offre aucune difficulté. On a

$$\mathrm{OT} = \mathrm{S}_t = \rho \operatorname{tang} \mathrm{V} = \rho^2 \frac{d\omega}{d\rho}, \quad \mathrm{MT} = t = \sqrt{\rho^2 + \rho^4 \frac{d\omega^2}{d\rho^2}},$$

$$\mathrm{ON} = \mathrm{S}_n = \frac{\rho^2}{\mathrm{OT}} = \frac{d\rho}{d\omega}, \qquad \mathrm{MN} = \mathrm{N} = \sqrt{\rho^2 + \frac{d\rho^2}{d\omega^2}}.$$

89. Comme application des formules précédentes, déterminons la tangente à la spirale logarithmique dont l'équation est

$$\rho = ae^{m\omega},$$

on a

$$\operatorname{tang} \mathrm{V} = \rho \frac{d\omega}{d\rho} = ae^{m\omega} \frac{1}{mae^{m\omega}} = \frac{1}{m}.$$

L'angle V est donc constant et il a pour tangente $\frac{1}{m}$. Ainsi la spirale logarithmique coupe sous un angle constant les rayons vecteurs issus d'un point fixe. Si l'on suppose $m = 0$, l'angle V est droit et la spirale logarithmique devient un cercle.

Nous appliquerons encore les coordonnées polaires à la solution du problème suivant.

PROBLÈME VIII. — *D'un point fixe* O *situé dans le plan d'une courbe* S, *on mène à cette courbe des rayons vecteurs que l'on prolonge d'une quantité constante l; trouver la tangente à la courbe* Σ, *lieu des points ainsi obtenus.*

Prenons des coordonnées polaires et pour pôle le point fixe O; si l'équation de la courbe donnée est

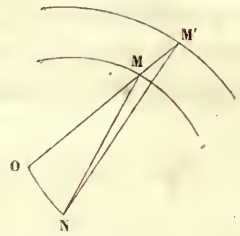
$$\rho = \varphi(\omega),$$

celle de la courbe qui s'en déduit est

$$\rho = \varphi(\omega) + l,$$

et l'on voit que la sous-normale S_n étant exprimée par $\frac{d\rho}{d\omega}$, a la même valeur pour les deux courbes, en sorte que les normales aux points correspondants vont concou-

rir sur la perpendiculaire au rayon vecteur menée par le point O ; de là résulte une construction très-simple pour la normale, et par suite pour la tangente.



Il suffit, en effet, pour obtenir la normale au point M′ de la courbe Σ, de mener la normale en M à la courbe S et de joindre M′ avec le point où cette normale rencontre la perpendiculaire ON au rayon vecteur OMM′.

90. M. William Roberts a remarqué que ρ et ω représentant les coordonnées polaires des points d'une courbe, si l'on pose

$$\rho' = \rho^n \quad \text{et} \quad \omega' = n\omega,$$

on en déduit

$$\frac{\rho\, d\omega}{d\rho} = \frac{\rho'\, d\omega'}{d\rho'},$$

et, par conséquent, la courbe dont les points ont pour coordonnées ρ' et ω' et la courbe proposée, coupent leurs rayons vecteurs correspondants sous le même angle. Il en résulte le moyen de déduire de deux courbes données, deux autres courbes qui se coupent sous le même angle qu'elles.

Si l'on considère, par exemple, les droites dont les équations sont

$$\rho\cos\omega = \alpha, \quad \rho\cos(\omega - \varphi) = \beta,$$

où α et β sont arbitraires, et φ désigne un angle constant, ces droites se coupent évidemment sous l'angle φ. On en conclut que les courbes représentées par les équations

$$\rho^n\cos n\omega = \alpha^n, \quad \rho^n\cos(n\omega - \varphi) = \beta^n$$

se coupent toujours sous l'angle φ, quelles que soient les valeurs attribuées à α et β. En supposant $n = 2$, on obtient le théorème suivant :

Un système d'hyperboles équilatères concentriques et semblablement placées est coupé par un autre système de même nature sous un angle constant, double de celui que font les axes des deux systèmes.

Si l'on fait $n = \frac{1}{2}$, les courbes deviennent des paraboles de même foyer, et l'on a le théorème suivant : *Toutes les paraboles ayant le même foyer et le même axe,*

sont coupées par des paraboles de même foyer, mais d'axe différent, sous un angle moitié de celui que font les axes des deux systèmes de courbes.

M. Roberts a déduit de sa remarque un grand nombre de théorèmes, dont quelques-uns sont indiqués comme exercices à la fin du chapitre.

Tangentes aux courbes à double courbure.

91. Soient $\varphi(x, y, z) = 0$, $\psi(x, y, z) = 0$, les équations d'une courbe à double courbure; cherchons sa tangente en un point donné.

La tangente est la limite de la ligne qui joint deux points infiniment voisins, et l'on sait (13) que l'on peut, sans changer cette limite, remplacer l'un des deux points par un autre, qui en soit situé à une distance infiniment petite du second ordre. Si donc x, y, z sont les coordonnées du premier point, on pourra regarder celles du second comme égales à $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$; on sait en effet (46) que dy et dz ne diffèrent des accroissements véritables de y et de z que par des infiniment petits du second ordre.

Si t, u, v désignent les coordonnées d'un point quelconque de la droite qui joint les deux points dont les coordonnées sont x, y, z, $x + dx, y + dy, z + dz$, les équations de cette droite sont

$$\frac{t - x}{dx} = \frac{u - y}{dy} = \frac{v - z}{dz}.$$

Pour avoir, sous forme finie, les équations de la tangente, il suffit donc de trouver trois quantités finies proportionnelles à dx, dy, dz, et d'écrire que ces quantités sont aussi proportionnelles à $t - x$, $u - y$, $v - z$; or on a trouvé (62)

$$\frac{dx}{\frac{d\varphi}{dz}\frac{d\psi}{dy} - \frac{d\varphi}{dy}\frac{d\psi}{dz}} = \frac{dy}{\frac{d\varphi}{dx}\frac{d\psi}{dz} - \frac{d\varphi}{dz}\frac{d\psi}{dx}} = \frac{dz}{\frac{d\varphi}{dy}\frac{d\psi}{dx} - \frac{d\varphi}{dx}\frac{d\psi}{dy}}.$$

Les équations de la tangente sont donc

$$\frac{t - x}{\frac{d\varphi}{dz}\frac{d\psi}{dy} - \frac{d\varphi}{dy}\frac{d\psi}{dz}} = \frac{u - y}{\frac{d\varphi}{dx}\frac{d\psi}{dz} - \frac{d\varphi}{dz}\frac{d\psi}{dx}} = \frac{v - z}{\frac{d\varphi}{dy}\frac{d\psi}{dx} - \frac{d\varphi}{dx}\frac{d\psi}{dy}}.$$

On donne quelquefois à ces équations une autre forme qu'il est bon de connaître. Elles expriment qu'il y a proportionnalité entre les différences $t - x$, $u - y$, $v - z$, et les différentielles dx, dy, dz. Or ces différentielles satisfont aux équations

$$\frac{d\varphi}{dx}dx + \frac{d\varphi}{dy}dy + \frac{d\varphi}{dz}dz = 0,$$

$$\frac{d\psi}{dx}dx + \frac{d\psi}{dy}dy + \frac{d\psi}{dz}dz = 0.$$

Si donc on écrit

$$\begin{aligned}
&\frac{d\varphi}{dx}(t-x)+\frac{d\varphi}{dy}(u-y)+\frac{d\varphi}{dz}(v-z)=0,\\
&\frac{d\psi}{dx}(t-x)+\frac{d\psi}{dy}(u-y)+\frac{d\psi}{dz}(v-z)=0,
\end{aligned}\qquad (1)$$

on aura exprimé que les différences $t-x$, $u-y$, $v-z$, ont les mêmes rapports que dx, dy, dz, et qu'elles leur sont, par conséquent, proportionnelles. Les équations (1) qui représentent deux plans sont donc, si l'on veut, celles de la tangente.

92. Les équations de la tangente à une courbe conduisent, sans difficulté, à celle du plan normal. Pour obtenir ce plan, il suffit en effet de remarquer qu'il passe par le point dont les coordonnées sont x, y, z, et qu'il est perpendiculaire à la tangente. Les formules de la géométrie analytique donnent d'après cela pour son équation

$$(t-x)\,dx+(u-y)\,dy+(v-z)\,dz=0,$$

dans laquelle dx, dy, dz, devront être remplacés par les fonctions qui leur sont proportionnelles. On peut d'ailleurs démontrer directement cette équation. Soient t, u, v, les coordonnées d'un point quelconque de l'espace, les différences $t-x$, $u-y$, $v-z$, sont proportionnelles aux cosinus des angles formés avec les axes par la droite qui joint ce point au point donné de la courbe dont les coordonnées sont x, y, z. Mais dx, dy, dz, sont proportionnels aux cosinus des angles formés par la tangente à la courbe avec les mêmes axes, et, par suite, la condition pour que ces deux directions soient perpendiculaires, c'est-à-dire pour que le point t, u, v appartienne au plan normal, est précisément

$$(t-x)\,dx+(u-y)\,dy+(v-z)\,dz=0.$$

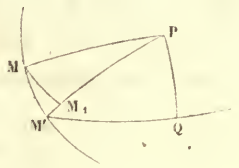
Courbes tracées sur une sphère.

93. L'étude des courbes tracées sur la sphère a conduit les géomètres à des résultats intéressants, et dont l'analogie avec les propriétés des courbes planes est digne de remarque. Nous nous bornerons à indiquer ici le système de coordonnées le plus habituellement employé pour représenter les points d'une sphère et le moyen d'obtenir la tangente à une courbe définie par une équation entre les deux coordonnées de l'un quelconque de ses points.

Considérons sur la sphère un point P, auquel nous donnerons le nom de *pôle ;* le grand cercle dont le plan est perpendiculaire au rayon qui aboutit en P, recevra le nom d'*équateur ;* les grands cercles passant par le point P seront des *méridiens,* et les petits cercles ayant leurs plans parallèles à l'équateur, des *parallèles.* Les

points de la sphère seront définis par le méridien et le parallèle sur lesquels ils se trouvent, le premier étant donné par l'angle φ, formé avec un méridien fixe, et le second par sa distance au pôle, comptée sur un arc de grand cercle. φ variant de o à 2π et θ de o à π, tous les points de la sphère sont représentés. Ce système équivaut évidemment à l'emploi de la latitude et longitude géographiques à la surface de la terre, φ désignant la longitude et θ le complément de la latitude.

Soit une courbe définie par une relation $F(\theta, \varphi) = o$ entre les coordonnées de ses points. Soient M un de ses points et M′ le point voisin; du point P comme pôle,



avec PM (c'est-à-dire $R\theta$) pour rayon sphérique, décrivons un petit cercle MM_1. Le triangle $MM'M_1$ pourra être considéré comme plan et l'on aura

$$\operatorname{tang} M' = \frac{MM_1}{M_1M'},$$

M′ étant l'angle formé par la courbe avec l'arc de grand cercle PM′. Or on a

$$M_1M' = R\,d\theta,$$

$$MM_1 = R \sin\theta\, d\varphi.$$

La première de ces équations est évidente, la seconde résulte de ce que MM_1 est un arc correspondant à l'angle $d\varphi$ dans un cercle de rayon $R \sin\theta$. On a donc

$$\operatorname{tang} M' = \frac{R\,d\theta}{R \sin\theta\, d\varphi} = \frac{1}{\sin\theta} \cdot \frac{d\theta}{d\varphi}.$$

Si en M′ on mène un grand cercle M′Q normal à la courbe considérée, et que du point P on abaisse un arc de grand cercle PQ, perpendiculaire sur M′Q, le triangle sphérique PQM′ donnera

$$\sin\frac{PQ}{R} = \sin\theta \cos M'.$$

Équation du plan tangent à une surface.

94. L'équation d'une surface en coordonnées rectilignes étant

$$z = \varphi(x, y),$$

si à partir d'un point de cette surface, ayant x, y, z pour coordonnées, on attribue à x et à y des accroissements infiniment petits dx et dy, on a vu (54) que

l'accroissement correspondant de z peut être considéré, en négligeant les infiniment petits du second ordre, comme égal à

$$\frac{dz}{dx}\,dx+\frac{dz}{dy}\,dy,$$

$\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$ étant les dérivées partielles de z, lorsqu'on y considère successivement x et y comme constants.

D'après cela, autour du point dont les coordonnées sont x, y, z, et à une distance infiniment petite de ce point, l'accroissement de z peut être considéré comme une fonction linéaire des accroissements de x et de y, et si l'on nomme t, u, v les coordonnées d'un point situé sur la surface à une distance infiniment petite du point x, y, z, on a, en négligeant les infiniment petits du second ordre,

$$v-z=\frac{dz}{dx}\,(t-x)+\frac{dz}{dy}\,(u-y). \tag{1}$$

Cette équation étant du premier degré en t, u, v, représente un plan qui, évidemment, passe par le point x, y, z, et qui, pour les points infiniment voisins, est à une distance infiniment petite du second ordre de la surface considérée.

Nous allons prouver que ce plan contient la tangente à une courbe quelconque située sur la surface et passant par le point considéré. Menons par ce point M, dont les coordonnées sont x, y, z, une courbe P située sur la surface, et soit, sur cette courbe, M′ un point voisin de M ayant pour coordonnées t, u, v. La tangente à la ligne P est la limite de la ligne droite MM′. Or on peut (13), dans la détermination de cette limite, substituer au point M′ tout autre point qui en soit situé à une distance infiniment petite du second ordre, et par suite remplacer le point M′ de la surface par le point du plan (1), dont les coordonnées parallèles aux x et aux y sont t et u; la troisième coordonnée v n'étant altérée, d'après ce qui précède, que d'un infiniment petit du second ordre. Mais après cette transposition du point M′, la droite MM′ est rigoureusement située dans le plan (1); il en est donc de même de sa limite, et la tangente en M à la courbe P, c'est-à-dire à une courbe quelconque menée par ce point sur la surface, est par conséquent située dans le plan (1).

Si l'équation de la surface est donnée sous la forme

$$\mathrm{F}(x,y,z)=0,$$

il faudra, pour faire usage de l'équation (1), calculer d'abord $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$, à l'aide des formules

$$\frac{d\mathrm{F}}{dx}+\frac{d\mathrm{F}}{dz}\frac{dz}{dx}=0,$$

$$\frac{d\mathrm{F}}{dy}+\frac{d\mathrm{F}}{dz}\frac{dz}{dy}=0,$$

et l'équation du plan tangent deviendra

$$(2) \qquad \frac{dF}{dx}(t-x)+\frac{dF}{dy}(u-y)+\frac{dF}{dz}(v-z)=0.$$

Le même résultat peut s'obtenir à l'aide de formules données (91) pour la détermination de la tangente à une courbe à double courbure. Considérons, en effet, sur la surface donnée dont l'équation est $F(x,y,z)=0$, la courbe qui résulte de son intersection avec une seconde surface ayant pour équation $\varphi(x,y,z)=0$, et passant par le point considéré x, y, z. On a vu (91) que la tangente à cette courbe peut être représentée par le système des équations

$$(1) \qquad (t-x)\frac{dF}{dx}+(u-y)\frac{dF}{dy}+(v-z)\frac{dF}{dz}=0,$$

$$(2) \qquad (t-x)\frac{d\varphi}{dx}+(u-y)\frac{d\varphi}{dy}+(v-z)\frac{d\varphi}{dz}=0.$$

Si la seconde surface est remplacée par une autre, assujettie seulement à passer par le point donné, la courbe d'intersection pourra prendre toutes les situations sur la première surface, et la tangente se déplacera, mais l'équation (1) restant la même, représente un plan dont cette tangente ne sort pas, et qui est précisément le plan tangent déjà trouvé par d'autres considérations.

Équations de la normale.

95. L'équation du plan tangent étant connue, on peut former facilement celles de la normale. En supposant les axes rectangulaires, la normale fait avec les axes des angles dont les cosinus sont proportionnels aux coefficients de l'équation du plan tangent; cette droite passant par le point x, y, z, les équations sont

$$(1) \qquad \frac{t-x}{\dfrac{dF}{dx}}=\frac{u-y}{\dfrac{dF}{dy}}=\frac{v-z}{\dfrac{dF}{dz}}.$$

Si l'équation de la surface est donnée sous la forme

$$z=\varphi(x,y),$$

celles de la normale deviennent

$$(2) \qquad \frac{t-x}{\left(\dfrac{dz}{dx}\right)}=\frac{u-y}{\dfrac{dz}{dy}}=-\frac{v-z}{1},$$

c'est-à-dire

$$t - x + (\nu - z)\frac{dz}{dx} = 0,$$

(3)

$$u - y + (\nu - z)\frac{dz}{dy} = 0.$$

96. On peut distinguer, à partir de chaque point d'une surface ayant pour équation $F(x, y, z) = 0$, deux directions opposées pour la normale; nous les nommerons *direction extérieure* et *direction intérieure*, la direction extérieure se dirigeant vers les points de l'espace pour lesquels on a

$$F(x, y, z) > 0,$$

et la direction intérieure vers ceux pour lesquels on a au contraire

$$F(x, y, z) < 0.$$

Si λ, μ, ν, désignent les angles de la normale extérieure avec les axes de coordonnées, on aura toujours

$$\cos\lambda = \frac{+\frac{dF}{dx}}{\sqrt{\left(\frac{dF}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dz}\right)^2}},$$

$$\cos\mu = \frac{+\frac{dF}{dy}}{\sqrt{\left(\frac{dF}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dz}\right)^2}},$$

$$\cos\nu = \frac{+\frac{dF}{dz}}{\sqrt{\left(\frac{dF}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dz}\right)^2}}.$$

Il est clair, en effet, d'après les équations (1), (95), que les trois cosinus sont proportionnels à $\frac{dF}{dx}$, $\frac{dF}{dy}$, $\frac{dF}{dz}$, et la somme de leurs carrés étant égale à l'unité, leurs valeurs doivent être égales, ou égales et de signes contraires à celles que nous venons d'écrire. Cela posé, nommons ε une longueur infiniment petite, portée sur la normale extérieure. Les coordonnées de l'extrémité de cette longueur seront

$$x + \varepsilon\cos\lambda, \quad y + \varepsilon\cos\mu, \quad z + \varepsilon\cos\nu,$$

et l'on aura, en négligeant les infiniment petits du second ordre,

$$F(x + \varepsilon\cos\lambda,\ y + \varepsilon\cos\mu,\ z + \varepsilon\cos\nu) - F(x, y, z) = \frac{dF}{dx}\varepsilon\cos\lambda + \frac{dF}{dy}\varepsilon\cos\mu + \frac{dF}{dz}\varepsilon\cos\nu.$$

Mais par hypothèse

$$F(x, y, z) = 0.$$

De plus,

$$\cos\lambda = \frac{\pm\frac{dF}{dx}}{\sqrt{\left(\frac{dF}{dx}\right)^2+\left(\frac{dF}{dy}\right)^2+\left(\frac{dF}{dz}\right)^2}},$$

$$\cos\mu = \frac{\pm\frac{dF}{dy}}{\sqrt{\left(\frac{dF}{dx}\right)^2+\left(\frac{dF}{dy}\right)^2+\left(\frac{dF}{dz}\right)^2}},$$

$$\cos\nu = \frac{\pm\frac{dF}{dz}}{\sqrt{\left(\frac{dF}{dx}\right)^2+\left(\frac{dF}{dy}\right)^2+\left(\frac{dF}{dz}\right)^2}},$$

et par conséquent,

$$F(x+\varepsilon\cos\lambda,\ y+\varepsilon\cos\mu,\ z+\varepsilon\cos\nu) = \pm\varepsilon\left[\frac{\left(\frac{dF}{dx}\right)^2+\left(\frac{dF}{dy}\right)^2+\left(\frac{dF}{dz}\right)^2}{\sqrt{\left(\frac{dF}{dx}\right)^2+\left(\frac{dF}{dy}\right)^2+\left(\frac{dF}{dz}\right)^2}}\right].$$

$$= \pm\varepsilon\sqrt{\left(\frac{dF}{dx}\right)^2+\left(\frac{dF}{dy}\right)^2+\left(\frac{dF}{dz}\right)^2}.$$

La normale ayant été menée extérieurement, le premier membre est positif, et par conséquent il faut, dans le second membre, adopter le signe supérieur, ce qui exige qu'on l'adopte également dans les équations précédentes.

97. Les formules qui font connaître la direction de la normale à une surface ayant une grande importance, il ne sera pas inutile de les démontrer directement, indépendamment de l'équation du plan tangent.

Soit

$$F(x, y, z) = 0$$

l'équation d'une surface : si, partant d'un point de cette surface dont les coordonnées sont x, y, z, on passe à un point voisin dont les coordonnées sont $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$, la fonction F devant rester nulle quand on substitue aux trois variables leurs nouvelles valeurs, l'accroissement infiniment petit de F sera égal à zéro, et l'on aura

$$\frac{dF}{dx}dx + \frac{dF}{dy}dy + \frac{dF}{dz}dz = 0. \tag{1}$$

Cette équation est vraie en négligeant les infiniment petits du second ordre, si dx, dy, dz, sont rigoureusement égaux, comme on l'a supposé, aux accroissements infiniment petits de x, de y et de z; mais elle est rigoureusement exacte, si dx et dy, représentant les accroissements de x et de y, dz est égal à la différentielle de z.

laquelle ne diffère, comme on sait (53), de l'accroissement de z, que d'un infiniment petit du second ordre.

En entendant les choses de cette manière, l'équation (1), qui est rigoureusement exacte, prouve que la droite qui fait avec les axes des angles dont les cosinus sont proportionnels à $\frac{dF}{dx}, \frac{dF}{dy}, \frac{dF}{dz}$, est perpendiculaire à celle qui forme des angles dont les cosinus sont proportionnels à dx, dy, dz; cette dernière direction étant celle de la droite qui réunit deux points infiniment voisins de la surface, est celle d'une quelconque de ses tangentes, et la première est par conséquent celle d'une droite perpendiculaire sur toutes les tangentes, c'est-à-dire de la normale.

Détermination de quelques plans tangents.

98. Nous appliquerons les formules précédentes à quelques exemples.

Exemple I. — Cherchons le plan tangent à la surface représentée par l'équation

$$x - az - \varphi(y - bz) = 0. \tag{1}$$

L'équation du plan tangent est, d'après les formules précédentes,

$$t - x - (u - y)\,\varphi'(y - bz) - [a - b\,\varphi'(y - bz)]\,(v - z) = 0.$$

Les cosinus des angles formés par la normale avec les axes de coordonnées sont proportionnels à

$$1, \quad -\varphi', \quad -a + b\varphi',$$

et comme on a

$$a + (-\varphi')\,b + (b\varphi' - a) = 0,$$

on voit que la normale de la surface est perpendiculaire à la droite dont les équations sont

$$x = az, \qquad y = bz,$$

et que par suite le plan tangent est parallèle à cette droite.

L'équation (1) représente en effet une surface cylindrique dont les génératrices sont parallèles à la droite $x = az$, $y = bz$, et le plan tangent, contenant toujours une génératrice, doit être, comme on l'a trouvé, parallèle à cette droite.

Exemple II. — Considérons, en second lieu, la surface dont l'équation est

$$ax + by + z = \varphi(x^2 + y^2 + z^2), \tag{1}$$

le plan tangent a pour équation

$$(t - x)\,(a - 2x\varphi') + (u - y)\,(b - 2y\varphi') + (v - z)\,(1 - 2z\varphi') = 0.$$

La normale a pour équations

$$\frac{t - x}{a - 2x\varphi'} = \frac{u - y}{b - 2y\varphi'} = \frac{v - z}{1 - 2z\varphi'}. \tag{2}$$

La surface représentée par l'équation (1) est de révolution autour de la droite dont les équations sont

$$t = av,$$

$$u = bv.$$

La géométrie montre que cette droite est rencontrée par toutes les normales à la surface. Il est d'ailleurs facile de le vérifier d'après leur équation générale trouvée plus haut.

Si, en effet, dans les équations (2) on remplace t par av et u par bv, elles deviennent

$$\frac{av - x}{a - 2x\varphi'} = \frac{bv - y}{b - 2y\varphi'} = \frac{v - z}{1 - 2z\varphi'},$$

auxquelles on peut satisfaire en posant

$$v = \frac{1}{2\varphi'}.$$

99. Nous résoudrons enfin quelques problèmes, dans lesquels nous nous proposerons de déterminer le plan tangent à une surface suffisamment définie, mais dont l'équation n'est pas donnée.

PROBLÈME I. — *On abaisse d'un point* O *une perpendiculaire* OP *sur le plan tangent d'une surface* S *donnée par son équation; trouver le plan tangent à la surface* Σ *décrite par le pied* P *de cette perpendiculaire.*

Soient x, y, z les coordonnées d'un point de la surface S, le plan tangent en ce point a pour équation

$$(1) \qquad v - z = \frac{dz}{dx}(t - x) + \frac{dz}{dy}(u - y),$$

la perpendiculaire abaissée de l'origine sur ce plan est représentée par les équations

$$(2) \qquad t + v\frac{dz}{dx} = 0, \qquad u + v\frac{dz}{dy} = 0.$$

Si entre les équations (1) et (2) on élimine $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$, on obtient la relation

$$(3) \qquad (v - z)v + (t - x)t + (u - y)u = 0,$$

qui a lieu entre les coordonnées x, y, z d'un point M de la surface S, et les coordonnées t, u, v du point correspondant P de la surface Σ.

En différentiant cette équation, on trouve

$$(2v - z)\,dv + (2t - x)\,dt + (2u - y)\,du - v\,dz - t\,dx - u\,dy = 0.$$

D'ailleurs on a

$$t\,dx + u\,dy + v\,dz = 0.$$

t, u, v sont en effet proportionnels aux cosinus des angles formés avec les axes par la perpendiculaire abaissée de l'origine sur le plan tangent à la surface S au point M, et dx, dy, dz sont proportionnels aux cosinus des angles formés, avec les axes, par la ligne qui joint, sur cette surface, le point x, y, z à un point infiniment voisin, et il est clair que ces deux directions sont perpendiculaires. L'équation (4) se réduit, par suite, à

$$(2t - x)\,dt + (2u - y)\,du + (2v - z)\,dv = 0. \tag{5}$$

Elle prouve que la droite qui fait, avec les axes, des angles dont les cosinus sont proportionnels à dt, du, dv, c'est-à-dire une tangente quelconque à la surface Σ au point P, est perpendiculaire à celle qui fait des angles dont les cosinus sont proportionnels à $(2t - x)$, $(2u - y)$, $(2v - z)$, c'est-à-dire à la droite qui joint le point dont les coordonnées sont t, u, v, à celui dont les coordonnées sont $\frac{x}{2}, \frac{y}{2}, \frac{z}{2}$. Il résulte de là que, comme on l'a démontré (14), la normale à la surface Σ passe par le milieu de la droite OM dont les coordonnées sont $\frac{x}{2}, \frac{y}{2}, \frac{z}{2}$.

PROBLÈME II. — *On abaisse d'un point* O *une perpendiculaire sur le plan tangent d'une surface* S *donnée par son équation, et l'on prolonge cette perpendiculaire* OP *jusqu'au point* Q, *tel que*

$$OP.OQ = a^2,$$

a étant une ligne donnée. Trouver le plan tangent à la surface Σ, *lieu des points* Q.

Soient M le point de contact du plan tangent à la surface S, et x, y, z les coordonnées de ce point. L'équation du plan tangent est

$$v - z = (t - x)\frac{dz}{dx} + (u - y)\frac{dz}{dy}; \tag{1}$$

la perpendiculaire OP a pour équations, comme dans le problème précédent,

$$t + v\frac{dz}{dx} = 0, \quad u + v\frac{dz}{dy} = 0, \tag{2}$$

et si l'on nomme x_1, y_1, z_1 les coordonnées du point Q, on aura par conséquent

$$x_1 + z_1 \frac{dz}{dx} = 0, \qquad y_1 + z_1 \frac{dz}{dy} = 0,$$

$$OQ^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = \frac{a^4}{OP^2} = \frac{a^4 \left[1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right]}{\left(x \frac{dz}{dx} + y \frac{dz}{dy} - z\right)^2}.$$

Éliminant $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$ entre les équations précédentes, il vient

$$(3) \qquad x x_1 + y y_1 + z z_1 = a^2.$$

Cette seule équation suffit, comme nous allons le voir, pour la détermination du plan tangent cherché. Elle donne, en effet, par la différentiation,

$$(4) \qquad 0 = x\,dx_1 + y\,dy_1 + z\,dz_1 + x_1\,dx + y_1\,dy + z_1\,dz.$$

Or on a

$$x_1\,dx + y_1\,dy + z_1\,dz = 0,$$

car la ligne OP forme avec les axes des angles dont les cosinus sont proportionnels à x_1, y_1, z_1, et cette ligne étant perpendiculaire au plan tangent de la surface donnée, fait un angle droit avec une tangente à la surface S, qui forme avec les axes des angles dont les cosinus sont proportionnels à dx, dy, dz.

L'équation (4) devient donc

$$(5) \qquad 0 = x\,dx_1 + y\,dy_1 + z\,dz_1,$$

et elle exprime que la droite qui fait avec les axes des angles dont les cosinus sont proportionnels à dx_1, dy_1, dz_1, est perpendiculaire à celle qui forme des angles dont les cosinus sont proportionnels à x, y, z, c'est-à-dire qu'une tangente quelconque à la surface lieu des points Q, est perpendiculaire à la droite OM qui joint l'origine O au point correspondant M de la surface S. Le plan tangent cherché est donc perpendiculaire à cette ligne OM, ce qui s'accorde avec le résultat trouvé (14).

100. Les solutions des deux problèmes précédents ont présenté une simplification remarquable qui tient à une circonstance géométrique qui leur est commune; cette simplification se présenterait également pour tous les problèmes renfermés dans l'énoncé suivant :

PROBLÈME III. — *Les points d'une surface* Σ *se déduisent, suivant une certaine loi donnée, mais d'ailleurs quelconque, des plans tangents d'une surface donnée* S : *trouver le plan tangent en un point de la surface* Σ.

Soient x, y, z les coordonnées d'un point de la surface S; le plan tangent en ce

point a pour équation

$$v - z = (t - x)\frac{dz}{dx} + (u - y)\frac{dz}{dy}.$$

Les coordonnées x_1, y_1, z_1 du point correspondant de la surface Σ sont, par hypothèse, des fonctions données des coefficients de cette équation. Si donc on pose

$$\frac{dz}{dx} = p, \qquad \frac{dz}{dy} = q,$$

$$z - px - qy = u,$$

on aura

$$x_1 = \varphi_1(p, q, u),$$
$$y_1 = \varphi_2(p, q, u),$$
$$z_1 = \varphi_3(p, q, u),$$

et par suite

$$dx_1 = \frac{d\varphi_1}{dp}dp + \frac{d\varphi_1}{dq}dq + \frac{d\varphi_1}{du}du,$$

$$dy_1 = \frac{d\varphi_2}{dp}dp + \frac{d\varphi_2}{dq}dq + \frac{d\varphi_2}{du}du,$$

$$dz_1 = \frac{d\varphi_3}{dp}dp + \frac{d\varphi_3}{dq}dq + \frac{d\varphi_3}{du}du.$$

Mais de l'équation

$$u = z - px - qy$$

on déduit

$$du = dz - p\,dx - q\,dy - x\,dp - y\,dq,$$

c'est-à-dire, comme on a, (54), $dz = p\,dx + q\,dy$,

$$du = -x\,dp - y\,dq.$$

Par suite,

$$dx_1 = \left(\frac{d\varphi_1}{dp} - \frac{x\,d\varphi_1}{du}\right)dp + \left(\frac{d\varphi_1}{dq} - \frac{y\,d\varphi_1}{du}\right)dq,$$

$$dy_1 = \left(\frac{d\varphi_2}{dp} - \frac{x\,d\varphi_2}{du}\right)dp + \left(\frac{d\varphi_2}{dq} - \frac{y\,d\varphi_2}{du}\right)dq,$$

$$dz_1 = \left(\frac{d\varphi_3}{dp} - \frac{x\,d\varphi_3}{du}\right)dp + \left(\frac{d\varphi_3}{dq} - \frac{y\,d\varphi_3}{du}\right)dq.$$

En éliminant dp et dq entre ces équations, on obtiendra une relation de la forme

$$A\,dx_1 + B\,dy_1 + C\,dz_1 = 0,$$

dont on conclura, comme on l'a fait pour les équations (5) des problèmes I et II,

que la normale à la surface Σ au point x_1, y_1, z_1, fait avec les axes des angles dont les cosinus sont proportionnels à A, B, C.

Le succès de la méthode tient, on le voit, à ce que *du* s'exprimant en fonction de *dp* et de *dq*, on peut, sans différentiations nouvelles, former une relation du premier degré entre dx_1, dy_1, dz_1. On peut remarquer que les valeurs de dx_1, dy_1, dz_1, ne contenant que *dp* et *dq*, le plan tangent à la surface Σ est le même que si le plan dont on déduit les points de cette surface changeait de direction en passant toujours par le même point M; car *p* et *q* sont les coefficients angulaires de l'équation du plan, et les variations *dx*, *dy*, *dz* des coordonnées du point de contact ont entièrement disparu du résultat.

Ce résultat s'accorde avec ce qui a été dit (14).

101. Lorsque les points d'une surface se déduisent des points d'une autre surface et des plans tangents en ces points, le plan tangent en un point de la surface ainsi formée ne peut pas toujours se déduire de la connaissance du point et du plan tangent correspondant de la surface primitive. Nous donnerons cependant deux exemples de problèmes pour lesquels il en est ainsi.

PROBLÈME IV. — *A partir des différents points d'une surface donnée* S, *on porte, sur les normales à cette surface, une longueur constante l; chercher la normale à la surface* Σ, *lieu des points ainsi obtenus.*

Soient *x*, *y*, *z* les coordonnées d'un point de la surface S; α, β, γ les angles que la normale en ce point forme avec les axes, et x_1, y_1, z_1 les coordonnées de l'extrémité de la longueur *l* portée sur cette normale; on a évidemment

$$\left\{\begin{aligned} x_1 &= x + l\cos\alpha,\\ y_1 &= y + l\cos\beta,\\ z_1 &= z + l\cos\gamma, \end{aligned}\right.$$

et, en différentiant,

$$\begin{aligned} dx_1 &= dx + l\,d\cos\alpha,\\ dy_1 &= dy + l\,d\cos\beta,\\ dz_1 &= dz + l\,d\cos\gamma. \end{aligned}$$

Si on ajoute ces équations après avoir multiplié la première par $\cos\alpha$, la seconde par $\cos\beta$, la troisième par $\cos\gamma$, on obtient

$$\begin{aligned}(1)\qquad \cos\alpha\,dx_1 + \cos\beta\,dy_1 + \cos\gamma\,dz_1 &= \cos\alpha\,dx + \cos\beta\,dy + \cos\gamma\,dz\\ &\quad + l(\cos\alpha\,d\cos\alpha + \cos\beta\,d\cos\beta + \cos\gamma\,d\cos\gamma).\end{aligned}$$

Or on a

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

d'où l'on conclut en différentiant,

$$\cos\alpha\,d\cos\alpha + \cos\beta\,d\cos\beta + \cos\gamma\,d\cos\gamma = 0.$$

D'ailleurs la direction de la normale étant perpendiculaire à une tangente quelconque de la surface S, on a

$$\cos\alpha\, dx + \cos\beta\, dy + \cos\gamma\, dz = 0,$$

et l'équation (1) devient alors

$$\cos\alpha\, dx_1 + \cos\beta\, dy_1 + \cos\gamma\, dz_1 = 0,$$

d'où l'on conclut que la normale à la surface Σ au point x_1, y_1, z_1 fait, avec les axes, des angles égaux à α, β, γ, et qu'elle coïncide par conséquent avec la normale au point correspondant de la surface S. C'est ce qui a déjà été démontré (14).

PROBLÈME V. — *On donne un point* O *et une surface* S, *on joint le point* O *à un point quelconque* M *de la surface* S; *par le rayon* OM *on mène un plan contenant la normale* MN *de la surface au point* M; *dans le plan* OMN *on élève, par le point* O, *une perpendiculaire* OP *au rayon* OM, *égale en longueur à ce rayon: trouver le plan tangent à la surface lieu des points* P.

Coupons la surface S par une sphère de rayon OM ayant son centre en O : il est facile de voir que le rayon OP défini dans l'énoncé précédent, et sur lequel on doit porter une longueur OP = OM, est perpendiculaire au plan qui touche, suivant la génératrice OM, le cône dont le sommet est en O et qui a pour base la courbe d'intersection.

Soient x, y, z les coordonnées du point M, x_1, y_1, z_1 celles du point P; les rayons vecteurs OM et OP étant perpendiculaires, on a

$$xx_1 + yy_1 + zz_1 = 0. \tag{1}$$

De plus, la ligne OP étant perpendiculaire à la génératrice de cône infiniment voisine de OM, on a aussi

$$x_1 dx + y_1 dy + z_1 dz = 0. \tag{2}$$

dx, dy, dz, désignant les différentielles de x, y, z, lorsqu'on reste sur la courbe d'intersection de la sphère avec la surface S. Si l'équation de la surface S est

$$\varphi(x, y, z) = 0,$$

dx, dy, dz sont définis par les équations

$$\frac{d\varphi}{dx}dx + \frac{d\varphi}{dy}dy + \frac{d\varphi}{dz}dz = 0, \tag{3}$$

$$x\,dx + y\,dy + z\,dz = 0. \tag{4}$$

enfin on a

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = x^2 + y^2 + z^2. \tag{5}$$

En différentiant les équations (1) et (5) et leur adjoignant l'équation (3) on a

$$-(x\,dx_1 + y\,dy_1 + z\,dz_1) = x_1\,dx + y_1\,dy + z_1\,dz,$$

$$0 = \frac{d\varphi}{dx}\,dx + \frac{d\varphi}{dy}\,dy + \frac{d\varphi}{dz}\,dz, \tag{6}$$

$$x_1\,dx_1 + y_1\,dy_1 + z_1\,dz = x\,dx + y\,dy + z\,dz.$$

Mais les équations (2) (3) et (4) étant compatibles, montrent que le *déterminant* des coefficients de dx, dy, dz, dans les seconds membres des équations (6), est égal à zéro, et, par conséquent, il existe trois facteurs, 1, n, m, tels, que les seconds membres multipliés par ces facteurs donnent une somme identiquement nulle; il en est donc de même pour les premiers, et l'on a

$$(m x_1 - x)\,dx_1 + (m y_1 - y)\,dy_1 + (m z_1 - z)\,dz_1 = 0. \tag{7}$$

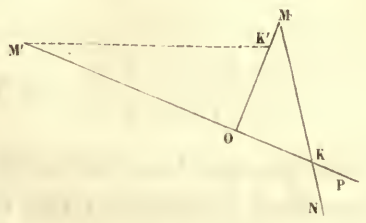
m étant défini par les équations

$$\left.\begin{aligned} x_1 + mx + n\frac{d\varphi}{dx} &= 0,\\ y_1 + my + n\frac{d\varphi}{dy} &= 0,\\ z_1 + mz + n\frac{d\varphi}{dz} &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

dont l'une est la conséquence des deux autres.

On verra, comme dans les problèmes précédents, que, d'après l'équation (7), la normale à la surface lieu des points x_1, y_1, z_1 fait, avec les axes, des angles dont les cosinus sont proportionnels à $mx_1 - x$, $my_1 - y$, $mz_1 - z$. Le problème proposé est donc résolu. Mais ce résultat peut être interprété, comme il suit, d'une manière élégante.

Considérons le triangle OMK formé par la droite OM, la normale MN et la ligne OP.



En écrivant que la somme des projections des côtés de ce triangle sur les axes des

coordonnées est nulle, on a

$$\frac{\mathrm{OK}\,x_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}} \pm \frac{\mathrm{KM}\,\frac{d\varphi}{dx}}{\sqrt{\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2}} - \frac{x\,\mathrm{OM}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = 0,$$

$$\frac{\mathrm{OK}\,y_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}} \pm \frac{\mathrm{KM}\,\frac{d\varphi}{dy}}{\sqrt{\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2}} - \frac{y\,\mathrm{OM}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = 0,$$

$$\frac{\mathrm{OK}\,z_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}} \pm \frac{\mathrm{KM}\,\frac{d\varphi}{dz}}{\sqrt{\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2}} - \frac{z\,\mathrm{OM}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = 0,$$

et, par conséquent, en remarquant que $x_1^2+y_1^2+z_1^2 = x^2+y^2+z^2$, on satisfait aux équations (8) en prenant

$$m = -\frac{\mathrm{OM}}{\mathrm{OK}}, \quad n = \pm\frac{\mathrm{KM}}{\mathrm{OK}}\,\frac{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}}{\sqrt{\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2}}.$$

Les cosinus des angles que la normale en P forme avec les axes sont donc proportionnels à

$$x_1\mathrm{OM}+x\mathrm{OK}, \quad y_1\mathrm{OM}+y\mathrm{OK}, \quad z_1\mathrm{OM}+z\mathrm{OK}.$$

Or en portant sur OM une longueur OK′ = OK, et, sur OP prolongé, une longueur OM′ = OM, on voit que ces trois expressions sont proportionnelles aux projections sur les axes de la ligne K′M′ qui joint les points ainsi obtenus; cette ligne K′M′ est donc parallèle à la normale cherchée, or il est clair, par la géométrie élémentaire, qu'elle est dans le plan MOP et perpendiculaire à MK. C'est le résultat que nous avions trouvé (14).

102. Appliquons enfin la théorie des plans tangents à la détermination de la loi suivant laquelle se déplace le plan tangent à une surface réglée, aux différents points d'une même génératrice rectiligne.

Soient

$$(1) \qquad \begin{aligned} x &= z\varphi(\alpha)+\psi(\alpha), \\ y &= zf(\alpha)+\mathrm{F}(\alpha), \end{aligned}$$

les équations d'une génératrice qui, par la variation du paramètre α, occupe dans l'espace une suite de positions dont l'ensemble forme la surface considérée. Pour simplifier, sans changer en rien la loi que nous cherchons, supposons que, pour une valeur de α, $\alpha = 0$ par exemple, la génératrice coïncide avec l'axe des z: il

faut et il suffit pour cela que l'on ait

$$\varphi(0) = 0, \quad \psi(0) = 0,$$
$$f(0) = 0, \quad F(0) = 0.$$

Cherchons comment varient les plans qui touchent la surface aux différents points de l'axe des z. Tous ces plans devant évidemment contenir l'axe des z, la coordonnée parallèle à cet axe ne figurera pas dans leur équation, et l'on ne peut pas faire usage de la formule

$$v - z = (t - x)\frac{dz}{dx} + (u - y)\frac{dz}{dy},$$

car les coefficients $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$ sont nécessairement infinis. Il convient donc de changer les coordonnées les unes dans les autres, ce qui est permis, car rien ne les distingue essentiellement, et nous adopterons la formule

$$(u - y) = (t - x)\frac{dy}{dx} + (v - z)\frac{dy}{dz}.$$

L'équation ne devant pas renfermer la lettre v, coordonnée parallèle à l'axe de z, on doit avoir $\frac{dy}{dz} = 0$. Mais le calcul même va d'ailleurs nous l'apprendre.

Pour calculer $\frac{dy}{dx}$, différentions les équations (1), en y traitant z comme constant; il vient

$$dx = [z\varphi'(\alpha) + \psi'(\alpha)]\,d\alpha,$$
$$dy = [zf'(\alpha) + F'(\alpha)]\,d\alpha,$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{zf'(\alpha) + F'(\alpha)}{z\varphi'(\alpha) + \psi'(\alpha)},$$

où il faut supposer $\alpha = 0$.

Pour calculer $\frac{dy}{dz}$, et prouver qu'il est nul, différentions les deux équations (1), en y considérant x comme constante; nous aurons

$$0 = [z\varphi'(\alpha) + \psi'(\alpha)]\,d\alpha + \varphi(\alpha)\,dz,$$
$$dy = [zf'(\alpha) + F'(\alpha)]\,d\alpha + f(\alpha)\,dz,$$

et de là, en éliminant $d\alpha$,

$$\frac{dy}{dz} = -\frac{\varphi(\alpha)[zf'(\alpha) + F'(\alpha)]}{z\varphi'(\alpha) + \psi'(\alpha)} + f(\alpha),$$

ce qui, pour $\alpha = 0$, devient nul, à cause des hypothèses $\varphi(0) = 0$, $f(0) = 0$.

L'équation du plan tangent cherché est alors

$$u - y = (t - x)\,\frac{z\,f'(o) + F'(o)}{z\,\varphi'(o) + \psi'(o)},$$

en posant

$$f'(o) = a, \qquad F'(o) = b,$$
$$\varphi'(o) = m, \qquad \psi'(o) = n,$$

on voit que l'angle θ, formé par ce plan avec le plan des ZX, est donné par la formule

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{az + b}{mz + n}.$$

Si l'on substitue, au plan des ZX, un nouveau plan formant avec lui l'angle φ, l'inclinaison θ' sur ce nouveau plan sera donnée par la formule

$$\operatorname{tang}\theta' = \operatorname{tang}(\theta - \varphi) = \frac{(az + b) - \operatorname{tang}\varphi\,(mz + n)}{(mz + n) + (az + b)\operatorname{tang}\varphi},$$

et si l'angle φ est choisi de telle sorte que

$$m + a\operatorname{tang}\varphi = o,$$

on aura

$$\operatorname{tang}\theta' = \frac{(a - m\operatorname{tang}\varphi)\,z}{(n + b\operatorname{tang}\varphi)} + \frac{(b - n\operatorname{tang}\varphi)}{(n + b\operatorname{tang}\varphi)}.$$

Ainsi la tangente de l'angle formé par le plan tangent, avec un plan fixe conduit par la génératrice, est exprimée par une fonction de la forme

$$Gz + H,$$

et si l'on transporte l'origine des coordonnées au point de l'axe des z dont l'ordonnée actuelle est

$$z' = -\frac{H}{G},$$

on devra remplacer z par $z + z'$, et l'expression de tang θ' deviendra simplement

$$Gz.$$

Nous voyons donc que la tangente de l'angle formé par le plan tangent avec un plan fixe, est proportionnelle à la distance du point de contact à un point convenablement choisi sur la génératrice.

103. Dans certains cas, la constante désignée par G est nulle et le même plan est tangent en tous les points de la génératrice.

Cherchons la condition nécessaire pour qu'il en soit ainsi, non-seulement pour une génératrice isolée, mais pour toutes les génératrices d'une surface.

Reprenons les équations

$$(1)\qquad \begin{aligned} x &= z\varphi(\alpha) + \psi(\alpha), \\ y &= zf(\alpha) + \mathrm{F}(\alpha). \end{aligned}$$

qui représentent une génératrice quelconque. Pour que le plan tangent soit le même tout le long de cette génératrice, il faut que les deux coefficients différentiels $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$ soient fonctions de la seule variable α et conservent la même valeur tant que α ne change pas.

Calculons, par exemple, $\frac{dz}{dx}$, et, pour cela, différentions les deux équations (1) en y considérant y comme constant. Nous aurons

$$\begin{aligned} dx &= dz\,\varphi(\alpha) + [z\varphi'(\alpha) + \psi'(\alpha)]\,d\alpha, \\ 0 &= dz\,f(\alpha) + [zf'(\alpha) + \mathrm{F}'(\alpha)]\,d\alpha, \end{aligned}$$

d'où l'on déduit, en éliminant $d\alpha$,

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{\varphi(\alpha) + \dfrac{z\varphi'(\alpha) + \psi'(\alpha)}{zf'(\alpha) + \mathrm{F}'(\alpha)}\, f(\alpha)}.$$

Pour que cette fonction dépende de α seulement, et soit indépendante de z, on doit avoir

$$\frac{\varphi'(\alpha)}{f'(\alpha)} = \frac{\psi'(\alpha)}{\mathrm{F}'(\alpha)};$$

en écrivant que $\frac{dz}{dy}$ est indépendant de z, on retrouverait la même condition, qui exprime par conséquent la propriété en question.

Cette condition s'interprète géométriquement d'une manière remarquable : elle exprime que la génératrice dont les équations sont

$$(1)\qquad \begin{aligned} x &= z\varphi(\alpha) + \psi(\alpha), \\ y &= zf(\alpha) + \mathrm{F}(\alpha), \end{aligned}$$

coupe la génératrice infiniment voisine représentée par

$$(2)\qquad \begin{aligned} x &= z\varphi(\alpha) + z\varphi'(\alpha)\,d\alpha + \psi(\alpha) + \psi'(\alpha)\,d\alpha, \\ y &= zf(\alpha) + zf'(\alpha)\,d\alpha + \mathrm{F}(\alpha) + \mathrm{F}'(\alpha)\,d\alpha. \end{aligned}$$

Nous n'insistons pas ici sur les conséquences de ce résultat et sur la manière dont il doit être entendu, notre but n'étant en ce moment que de donner une application de la théorie des plans tangents à une classe importante de surfaces.

Courbes et surfaces enveloppes.

104. Lorsque l'équation d'une courbe plane contient un paramètre arbitraire, la courbe peut prendre, par suite de la variation de ce paramètre, une infinité de formes et de positions différentes. On nomme *courbe enveloppe* de cette courbe mobile, une ligne fixe à laquelle elle reste tangente dans toutes ses positions. La courbe mobile à laquelle l'enveloppe est constamment tangente, reçoit alors le nom de *courbe enveloppée*.

Il est facile de voir géométriquement que la courbe enveloppe est le lieu des points d'intersection de chaque courbe mobile avec la courbe infiniment voisine.

Si l'on considère, en effet, la série des courbes enveloppées obtenues en attribuant successivement au paramètre variable de très-petits accroissements, les points d'intersection de chaque courbe avec la courbe voisine formeront les sommets d'un polygone curviligne dont chaque côté sera un petit arc appartenant à l'une des courbes. La limite de ce polygone touche évidemment toutes les courbes proposées et passe par le point d'intersection de chacune d'elles avec la courbe infiniment voisine.

D'après cela, pour trouver l'équation de la courbe enveloppe, soit

$$\varphi(x, y, a) = 0 \tag{1}$$

l'équation de la courbe mobile enveloppée, dans une de ses positions, l'équation de la même courbe, dans la position infiniment voisine, est

$$\varphi(x, y, a + da) = 0, \tag{2}$$

et pour avoir les coordonnées d'un point de l'enveloppe, il faut résoudre les équations (1) et (2). On peut évidemment substituer à l'une d'elles, l'équation obtenue, en les retranchant l'une de l'autre et divisant la différence par da, c'est-à-dire

$$\frac{d.\varphi(x, y, a)}{da} = 0, \tag{3}$$

et l'équation du lieu des points de contact ainsi obtenus, c'est-à-dire la courbe enveloppe cherchée, s'obtiendra en éliminant a entre les équations (1) et (3).

Par conséquent : l'équation de l'enveloppe des courbes représentées par l'équation $\varphi(x, y, a) = 0$ s'obtient en éliminant la constante a entre l'équation et sa dérivée par rapport à la constante.

105. On peut démontrer analytiquement que l'équation obtenue en éliminant a entre

$$\varphi(x, y, a) = 0, \tag{1}$$

$$\frac{d.\varphi(x, y, a)}{da} = 0, \tag{2}$$

représente une courbe tangente à chacune des enveloppées proposées.

Supposons, en effet, que dans l'équation (1) on remplace a par sa valeur déduite de (2); l'élimination sera faite, et l'on obtiendra une équation de la forme

$$\varphi(x, y, \mathrm{A}) = 0, \tag{3}$$

A désignant une fonction de x et de y. Or je dis qu'en chaque point de la courbe représentée par cette équation (3), la tangente est la même que celle de la courbe enveloppée qui y passe. Le coefficient angulaire $\frac{dy}{dx}$ est donné, en effet, pour la courbe (3), par l'équation

$$\frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{dy}\frac{dy}{dx} + \frac{d\varphi}{d\mathrm{A}}\left(\frac{d\mathrm{A}}{dx} + \frac{d\mathrm{A}}{dy}\frac{dy}{dx}\right) = 0;$$

or pour la courbe représentée par l'équation (1) dans laquelle on attribue à a la valeur numérique que prend A au point considéré, le coefficient angulaire est fourni par l'équation

$$\frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{dy}\frac{dy}{dx} = 0,$$

qui s'accorde avec la précédente, à cause de l'équation $\frac{d\varphi}{d\mathrm{A}} = 0$, qui est satisfaite en tous les points de la courbe enveloppe.

106. Lorsque l'équation d'une surface contient un paramètre arbitraire, cette surface peut prendre, par suite de la variation de ce paramètre, une infinité de formes et de positions différentes. Le lieu des intersections de chaque surface avec la surface infiniment voisine, touche, suivant une courbe, chacune des surfaces considérées et se nomme la *surface enveloppe* de celles-ci, qui reçoivent alors le nom de *surfaces enveloppées*.

Si l'on attribue, en effet, au paramètre arbitraire une série d'accroissements successifs extrêmement petits, on obtiendra une série de surfaces dont chacune coupera la précédente, et, sur chaque surface, on aura deux courbes voisines provenant de ses intersections avec la surface qui la précède et avec celle qui la suit; entre ces deux

courbes est comprise une zone, et l'ensemble de ces zones forme à la limite une surface lieu des intersections successives des surfaces proposées et qui les touche toutes suivant une courbe, puisqu'elle est la limite d'une réunion de zones respectivement empruntées à chacune d'elles.

107. La courbe d'intersection de deux surfaces infiniment voisines correspondant aux valeurs a et $a + da$ du paramètre a, est représentée par les deux équations

$$\varphi(x, y, z, a) = 0,$$
$$\varphi(x, y, z, a + da) = 0, \tag{1}$$

que l'on peut remplacer, absolument comme (**104**), par

$$\varphi(x, y, z, a) = 0,$$
$$\frac{d.\varphi(x, y, z, a)}{da} = 0. \tag{2}$$

On peut démontrer analytiquement que la surface dont l'équation résulte de l'élimination de a entre les équations (1) (2), est tangente à toutes les surfaces proposées. Supposons, en effet, que dans l'équation (1) on remplace a par sa valeur déduite de (2). L'élimination sera faite et l'on obtiendra une équation de la forme

$$\varphi(x, y, z, \mathrm{A}) = 0, \tag{3}$$

A désignant une fonction de x, y, z. Or je dis qu'en chaque point, cette surface a même plan tangent que la surface enveloppée qui y passe. Les deux coefficients $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$ de l'équation du plan tangent sont donnés en effet pour la surface (3) par les équations

$$\frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{dz}\frac{dz}{dx} + \frac{d\varphi}{d\mathrm{A}}\left(\frac{d\mathrm{A}}{dx} + \frac{d\mathrm{A}}{dz}\frac{dz}{dx}\right) = 0,$$
$$\frac{d\varphi}{dy} + \frac{d\varphi}{dz}\frac{dz}{dy} + \frac{d\varphi}{d\mathrm{A}}\left(\frac{d\mathrm{A}}{dy} + \frac{d\mathrm{A}}{dz}\frac{dz}{dy}\right) = 0;$$

et ceux du plan tangent à celles des surfaces enveloppées pour laquelle la constante est égale à la valeur numérique que prend A au point considéré, le sont par les équations

$$\frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{dz}\frac{dz}{dx} = 0,$$
$$\frac{d\varphi}{dy} + \frac{d\varphi}{dz}\frac{dz}{dy} = 0,$$

or ces équations rentrent dans les précédentes à cause de la condition $\frac{d\varphi}{d\mathrm{A}} = 0$,

qui est satisfaite en tous les points de la surface enveloppe, et par conséquent les deux plans tangents se confondent.

108. On peut encore chercher l'enveloppe des surfaces représentées par l'équation

$$F(x, y, z, a, b) = 0,$$

a et b désignant deux constantes arbitraires. Il faut, pour obtenir l'équation d'une telle enveloppe, éliminer a et b entre les trois équations

$$F(x, y, z, a, b) = 0, \tag{1}$$

$$\frac{dF}{da} = 0, \qquad \frac{dF}{db} = 0. \tag{2}$$

La surface représentée par l'équation résultante touche toutes les surfaces proposées, chacune en un seul point, ce qui distingue ce cas du précédent, dans lequel chaque enveloppée avait, avec l'enveloppe, une courbe de contact. Il est clair, en effet, que pour des valeurs données des constantes a et b, les équations (1) et (2) n'ont qu'un nombre limité de solutions, et les points représentés par ces solutions sont ceux où la surface qui correspond aux valeurs choisies de a et de b est touchée par l'enveloppe. Il est facile de faire voir qu'en chacun de ces points les deux surfaces ont même plan tangent.

L'équation de la première est, en effet,

$$F(x, y, z, a, b) = 0, \tag{1}$$

et celle de la seconde en diffère, parce que a et b sont remplacés par deux fonctions, A et B de x, y, z, qui sont les valeurs de a et b déduites des équations (2). Pour calculer les coefficients de l'équation du plan tangent à la surface (1), il faut faire usage des équations

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dz}\frac{dz}{dx} &= 0, \\ \frac{dF}{dy} + \frac{dF}{dz}\frac{dz}{dy} &= 0, \end{aligned} \tag{3}$$

auxquelles, pour calculer ceux du plan tangent à la surface représentée par l'équation

$$F(x, y, z, A, B) = 0,$$

il faut substituer les suivantes :

$$(4)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\mathrm{F}}{dx}+\dfrac{d\mathrm{F}}{dz}\dfrac{dz}{dx}+\dfrac{d\mathrm{F}}{d\mathrm{A}}\left(\dfrac{d\mathrm{A}}{dx}+\dfrac{d\mathrm{A}}{dz}\dfrac{dz}{dx}\right)+\dfrac{d\mathrm{F}}{d\mathrm{B}}\left(\dfrac{d\mathrm{B}}{dx}+\dfrac{d\mathrm{B}}{dz}\dfrac{dz}{dx}\right)=0, \\ \dfrac{d\mathrm{F}}{dy}+\dfrac{d\mathrm{F}}{dz}\dfrac{dz}{dy}+\dfrac{d\mathrm{F}}{d\mathrm{A}}\left(\dfrac{d\mathrm{A}}{dy}+\dfrac{d\mathrm{A}}{dz}\dfrac{dz}{dy}\right)+\dfrac{d\mathrm{F}}{d\mathrm{B}}\left(\dfrac{d\mathrm{B}}{dy}+\dfrac{d\mathrm{B}}{dz}\dfrac{dz}{dy}\right)=0; \end{cases}$$

mais les fonctions A et B sont telles, que, pour chaque point de la surface enveloppe, on a $\frac{d\mathrm{F}}{d\mathrm{A}}=0$, $\frac{d\mathrm{F}}{d\mathrm{B}}=0$, et, par conséquent, les valeurs de $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$ déduites des équations (1) ne diffèrent pas de celles que fournissent les équations (4).

Application à quelques exemples.

109. *Enveloppe des ellipses représentées par l'équation*

$$u=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{(k-a)^2}=1,$$

dans laquelle k est une constante et a un paramètre variable. — L'équation $\frac{du}{da}=0$, est ici

$$\frac{x^2}{a^3}-\frac{y^2}{(k-a)^3}=0,$$

on en déduit

$$a=\frac{kx^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}},$$

$$k-a=\frac{ky^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}},$$

et en substituant ces valeurs dans l'équation proposée, on a l'équation de l'enveloppe

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=k^{\frac{2}{3}}.$$

110. *Enveloppe d'une ligne de grandeur constante mobile entre deux axes rectangulaires.* — En prenant les axes donnés pour ceux des coordonnées, l'équation de la droite mobile est

$$(1)\qquad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1,$$

a et b étant liés par l'équation

$$a^2 + b^2 = l^2. \tag{2}$$

L'équation de la droite mobile renferme ici deux paramètres variables a et b, mais il existe entre eux une relation connue ; on peut donc regarder b comme une fonction donnée de a, et appliquer la méthode générale. En différentiant les équations (1) et (2) par rapport à a, on a

$$\frac{x\,da}{a^2} + \frac{y\,db}{b^2} = 0, \tag{3}$$

$$a\,da + b\,db = 0. \tag{4}$$

Il faut éliminer db entre ces équations, puis égaler à zéro le coefficient de da; on obtiendra évidemment le même résultat en les ajoutant, après avoir multiplié la première par un coefficient indéterminé $-\lambda$, et égalant à zéro les coefficients de da et de db. On trouve ainsi

$$\frac{\lambda x}{a^2} = a, \qquad \frac{\lambda y}{b^2} = b; \tag{5}$$

ajoutant ces équations après les avoir multipliées par a et b, on en déduit

$$\lambda\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = a^2 + b^2,$$

c'est-à-dire, en vertu des équations (1) et (2),

$$\lambda = l^2; \tag{6}$$

par suite les équations (5) donnent

$$a^3 = l^2 x, \qquad b^3 = l^2 y; \tag{7}$$

en éliminant a et b entre les équations (2) et (7), on a enfin

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = l^{\frac{2}{3}}.$$

Ce lieu est de même nature que le précédent. On aurait pu le prévoir en remarquant que lorsqu'une droite de longueur constante est inscrite dans un angle droit, ses différents points décrivent des ellipses dont l'équation générale est celle que l'on a considérée dans le problème précédent, de sorte que l'ensemble des ellipses et l'ensemble des droites recouvrent la même portion du plan, et les points où elles ne pénètrent pas sont limités, pour toutes deux, par la même enveloppe.

111. *Surface des ondes lumineuses.* — On donne un ellipsoïde dont l'équation est

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Par le centre de cette surface, on mène un plan quelconque P qui la coupe suivant une ellipse E, et l'on mène un second plan P′ parallèle au plan P à une distance inversement proportionnelle à l'un des axes de l'ellipse E. La surface enveloppe des plans P′ joue un rôle important dans la théorie de la lumière, nous allons chercher son équation.

Les deux axes de l'ellipse suivant laquelle l'ellipsoïde est coupé par le plan dont la normale fait avec les axes des angles dont les cosinus sont égaux à l, m, n, sont (*) les racines de l'équation

$$\frac{l^2}{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{u^2}}+\frac{m^2}{\frac{1}{b^2}-\frac{1}{u^2}}+\frac{n^2}{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{u^2}}=0,$$

de sorte qu'en posant $\frac{1}{u}=v$ et $\frac{1}{a}=a'$, $\frac{1}{b}=b'$, $\frac{1}{c}=c'$, l'équation du plan enveloppé dont la distance à l'origine est $\frac{1}{u}$, est

$$lx+my+nz=v,$$

et l'on a

$$l^2+m^2+n^2=1,$$

$$\frac{l^2}{v^2-a'^2}+\frac{m^2}{v^2-b'^2}+\frac{n^2}{v^2-c'^2}=0.$$

L'équation du plan mobile contient ici quatre paramètres l, m, n, v, mais il existe, entre eux, deux équations, et nous sommes par conséquent dans le cas traité (108). Il faudrait donc éliminer deux de ces paramètres, puis égaler à zéro les dérivées de l'équation du plan mobile par rapport aux paramètres restants; or cela revient, évidemment, à différentier en considérant les quatre paramètres comme variables, puis à éliminer deux des différentielles pour égaler à zéro les coefficients des deux autres dans l'équation où elles figureront seules.

En différentiant l'équation du plan mobile et les deux équations qui lient les

(*) Nous déduirons cette équation de la théorie des maxima et minima. On peut la former directement en remarquant que dans un ellipsoïde le produit des deux axes d'une section diamétrale par la perpendiculaire abaissée sur le plan tangent parallèle, est égal au produit des trois axes, et que la somme des carrés des inverses de trois diamètres perpendiculaires est constante et égale à la somme des carrés des inverses des axes.

paramètres, on a

$$x\,dl + y\,dm + z\,dn = dv, \tag{1}$$

$$l\,dl + m\,dm + n\,dn = 0, \tag{2}$$

$$\frac{l\,dl}{v^2 - a'^2} + \frac{m\,dm}{v^2 - b'^2} + \frac{n\,dn}{v^2 - c'^2} = v\,dv\left[\frac{l^2}{(v^2 - a'^2)^2} + \frac{m^2}{(v^2 - b'^2)^2} + \frac{n^2}{(v^2 - c'^2)^2}\right]. \tag{3}$$

En ajoutant ces trois équations après avoir multiplié la première par λ, la seconde par μ et la troisième par -1, et égalant à zéro les coefficients de dl, dm, dn et dv, on trouve

$$\lambda x + \mu l = \frac{l}{v^2 - a'^2}, \tag{4}$$

$$\lambda y + \mu m = \frac{m}{v^2 - b'^2}, \tag{5}$$

$$\lambda z + \mu n = \frac{n}{v^2 - c'^2}, \tag{6}$$

$$\lambda = v\left[\frac{l^2}{(v^2 - a'^2)^2} + \frac{m^2}{(v^2 - b'^2)^2} + \frac{n^2}{(v^2 - c'^2)^2}\right]; \tag{7}$$

en multipliant les équations (4), (5), (6) par l, m, n, et ajoutant, on en déduit

$$\lambda v + \mu = 0; \tag{8}$$

mais en multipliant les mêmes équations par x, y, z, et posant $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, on trouve

$$\lambda r^2 + \mu v = \frac{lx}{v^2 - a'^2} + \frac{my}{v^2 - b'^2} + \frac{nz}{v^2 - c'^2}, \tag{9}$$

et, à cause de l'équation (8),

$$\lambda (r^2 - v^2) = \frac{lx}{v^2 - a'^2} + \frac{my}{v^2 - b'^2} + \frac{nz}{v^2 - c'^2}. \tag{10}$$

En ajoutant les équations (4), (5), (6), élevées chacune au carré, après que le second terme du premier membre a été transposé dans le second,

$$\lambda^2 r^2 = \mu^2 + \frac{l^2}{(v^2 - a'^2)^2} + \frac{m^2}{(v^2 - b'^2)^2} + \frac{n^2}{(v^2 - c'^2)^2},$$

et par suite, en ayant égard à (7) et (8),

$$\lambda^2 (r^2 - v^2) = \frac{\lambda}{v}, \tag{11}$$

$$\lambda = \frac{1}{v\,(r^2 - v^2)}, \tag{12}$$

d'où l'on conclut,

$$\mu = \frac{1}{v^2 - r^2}. \tag{13}$$

Substituant les valeurs de λ et de μ dans l'équation (4), on a

$$\frac{x}{v(r^2 - v^2)} = l\left[\frac{1}{(r^2 - v^2)} + \frac{1}{v^2 - a'^2}\right],$$

d'où l'on conclut

$$\frac{x}{r^2 - a'^2} = \frac{vl}{v^2 - a'^2},$$

on aura de même

$$\frac{y}{r^2 - b'^2} = \frac{vm}{v^2 - b'^2},$$

$$\frac{z}{r^2 - c'^2} = \frac{vn}{v^2 - c'^2}.$$

En multipliant ces équations par x, y, z, et ajoutant, eu égard aux équations (10) et (12),

$$\frac{x^2}{r^2 - a'^2} + \frac{y^2}{r^2 - b'^2} + \frac{z^2}{r^2 - c'^2} = 1.$$

C'est l'équation de la surface de l'onde. On ne doit pas oublier que r^2 y représente $x^2 + y^2 + z^2$.

112. *Surfaces développables.* — Lorsqu'un plan se meut suivant une loi déterminée, et telle, que son équation ne contienne qu'un seul paramètre arbitraire, l'enveloppe des positions de ce plan se nomme une *surface développable.*

La surface enveloppe étant le lieu des intersections successives de chaque position du plan enveloppé, avec la position infiniment voisine, une surface développable est le lieu d'une série de lignes droites, et, de plus, le plan tangent est le même tout le long de l'une de ces génératrices rectilignes.

Si l'équation du plan mobile est

$$z = x\varphi(\alpha) + yf(\alpha) + \mathrm{F}(\alpha),$$

l'équation de la surface développable s'obtiendra en éliminant α entre cette équation et l'équation

$$0 = x\varphi'(\alpha) + yf'(\alpha) + \mathrm{F}'(\alpha).$$

113. *Surfaces canaux.* — On nomme *surface canal* l'enveloppe des positions d'une sphère de rayon constant, dont le centre parcourt une courbe donnée. Une telle surface est le lieu des intersections de deux sphères infiniment voisines.

Or deux sphères infiniment voisines de même rayon se coupent évidemment sui-

vant un grand cercle dont le plan est perpendiculaire sur la ligne qui joint les centres. Une surface canal peut donc être considérée comme le lieu des positions d'un cercle de rayon constant dont le plan reste perpendiculaire à la courbe décrite par son centre. De plus, en chaque point de ce cercle, la surface est tangente à une même sphère, et par conséquent toutes les normales passent par un même point qui est le centre du cercle.

L'équation de la sphère mobile de rayon constant contenant un paramètre arbitraire est de la forme

$$[x-\varphi(\alpha)]^2+[y-\psi(\alpha)]^2+[z-\mathrm{F}(\alpha)]^2=\mathrm{R}^2,$$

et l'équation de l'enveloppe s'obtiendra en éliminant α entre cette équation et la dérivée par rapport à α

$$[x-\varphi(\alpha)]\varphi'(\alpha)+[y-\psi(\alpha)]\psi'(\alpha)+[z-\mathrm{F}(\alpha)]\mathrm{F}'(\alpha)=0.$$

EXERCICES.

1. Le lieu des points tels, que la somme des carrés des longueurs des normales menées à une ou plusieurs courbes données soit constante, a pour normale, en chaque point, une ligne dirigée vers le centre des moyennes distances des pieds de toutes les normales abaissées de ce point sur les courbes données.

2. Le lieu des points tels, que la somme des longueurs de deux normales menées à une même courbe ou à deux courbes données soit constante, a pour tangente la bissectrice de l'angle des deux normales.

3. Le lieu des points tels, qu'il existe une relation donnée entre les longueurs des normales abaissées sur une ou plusieurs courbes données, a la même tangente que le lieu des points pour lesquels il existe la même relation entre les distances à des points fixes qui sont les pieds des normales correspondantes au point considéré.

4. Dans un triangle formé par trois arcs d'hyperbole équilatère ayant même centre, ou par trois arcs de parabole de même foyer, la somme des angles vaut deux droits.

5. Si l'équation $\varphi(x, y)=\mathrm{C}$ représente, lorsque la constante C varie, une série de courbes parallèles, on a

$$\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2=\mathrm{F}(\varphi),$$

$\mathrm{F}(\varphi)$ étant une fonction de $\varphi(x, y)$.

6. Si l'équation $\varphi(x, y, z)=\mathrm{C}$ représente, lorsque la constante C varie, une série de surfaces parallèles, on a

$$\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2=\mathrm{F}(\varphi),$$

$\mathrm{F}(\varphi)$ étant une fonction de $\varphi(x, y, z)$.

7. Si l'on coupe la surface dont l'équation est

$$\frac{x^2}{x^2+y^2+z^2-a^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2+z^2-b^2}+\frac{z^2}{x^2+y^2+z^2-c^2}=1,$$

par des sphères et par des ellipsoïdes ayant pour équations

$$x^2+y^2+z^2=\mathrm{R}^2,$$

$$a^2y^2+b^2y^2+c^2z^2=\mathrm{P},$$

quelles que soient les constantes P et R, les courbes d'intersection se coupent à angle droit.

8. Enveloppe des plans qui passent par un point donné et coupent deux plans donnés suivant des droites perpendiculaires entre elles.

9. Lorsqu'un cercle roule sur une droite, l'enveloppe de l'un de ses diamètres est une cycloïde.

10. Lorsqu'un cercle roule sur un autre cercle, l'enveloppe de l'un de ses diamètres est une épicycloïde.

11. Lorsqu'un plan se meut de telle sorte que la somme des carrés de ses distances à des points fixes soit constante, il enveloppe un ellipsoïde ayant pour centre le centre des moyennes distances des points donnés.

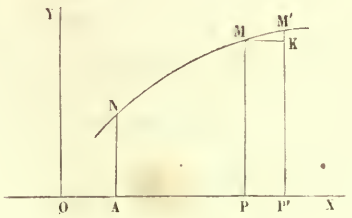
CHAPITRE V.

DIFFÉRENTIELLES DE QUELQUES FONCTIONS DÉFINIES GÉOMÉTRIQUEMENT.

Différentielle d'une aire plane.

114. Il est impossible de passer en revue toutes les fonctions implicites. Nous avons vu (60) comment on différentie celles qui résultent de la résolution d'équations connues; nous nous bornerons à considérer, dans ce chapitre, l'aire d'une courbe connue et la longueur d'un arc de courbe.

Considérons d'abord l'aire comprise entre une courbe plane, l'axe des X, et deux ordonnées dont l'une est fixe et l'autre variable.



Cette aire NAMP est une fonction implicite de x, dont nous allons chercher la différentielle, en supposant, bien entendu, que la courbe NM soit donnée par son équation.

Si l'on attribue à x un accroissement infiniment petit dx, représenté par PP', l'aire considérée s'accroît du trapèze curviligne MPM'P', auquel on peut substituer le rectangle MKPP', car cela revient à négliger le triangle infiniment petit du second ordre MKM'. Or on a, en nommant y l'ordonnée MP,

$$\text{MKPP}' = y\,dx.$$

La différentielle demandée est donc $y\,dx$ et la dérivée de l'aire, par rapport à x, est y.

115. Le résultat précédent fournit la démonstration immédiate d'un théorème important :

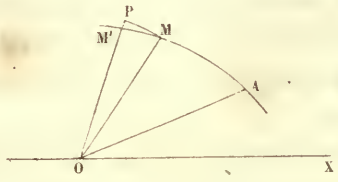
Il existe toujours une fonction dont la dérivée soit égale à une fonction donnée $\varphi(x)$.

Pour trouver une telle fonction, il suffit, en effet, de considérer la courbe dont l'équation en coordonnées rectangulaires est

$$y = \varphi(x);$$

l'aire comprise entre une ordonnée fixe et l'ordonnée dont l'abscisse est x, est une fonction déterminée, qui, d'après le théorème précédent, a pour dérivée $\varphi(x)$.

116. Considérons, en second lieu, une courbe plane rapportée à des coordonnées polaires, et cherchons la différentielle de l'aire comprise entre cette courbe, un rayon vecteur fixe OA, et le rayon OM qui correspond à l'angle ω.



Si l'on attribue à l'angle ω un accroissement infiniment petit MOM′ représenté par $d\omega$, l'accroissement de l'aire est le secteur MOM′; du point O comme centre, avec OM pour rayon, décrivons l'arc de cercle MP, on peut substituer à OMM′ le secteur OMP, en négligeant le triangle infiniment petit du second ordre MM′P. Mais le secteur OMP est égal à $\rho^2 \frac{d\omega}{2}$: telle est donc la différentielle de l'aire considérée, et la dérivée de cette aire par rapport à ω est $\frac{\rho^2}{2}$.

117. On a besoin quelquefois d'exprimer la différentielle précédente en employant les coordonnées rectilignes; il est facile de déduire son expression du résultat que nous venons d'obtenir.

On a, en effet, en vertu des formules connues de transformation, en prenant pour origine des coordonnées nouvelles le pôle O, et pour axe des X l'axe polaire,

$$\operatorname{tang}\omega = \frac{y}{x}, \quad \omega = \operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x};$$

on en déduit

$$d\omega = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2},$$

et, à cause de $x^2 + y^2 = \rho^2$,

$$\rho^2 d\omega = x\,dy - y\,dx,$$

en sorte que la différentielle de l'aire AOM est

$$dA = \frac{x\,dy - y\,dx}{2}.$$

Cette formule pourra donner pour dA une valeur négative; il suffit pour cela que l'on ait

$$x dy - y dx < 0,$$

c'est-à-dire, en supposant x et dx positifs,

$$\frac{dy}{dx} < \frac{y}{x},$$

ce qui suppose que la parallèle menée par le point O à la tangente en M, dirigée dans le sens où x augmente, soit au-dessous du rayon vecteur OM, et que, par suite, l'angle ω diminue lorsque le rayon OM tourne autour du point O pour se transporter sur OM′.

L'expression $x dy - y dx$ est donc négative, comme cela doit être, dans le même cas que l'expression équivalente $\rho^2 d\omega$.

Différentielle d'un arc de courbe.

118. La comparaison directe d'un arc de courbe avec la ligne droite prise pour unité étant impossible, une définition est indispensable. Nous avons adopté la suivante : La longueur d'un arc de courbe est la limite dont s'approche le périmètre d'un polygone inscrit, lorsque ses côtés diminuent indéfiniment. Il a été prouvé (18) que cette définition est légitime, et l'on en a déduit qu'un arc infiniment petit diffère de sa corde, d'un infiniment petit du troisième ordre.

Soit AM un arc de courbe plane, rapporté à des coordonnées rectangulaires OX et OY. Si, l'extrémité A restant fixe, l'abscisse de l'extrémité M reçoit un accroissement infiniment petit représenté par Δx, l'arc prend l'accroissement infiniment petit MM′. Or MM′ peut (19) être remplacé par sa corde, qui n'en diffère que d'un infiniment petit du troisième ordre, et cette corde est égale à

$$\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}.$$

Le rapport de cette corde à Δx est donc

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)^2},$$

et la limite de ce rapport, c'est-à-dire la dérivée de l'arc, est

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}.$$

La différentielle de l'arc s est le produit de cette dérivée par dx, et l'on a, par conséquent,

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}.$$

Lorsque la courbe proposée est plane, en la rapportant à deux axes de coordonnées situés dans son plan, on trouvera évidemment

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

119. Appliquons la formule précédente à l'arc de cycloïde. Nous avons trouvé (83), en prenant pour origine des coordonnées le sommet, et pour axe des X la tangente à la courbe,

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{y}{2a-y}};$$

on en conclut :

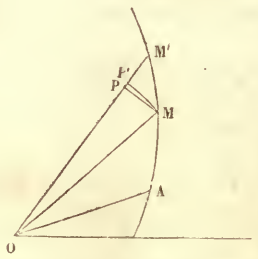
$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = dy^2\left[1 + \frac{2a-y}{y}\right] = \frac{2a\,dy^2}{y}.$$

Or $dy\sqrt{\frac{2a}{y}}$ est la différentielle de $2\sqrt{2ay}$. La différence $s - 2\sqrt{2ay}$ est donc constante puisque la différentielle est nulle. Si l'on compte l'arc s à partir du sommet de la cycloïde, les deux termes de la différence sont nuls en même temps quand on suppose $y = 0$, et la constante est, par conséquent, nulle; on a donc

$$s = 2\sqrt{2ay}.$$

On reconnaît bien facilement l'identité de ce résultat avec celui qui a été trouvé (20).

120. Considérons actuellement une courbe plane AM rapportée à des coordonnées polaires. L'extrémité A restant fixe, si l'on nomme ρ et ω les coordonnées de l'extrémité M, cet arc, que nous désignons par s, est une fonction de ω, dont nous allons chercher la différentielle.



Attribuons à ω un accroissement MOM′ représenté par $\Delta\omega$, l'accroissement correspondant de l'arc s est MM′ : $\Delta\omega$ étant supposé infiniment petit, l'arc MM′ peut être remplacé par sa corde qui n'en diffère que d'un infiniment petit du troisième ordre. Or, en abaissant du point M une perpendiculaire MP sur le rayon vecteur OM′, on a

$$\overline{MM'}^2 = \overline{M'P}^2 + \overline{MP}^2.$$

Décrivons de l'origine O comme centre, avec OM pour rayon, un arc de cercle MP′, compris entre les rayons vecteurs OM et OM′, on pourra, en négligeant toujours les infiniment petits d'un ordre supérieur au premier, remplacer M′P par M′P′, et MP par l'arc MP′. L'erreur commise dans la première substitution est en effet égale à PP′, c'est-à-dire à la différence entre la longueur OM et la projection de cette longueur sur une direction qui forme avec la sienne un angle infiniment petit; quant à la substitution de l'arc MP′ à la droite MP, elle revient à remplacer un sinus infiniment petit par l'arc correspondant.

On a évidemment

$$M'P' = \Delta\rho,$$

$$MP' = \rho\Delta\omega.$$

Par conséquent, en négligeant les infiniment petits d'un ordre supérieur au second,

$$\overline{MM'}^2 = \Delta\rho^2 + \rho^2\overline{\Delta\omega}^2.$$

La limite du rapport $\frac{MM'}{\Delta\omega}$, c'est-à-dire la dérivée de l'arc s, est par conséquent

$$\frac{ds}{d\omega} = \sqrt{\left(\frac{d\rho}{d\omega}\right)^2 + \rho^2},$$

et l'on en conclut

$$ds = \sqrt{d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2},$$

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2.$$

On a trouvé en employant les coordonnées rectilignes

$$ds^2 = dx^2 + dy^2,$$

et en employant les coordonnées polaires

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\omega.$$

Ces expressions sont équivalentes, et l'on peut facilement passer de l'une à l'autre. On a, en effet,

$$x = \rho\cos\omega, \qquad y = \rho\sin\omega,$$

on en déduit

$$dx = \cos\omega\, d\rho - \rho\sin\omega\, d\omega,$$

$$dy = \sin\omega\, d\rho + \rho\cos\omega\, d\omega,$$

et en ajoutant ces équations après avoir élevé au carré les deux membres de chacune d'elles,

$$dx^2 + dy^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2.$$

121. On détermine quelquefois les points de l'espace à l'aide d'un système de coordonnées analogues aux coordonnées polaires: OX, OY, OZ étant trois axes rectangulaires, un point M est défini par sa distance ρ à l'origine, par l'angle θ formé par ce rayon vecteur avec l'axe des Z et par l'angle ψ compris entre le plan des ZX et celui qui passe par l'axe des Z et par le rayon ρ.

Pour exprimer la différentielle de l'arc d'une courbe rapportée à un tel système de coordonnées, considérons, en premier lieu, une courbe située sur la surface d'une sphère de rayon ρ. Les points de cette courbe seront déterminés par les coordonnées θ et ψ. Les points qui, sur la sphère, correspondent à une même valeur de ψ sont situés sur un grand cercle dont le plan, passant par l'axe des Z, forme avec celui des ZX un angle égal à ψ, et les points qui correspondent à une même valeur de θ sont situés sur le petit cercle suivant lequel la sphère est coupée par le cône de révolution d'angle θ dont l'axe coïncide avec l'axe des Z: le rayon de ce petit cercle est évidemment $\rho \sin\theta$. Le point défini sur la sphère par les coordonnées θ et ψ résulte de l'intersection des deux cercles que l'on vient d'indiquer, dont l'un peut être considéré comme un *méridien* de la surface sphérique, et l'autre comme un *parallèle*.

Les quatre cercles qui correspondent à deux points infiniment voisins, ayant pour coordonnées, l'un θ et ψ, l'autre $\theta + d\theta$ et $\psi + d\psi$, forment un rectangle infiniment petit: la distance des deux points est la diagonale de ce rectangle et peut être considérée comme l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les côtés sont deux arcs de cercle infiniment petits, et que l'on peut assimiler à un triangle rectiligne; l'un des côtés de ce triangle appartient à un cercle de rayon ρ et correspond à l'angle $d\theta$, il est égal à $\rho\, d\theta$; l'autre appartient à un cercle de rayon $\rho \sin\theta$ et correspond à l'angle $d\psi$, il est égal à $\rho \sin\theta\, d\psi$: la distance ds des deux points considérés est par conséquent exprimée par la formule

$$ds^2 = \rho^2 d\theta^2 + \rho^2 \sin^2\theta\, d\psi^2.$$

Considérons maintenant une courbe quelconque dans l'espace. Chaque point de cette courbe est défini par trois coordonnées ρ, θ et ψ. La valeur de ρ fait connaître une sphère qui contient le point. Celle de θ fait connaître un cône sur lequel il se trouve également, et ψ détermine enfin un plan qui, par son intersection avec la sphère et avec le cône, achève de le fixer. Ces trois surfaces, la sphère, le cône et le plan, se coupent deux à deux sous des angles droits; si donc l'on considère deux points infiniment voisins, les six surfaces qui les déterminent formeront un parallélipipède rectangle infiniment petit, dont la diagonale est la distance des deux points. Le carré de cette distance, ds^2, est donc la somme des carrés des trois arêtes, c'est-à-dire, comme on le voit bien facilement,

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 + \rho^2 \sin^2\theta\, d\psi^2.$$

122. La formule précédente peut se déduire de l'équation

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

On a, en effet,

$$z = \rho \cos\theta, \qquad x = \rho \sin\theta \cos\psi, \qquad y = \rho \sin\theta \sin\psi,$$

on en déduit

$$dz = -\rho \sin\theta d\theta + \cos\theta d\rho,$$
$$dx = \rho \cos\theta d\theta \cos\psi - \rho \sin\theta \sin\psi d\psi + \sin\theta \cos\psi d\rho,$$
$$dy = \rho \cos\theta d\theta \sin\psi + \rho \sin\theta \cos\psi d\psi + \sin\theta \sin\psi d\rho,$$

et en ajoutant les carrés on trouve, après des réductions faciles,

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 + \rho^2 \sin^2\theta d\psi^2.$$

Différentielle d'un arc de courbe dans un système de coordonnées curvilignes.

123. Le système le plus général que l'on puisse concevoir pour représenter les points de l'espace, est celui dans lequel un point est déterminé par l'intersection de trois surfaces données, de nature quelconque, et dont chacune se trouve définie par la valeur attribuée à un paramètre qui figure dans son équation. Supposons que les équations de ces trois surfaces soient résolues par rapport aux paramètres variables, et représentons-les par

$$\alpha = \varphi(x, y, z),$$
$$\beta = \psi(x, y, z),$$
$$\gamma = \mathrm{F}(x, y, z).$$

Donner une valeur à α, c'est assigner une surface sur laquelle se trouve le point considéré; si l'on donne à la fois α et β, le point est situé sur deux surfaces données et par suite sur leur courbe d'intersection; enfin la position du point est déterminée par l'intersection de cette courbe avec la surface qui correspond à la valeur choisie pour γ.

Il est facile de calculer la distance des deux points infiniment voisins dont les coordonnées sont α, β, γ, $\alpha + d\alpha$, $\beta + d\beta$, $\gamma + d\gamma$. En nommant en effet ds cette distance, on a

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Mais x, y, z peuvent être considérées comme trois fonctions de α, β, γ, et

l'on a

$$dx = \frac{dx}{d\alpha}\,d\alpha + \frac{dx}{d\beta}\,d\beta + \frac{dx}{d\gamma}\,d\gamma,$$

$$dy = \frac{dy}{d\alpha}\,d\alpha + \frac{dy}{d\beta}\,d\beta + \frac{dy}{d\gamma}\,d\gamma,$$

$$dz = \frac{dz}{d\alpha}\,d\alpha + \frac{dz}{d\beta}\,d\beta + \frac{dz}{d\gamma}\,d\gamma,$$

et l'on voit, par suite, que l'expression de ds^2 est de la forme

$$ds^2 = A\,d\alpha^2 + B\,d\beta^2 + C\,d\gamma^2 + D\,d\alpha\,d\beta + E\,d\alpha\,d\gamma + F\,d\beta\,d\gamma.$$

124. Si les surfaces représentées par les équations données se coupent orthogonalement pour toutes les valeurs de α, β, γ, les coefficients D, E, F disparaîtront de la formule précédente, et l'expression de ds^2 se réduira à la forme

$$ds^2 = A\,d\alpha^2 + B\,d\beta^2 + C\,d\gamma^2.$$

En effet, dans l'hypothèse admise, les six surfaces qui correspondent aux valeurs α, β, γ, $\alpha + d\alpha$, $\beta + d\beta$, $\gamma + d\gamma$ des coordonnées, forment un parallélipipède rectangle dont la diagonale ds a pour carré la somme des carrés des trois arêtes; mais les arêtes sont respectivement représentées par ce que devient ds quand on suppose $d\beta = 0$, $d\gamma = 0$, puis $d\alpha = 0$, $d\gamma = 0$, et enfin $d\alpha = 0$, $d\beta = 0$; leurs longueurs sont donc, d'après l'expression générale de ds^2,

$$d\alpha\sqrt{A}, \qquad d\beta\sqrt{B}, \qquad d\gamma\sqrt{C},$$

et l'on a, par suite,

$$ds^2 = A\,d\alpha^2 + B\,d\beta^2 + C\,d\gamma^2,$$

en sorte que D, E, F sont nuls.

125. La considération du parallélipipède rectangle infiniment petit peut nous donner également l'expression simple des coefficients A, B, C; $A\,d\alpha^2$, par exemple, est le carré de la distance des points infiniment voisins correspondant aux coordonnées α, β, γ, $\alpha + d\alpha$, β, γ. Si l'on nomme ε cette distance, ses projections sur les axes des coordonnées sont respectivement égales aux produits de ε par les cosinus des angles formés par sa direction avec ces axes; cette direction étant celle de la normale à la surface dont l'équation est

$$\alpha = \varphi(x, y, z),$$

les trois projections sont représentées par

$$dx = \frac{\varepsilon \frac{d\alpha}{dx}}{\sqrt{\left(\frac{d\alpha}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\alpha}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\alpha}{dz}\right)^2}}, \quad dy = \frac{\varepsilon \frac{d\alpha}{dy}}{\sqrt{\left(\frac{d\alpha}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\alpha}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\alpha}{dz}\right)^2}},$$

$$dz = \frac{\varepsilon \frac{d\alpha}{dz}}{\sqrt{\left(\frac{d\alpha}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\alpha}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\alpha}{dz}\right)^2}};$$

et par suite l'équation

$$d\alpha = \frac{d\alpha}{dx}\,dx + \frac{d\alpha}{dy}\,dy + \frac{d\alpha}{dz}\,dz$$

donne

$$d\alpha = \varepsilon \sqrt{\left(\frac{d\alpha}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\alpha}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\alpha}{dz}\right)^2}.$$

Donc

$$\varepsilon^2 = \frac{d\alpha^2}{\left(\frac{d\alpha}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\alpha}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\alpha}{dz}\right)^2}.$$

ε^2 représentant, comme on l'a dit, le produit $A\,d\alpha^2$, on en conclut

$$A = \frac{1}{\left(\frac{d\alpha}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\alpha}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\alpha}{dz}\right)^2};$$

on aura de même

$$B = \frac{1}{\left(\frac{d\beta}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\beta}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\beta}{dz}\right)^2}, \quad C = \frac{1}{\left(\frac{d\gamma}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\gamma}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\gamma}{dz}\right)^2},$$

et l'expression de ds^2 devient

$$ds^2 = \frac{d\alpha^2}{\left(\frac{d\alpha}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\alpha}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\alpha}{dz}\right)^2} + \frac{d\beta^2}{\left(\frac{d\beta}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\beta}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\beta}{dz}\right)^2} + \frac{d\gamma^2}{\left(\frac{d\gamma}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\gamma}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\gamma}{dz}\right)^2}.$$

126. Pour étudier les points d'une surface, on peut admettre que cette surface fasse partie du triple système de surfaces coordonnées, et qu'elle corresponde à une valeur donnée de l'un des trois paramètres, de γ par exemple. Dans l'expression

précédente, il faudra alors supposer $d\gamma = 0$, et le carré de la distance de deux points infiniment voisins prendra la forme

$$ds^2 = A\,d\alpha^2 + B\,d\beta^2,$$

α et β étant les paramètres de deux systèmes de courbes qui se croisent à angle droit sur la surface donnée.

127. Les formules précédentes fournissent, comme application particulière, la formule trouvée (121) pour exprimer la distance de deux points infiniment voisins dans le système de coordonnées polaires défini par les équations

$$z = \rho\cos\theta, \quad x = \rho\sin\theta\cos\psi, \quad y = \rho\sin\theta\sin\psi,$$

équivalant à

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \quad \theta = \text{arc tang}\,\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}, \quad \psi = \text{arc tang}\,\frac{y}{x}.$$

ρ, θ et ψ étant ici les trois paramètres désignés dans la formule générale par les lettres α, β, γ, on trouve le résultat déjà obtenu (122)

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 + \rho^2\sin^2\theta\,d\psi^2.$$

Si l'on veut la distance de deux points infiniment voisins sur une même sphère de rayon ρ, il faut faire $d\rho = 0$ dans la formule précédente, et l'on a

$$ds^2 = \rho^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\psi^2),$$

ce qui s'accorde avec le résultat déjà trouvé.

128. Après le système de coordonnées polaires, le système de coordonnées curvilignes le plus fréquemment employé est celui dans lequel chaque point est déterminé par l'intersection de trois surfaces homofocales du second degré.

Supposons qu'un point soit défini par les valeurs que prennent en ce point les trois racines de l'équation en μ,

$$\frac{x^2}{\mu^2} + \frac{y^2}{\mu^2 - b^2} + \frac{z^2}{\mu^2 - c^2} - 1 = 0,$$

b et c désignant des constantes données.

Pour chaque point de l'espace les trois racines de cette équation sont réelles. Si l'on suppose par exemple $b^2 < c^2$, il suffit pour s'en assurer de faire successivement $\mu^2 = +\varepsilon$, $\mu^2 = b^2 - \varepsilon$, $\mu^2 = b^2 + \varepsilon$, $\mu^2 = c^2 - \varepsilon$, $\mu^2 = c^2 + \varepsilon$, ε étant

infiniment petit et positif. Le premier membre prendra les signes suivants :

$$\begin{cases} \mu^2 = \varepsilon \dots\dots\dots\dots & + \\ \mu^2 = b^2 - \varepsilon \dots\dots\dots & - \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mu^2 = b^2 + \varepsilon \dots\dots\dots & + \\ \mu^2 = c^2 - \varepsilon \dots\dots\dots & - \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mu^2 = c^2 + \varepsilon \dots\dots\dots & + \\ \mu^2 = +\infty \dots\dots\dots\dots & -1 \end{cases}$$

et comme le premier membre ne devient pas infini pour les valeurs de μ comprises entre celles qui sont réunies par une même accolade, il faut qu'il s'annule dans chacun de ces intervalles, et l'équation a par suite trois racines, l'une comprise entre o et b^2, l'autre entre b^2 et c^2, la troisième entre c^2 et $+\infty$. Si l'on adopte la première racine, la surface représentée par l'équation (1) est un hyperboloïde à deux nappes, elle est un hyperboloïde à une nappe si l'on adopte la seconde racine, et un ellipsoïde quand on adopte la troisième. En nommant μ, ν, ρ les trois racines et supposant $\mu^2 > \nu^2 > \rho^2$, les trois surfaces ont pour équations

$$(2)\qquad \begin{aligned} &\frac{x^2}{\mu^2} + \frac{y^2}{\mu^2 - b^2} + \frac{z^2}{\mu^2 - c^2} = 1, \\ &\frac{x^2}{\nu^2} + \frac{y^2}{\nu^2 - b^2} - \frac{z^2}{c^2 - \nu^2} = 1, \\ &\frac{x^2}{\rho^2} - \frac{y^2}{b^2 - \rho^2} - \frac{z^2}{c^2 - \rho^2} = 1, \end{aligned}$$

on constate facilement qu'elles se coupent à angle droit.

129. En regardant comme coordonnées d'un point les valeurs de μ, ν, ρ qui lui correspondent, la distance de deux points infiniment voisins prend une expression remarquable. Commençons par résoudre les trois équations (2). Pour y parvenir, décomposons en fractions simples l'expression

$$\frac{(\lambda - \rho^2)(\lambda - \mu^2)(\lambda - \nu^2)}{\lambda(\lambda - b^2)(\lambda - c^2)}.$$

D'après la méthode connue fournie par l'algèbre élémentaire, cette fraction est égale à

$$1 - \frac{x^2}{\lambda} - \frac{y^2}{\lambda - b^2} - \frac{z^2}{\lambda - c^2},$$

en faisant

$$(2)\quad x^2=\frac{\rho^2\mu^2\nu^2}{b^2c^2},\quad y^2=\frac{(\rho^2-b^2)(\mu^2-b^2)(\nu^2-b^2)}{b^2(b^2-c^2)},\quad z^2=\frac{(\rho^2-c^2)(\mu^2-c^2)(\nu^2-c^2)}{c^2(c^2-b^2)}.$$

Si donc on a

$$1-\frac{x^2}{\lambda}-\frac{y^2}{\lambda-b^2}-\frac{z^2}{\lambda-c^2}=0,$$

on en déduira pour λ les trois valeurs, $\lambda=\rho^2$, $\lambda=\mu^2$, $\lambda=\nu^2$ et les formules (2) font connaître x, y et z, en fonction des trois paramètres qui leur correspondent. On déduit des formules (2), en les différentiant après avoir pris les logarithmes des deux membres,

$$dx=\frac{x\,d\rho}{\rho}+\frac{x\,d\mu}{\mu}+\frac{x\,d\nu}{\nu},$$

$$dy=\frac{y\rho\,d\rho}{\rho^2-b^2}+\frac{y\mu\,d\mu}{\mu^2-b^2}+\frac{y\nu\,d\nu}{\nu^2-b^2},$$

$$dz=\frac{z\rho\,d\rho}{\rho^2-c^2}+\frac{z\mu\,d\mu}{\mu^2-c^2}+\frac{z\nu\,d\nu}{\nu^2-c^2},$$

et par suite, après des réductions faciles,

$$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2=d\rho^2\frac{(\rho^2-\mu^2)(\rho^2-\nu^2)}{(\rho^2-b^2)(\rho^2-c^2)}+d\mu^2\frac{(\mu^2-\nu^2)(\mu^2-\rho^2)}{(\mu^2-b^2)(\mu^2-c^2)}+d\nu^2\frac{(\nu^2-\rho^2)(\nu^2-\mu^2)}{(\nu^2-b^2)(\nu^2-c^2)}.$$

Si l'on suppose $d\rho=0$, c'est-à-dire si les deux points infiniment voisins sont sur l'ellipsoïde dont l'équation est $\rho=$ const., cette formule devient

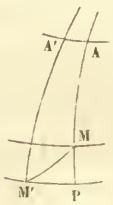
$$ds^2=(\mu^2-\nu^2)\left[\frac{(\mu^2-\rho^2)\,d\mu^2}{(\mu^2-b^2)(\mu^2-c^2)}+\frac{(\rho^2-\nu^2)\,d\nu^2}{(\nu^2-b^2)(\nu^2-c^2)}\right].$$

130. Sur chaque surface et à chaque système de variables, correspond une forme particulière de l'expression qui représente ds^2. L'étude de ces formes a, comme on le verra plus tard, une grande importance pour la théorie des surfaces, mais nous nous bornerons à donner ici celle qui convient aux surfaces de révolution.

Surfaces de révolution. — En prenant pour coordonnées des points d'une surface de révolution, la longueur σ comptée sur le méridien, entre le point considéré et un parallèle fixe, et l'angle ω formé par le méridien avec un méridien fixe, on voit

immédiatement que l'expression de ds^2 est de la forme

$$ds^2 = d\sigma^2 + \varphi(\sigma)\, d\omega^2.$$



Soient, en effet, M et M′ deux points infiniment voisins; AM, A′M′ les méridiens qui leur correspondent; $AM = \sigma$, $A'M' = \sigma + d\sigma$. L'angle de ces méridiens étant $d\omega$, on a

$$MM'^2 = \overline{MP}^2 + \overline{M'P}^2.$$

Or $\overline{MP}^2$ est égal à $d\sigma^2$, et M′P est un arc correspondant à l'angle $d\omega$ et décrit avec le rayon du parallèle, lequel dépend de σ, suivant une loi variable avec la nature de la surface, en sorte que l'expression est de la forme annoncée

$$ds^2 = d\sigma^2 + \varphi(\sigma).d\omega^2.$$

131. Les formules générales que nous venons de faire connaître se présentent particulièrement dans l'étude générale des cartes géographiques. Si l'on suppose que la surface de la terre (quelle que soit d'ailleurs sa forme) soit découpée par deux séries de courbes orthogonales auxquelles nous donnerons les noms de méridiens et de parallèles, et telles, que par chaque point de la surface il passe une courbe de chaque espèce, définie par la valeur d'un paramètre que nous nommons α pour les méridiens (on leur donne le nom de longitude) et β pour les parallèles (on désigne ce paramètre sous le nom de latitude), pour représenter sur un plan une série de points situés sur la surface de la terre, il faut établir une dépendance entre les coordonnées x, y des points situés sur le plan, et les valeurs α, β des paramètres relatifs aux points correspondants de la surface. Si la distance de deux points voisins sur la surface de la terre est donnée par la formule

$$ds^2 = A\,d\alpha^2 + B\,d\beta^2,$$

celle des points correspondants de la carte sera exprimée par

$$ds'^2 = dx^2 + dy^2,$$

et la carte serait parfaite si le rapport $\frac{ds}{ds'}$ était constant. Malheureusement une telle condition ne serait possible que si la surface de la terre appartenait à une classe de surfaces nommées développables, ce qui est très-loin d'avoir lieu.

Si le rapport $\frac{ds}{ds'}$, sans être constant, est le même dans toutes les directions autour d'un même point, les petites portions de la surface ne seront pas déformées, et la carte devra être regardée comme satisfaisante pour une contrée de peu d'étendue. Mais nous aurons à revenir sur cette importante théorie et nous démontrerons qu'il existe toujours une infinité de systèmes remplissant cette condition.

EXERCICES.

1. On donne sur un plan deux courbes quelconques, et l'on joint par des lignes droites les points de ces courbes pour lesquelles les tangentes sont parallèles; par un point fixe on mène des droites égales et parallèles aux lignes ainsi définies : prouver que l'arc de la courbe, lieu de leurs extrémités, est la somme ou la différence des arcs correspondants des courbes données.

2. Si l'on considère, sur une lemniscate ayant pour équation $\rho^2 = a^2 \cos 2\omega$, deux points P et Q correspondants à des valeurs ω' et ω'' de l'angle ω telles, que l'on ait

$$\cos\omega' \cos\omega'' = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

l'arc compris entre le point P et le pôle est égal à celui qui sépare le point Q du sommet correspondant à $\omega = 0$.

3. Si l'on considère sur la parabole dont l'équation est $2y = x^2$, trois arcs ayant leur origine au sommet, et pour abscisses de leurs extrémités les trois racines de l'équation

$$X^3 - aX^2 + \left(\frac{a^2}{4} + 1\right) X - a = 0,$$

la somme algébrique des arcs est égale à celle des abscisses de leurs extrémités, c'est-à-dire à a.

4. Si l'on nomme *points correspondants* sur la courbe dont l'équation est $y^3 = 27a^2x$, ceux dont les abscisses x_1, x_2 ont un produit égal à a^2, la différence entre un arc quelconque et son correspondant est égale à l'excès de la différence des tangentes correspondantes aux extrémités du premier arc, sur la différence de celles qui correspondent aux extrémités du second, les tangentes étant comptées depuis leur point de contact jusqu'à leur intersection avec l'axe des X.

5. Une droite se meut en restant parallèle à la base d'un cylindre de révolution auquel elle est constamment tangente, le point de contact décrivant une hélice donnée. Chercher l'équation de la surface qu'elle engendre et prouver qu'il existe un hyperboloïde de révolution tel, qu'en adoptant une loi convenable de correspondance entre les génératrices et les points de deux surfaces, une courbe quelconque tracée sur l'une soit égale en longueur à la courbe correspondante sur l'autre.

6. Si l'on représente les points d'une surface réglée au moyen de deux variables u et v, dont l'une soit constante sur une génératrice et l'autre égale à la distance comptée sur la génératrice entre le point considéré et une courbe fixe perpendiculaire à toutes les génératrices, la distance de deux points infiniment voisins de la surface est exprimée par une équation de la forme

$$ds^2 = dv^2 + \varphi(v, u)\, du^2,$$

$\varphi(v, u)$ étant un polynôme du second degré par rapport à la variable v.

CHAPITRE VI.

DÉRIVÉES ET DIFFÉRENTIELLES D'ORDRE SUPÉRIEUR AU PREMIER.

Définition des dérivées d'ordre supérieur.

132. Les méthodes exposées dans les chapitres précédents permettent de former la dérivée d'une fonction donnée quelconque d'une variable x. Cette dérivée est une fonction de la même variable, et les mêmes règles permettent d'en prendre la dérivée que l'on nomme seconde dérivée de la fonction primitivement considérée. La dérivée de la seconde dérivée est la troisième dérivée, et ainsi de suite indéfiniment. De même que la première dérivée s'indique par un accent placé au-dessus du signe de la fonction, la seconde dérivée est indiquée par deux accents, la seconde par trois, etc., en sorte que les dérivées successives d'une fonction $\varphi(x)$ sont désignées par

$$\varphi'(x), \quad \varphi''(x), \quad \varphi'''(x), \quad \varphi^{IV}(x), \ldots, \varphi^{n}(x).$$

Définition des différentielles d'ordre supérieur.

133. En désignant par $\varphi(x)$ une fonction y de la variable x, on a (**46**), par définition,

$$dy = \varphi'(x)\,dx. \tag{1}$$

Si l'on regarde dx comme une constante, cette différentielle dy est une fonction de la seule variable x, et l'on peut elle-même la différentier. La différentielle de dy se nomme différentielle seconde de y, on la désigne par d^2y et l'on a évidemment

$$d^2y = \varphi''(x)\,dx^2. \tag{2}$$

En regardant toujours dx comme une constante, d^2y est une fonction de la seule variable x. La différentielle de d^2y se nomme différentielle troisième de y, on la désigne par d^3y et l'on a évidemment

$$d^3y = \varphi'''(x)\,dx^3, \tag{3}$$

et en continuant à faire des conventions que l'analogie indique suffisamment, on

verra que l'expression de la différentielle $n^{ième}$ de y, $d^n y$, est

$$d^n y = \varphi^n(x)\, dx^n. \tag{n}$$

Les équations (1), (2), (3), ..., (n) donnent, si l'on veut, l'expression des dérivées successives en fonction des différentielles correspondantes, on en déduit :

$$\varphi'(x) = \frac{dy}{dx}, \quad \varphi''(x) = \frac{d^2y}{dx^2}, \quad \varphi'''(x) = \frac{d^3y}{dx^3}, \dots, \quad \varphi^n(x) = \frac{d^ny}{dx^n}.$$

134. Si l'on attribue à la variable x des accroissements finis, égaux entre eux, et représentés par Δx, la fonction $\varphi(x)$ prend les valeurs successives $\varphi(x)$, $\varphi(x + \Delta x)$, $\varphi(x + 2\Delta x)$, ..., $\varphi(x + n\Delta x)$, que nous représenterons par $y, y_1, y_2, \dots, y_n$. Posons, en adoptant une notation souvent employée,

$$y_1 - y = \Delta y, \qquad y_2 - y_1 = \Delta y_1, \dots\dots\dots \qquad y_n - y_{n-1} = \Delta y_{n-1},$$
$$\Delta y_1 - \Delta y = \Delta^2 y, \quad \Delta y_2 - \Delta y_1 = \Delta^2 y_1, \dots\dots \Delta y_{n-1} - \Delta y_{n-2} = \Delta^2 y_{n-2},$$
$$\Delta^2 y_1 - \Delta^2 y = \Delta^3 y, \ \Delta^2 y_2 - \Delta^2 y_1 = \Delta^3 y_1, \dots \Delta^2 y_{n-2} - \Delta^2 y_{n-3} = \Delta^3 y_{n-3},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\Delta^{n-1} y_1 - \Delta^{n-1} y = \Delta^n y,$$

$\Delta^2 y$, $\Delta^3 y$, ..., sont les différences secondes, troisièmes, etc., de y.

Si Δx devient infiniment petit, Δy peut être remplacé par dy. Nous allons prouver que l'on peut de même remplacer $\Delta^2 y$ par $d^2 y$, $\Delta^3 y$ par $d^3 y$, et ainsi de suite, en ne négligeant, dans chacune de ces substitutions, qu'une portion infiniment petite de la quantité que l'on évalue. Mais pour faire cette démonstration nous devons préalablement démontrer le théorème suivant :

135. *Si une fonction $\psi(x, a)$ contient, outre la variable x, une lettre a qui en est indépendante, et que cette fonction soit nulle, quelle que soit x, lorsqu'on y suppose a égal à zéro, il en est de même de la dérivée* $\frac{d\psi(x, a)}{dx}$.

Cette proposition devient évidente si l'on remarque que, la lettre a étant traitée comme une constante dans la différentiation et la valeur de cette constante restant indéterminée, il est indifférent de la fixer avant ou après l'opération. Or en faisant $a = 0$ avant l'opération, la fonction devient nulle, et sa dérivée est par conséquent égale à zéro ; il en est donc de même si l'on suppose a égal à zéro après la différentiation effectuée.

Il est évident, d'après cela, que si la fonction $\psi(x, a)$ est infiniment petite, quel que soit x, pour une valeur infiniment petite de a, il en est de même de sa dérivée $\frac{d\psi(x, a)}{dx}$.

136. Cela posé, considérons la fonction

$$y = \varphi(x), \tag{1}$$

et adoptant la notation du paragraphe précédent, on a

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \varphi'(x) + \varepsilon, \tag{2}$$

ε étant une fonction de x et de Δx qui s'annule avec Δx. Si, dans les deux membres de l'équation (2), on change x en $x + \Delta x$, leurs accroissements divisés l'un et l'autre par Δx seront égaux, et l'on aura

$$\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} = \frac{\Delta \varphi'(x)}{\Delta x} + \frac{\Delta \varepsilon}{\Delta x}.$$

Or, lorsque Δx tend vers zéro, $\frac{\Delta \varphi'(x)}{\Delta x}$ a évidemment pour limite $\varphi''(x)$, et $\frac{\Delta \varepsilon}{\Delta x}$ a pour limite zéro; car, ε étant, quel que soit x, infiniment petit avec Δx, il en est de même (135) de sa dérivée et par conséquent du rapport $\frac{\Delta \varepsilon}{\Delta x}$ qui diffère infiniment peu de cette dérivée. Il résulte de là que Δx étant infiniment petit, et en négligeant les infiniment petits du troisième ordre, on a

$$\Delta^2 y = \varphi''(x)\,\Delta x^2,$$

c'est-à-dire que, Δx étant infiniment petit. $\Delta^2 y$ est égal à $d^2 y$ lorsqu'on néglige les infiniment petits du troisième ordre.

137. Il résulte de la démonstration précédente que Δx tendant vers zéro, $\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}$ a pour limite la seconde dérivée de y, $\varphi''(x)$; posons donc

$$\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} = \varphi''(x) + \varepsilon_1, \tag{1}$$

ε_1 étant une fonction de x et de Δx qui s'annule avec Δx. Si, dans les deux membres de l'équation (1), on change x en $x + \Delta x$, leurs accroissements divisés l'un et l'autre par Δx seront égaux et l'on aura

$$\frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3} = \frac{\Delta \varphi''(x)}{\Delta x} + \frac{\Delta \varepsilon_1}{\Delta x}.$$

Or, lorsque Δx tend vers zéro, $\frac{\Delta \varphi''(x)}{\Delta x}$ a évidemment pour limite $\varphi'''(x)$ et $\frac{\Delta \varepsilon_1}{\Delta x}$ a pour limite zéro, pour la même raison que dans le cas précédent; il en résulte que, Δx étant infiniment petit, on a, en négligeant les infiniment petits du quatrième ordre,

$$\Delta^3 y = \varphi'''(x)\,\Delta x^3.$$

On verra absolument de la même manière que $\Delta^4 y$ peut être remplacé par $\varphi^{IV}(x)\,\Delta x^4$, et que, généralement, $\Delta^n y$ est égal à $\varphi^n(x)\,\Delta x^n$ lorsqu'on néglige les

infiniment petits d'ordre $n+1$, en sorte que $\Delta^n y$ et $d^n y$ sont deux infiniment petits d'ordre n, dont le rapport a pour limite l'unité.

138. Il y a une différence essentielle entre les différentielles d'ordre supérieur et celles du premier ordre. Lorsque plusieurs variables sont tellement liées les unes aux autres, que toutes dépendent de l'une d'entre elles, les rapports de leurs différentielles du premier ordre sont complétement déterminés (57). Il n'en est pas de même pour les différentielles d'ordre supérieur, tant que l'on n'a pas fait choix d'une variable indépendante; cela tient à ce que, pour former les différences $\Delta^2 y$, $\Delta^3 y$, ..., que l'on peut remplacer, lorsqu'elles sont infiniment petites, par $d^2 y$, $d^3 y$, ..., il faut attribuer à la variable principale x des accroissements successifs égaux entre eux, et cela distingue cette variable de toutes les autres dont les accroissements correspondants sont, en général, inégaux. Lorsque l'on considère, au contraire, les seules différences et différentielles du premier ordre, on ne donne à la variable x qu'un seul accroissement Δx que rien ne distingue des accroissements correspondants des autres variables.

Remarquons enfin que les différentielles d'ordre supérieur au premier sont nulles pour la variable principale ou indépendante, et que l'on a évidemment, lorsque x est cette variable,

$$d^2 x = 0, \quad d^3 x = 0, \ldots.$$

Détermination des dérivées successives d'une fonction.

139. Pour former les dérivées successives d'une fonction, il suffit d'appliquer un nombre de fois convenable les méthodes connues qui fournissent les dérivées du premier ordre. Malheureusement les calculs se compliquent souvent de plus en plus, et il est presque indispensable de recourir à des artifices particuliers pour obtenir *effectivement* les dérivées d'un ordre élevé.

Nous allons donner quelques exemples de ces artifices.

Dérivées d'un produit. — Si l'on représente par P et Q deux fonctions d'une même variable x, les règles connues donnent

$$(1)\qquad \begin{aligned} \frac{d(PQ)}{dx} &= P\frac{dQ}{dx} + Q\frac{dP}{dx}, \\ \frac{d^2(PQ)}{dx^2} &= P\frac{d^2Q}{dx^2} + 2\frac{dP}{dx}\frac{dQ}{dx} + Q\frac{d^2P}{dx^2}, \\ \frac{d^3(PQ)}{dx^3} &= P\frac{d^3Q}{dx^3} + 3\frac{dP}{dx}\frac{d^2Q}{dx^2} + 3\frac{d^2P}{dx^2}\frac{dQ}{dx} + Q\frac{d^3P}{dx^3}, \end{aligned}$$

et l'on est conduit, par induction, à écrire la formule suivante :

$$\frac{d^n(PQ)}{dx^n} = P\frac{d^nQ}{dx^n} + n\frac{dP}{dx}\frac{d^{n-1}Q}{dx^{n-1}} + \frac{n(n-1)}{1.2}\frac{d^2P}{dx^2}\frac{d^{n-2}Q}{dx^{n-2}} + \dots + \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1.2\dots k}\frac{d^kP}{dx^k}\frac{d^{n-k}Q}{dx^{n-k}} + \dots + \frac{d^nP}{dx^n}\cdot Q. \tag{2}$$

Pour démontrer cette formule, admettons qu'elle soit vraie pour une valeur du nombre n, et prouvons qu'elle est vraie, par cela même, pour une valeur immédiatement supérieure. Or en différentiant les deux membres de l'équation (2), on en déduit

$$\frac{d^{n+1}PQ}{dx^{n+1}} = \left(\frac{dP}{dx}\frac{d^nQ}{dx^n} + P\frac{d^{n+1}Q}{dx^{n+1}}\right) + n\left(\frac{d^2P}{dx^2}\frac{d^{n-1}Q}{dx^{n-1}} + \frac{dP}{dx}\frac{d^nQ}{dx^n}\right) + \dots$$
$$+ \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1.2.3\dots k}\left(\frac{d^{k+1}P}{dx^{k+1}}\frac{d^{n-k}Q}{dx^{n-k}} + \frac{d^kP}{dx^k}\frac{d^{n-k+1}Q}{dx^{n-k+1}}\right) + \dots + \left(\frac{d^{n+1}P}{dx^{n+1}}Q + \frac{d^nP}{dx^n}\frac{dQ}{dx}\right).$$

En réduisant le second terme de chaque parenthèse avec le premier de la parenthèse précédente, et remarquant que la somme de deux coefficients de la puissance $n^{ième}$ d'un binôme est un coefficient de la puissance $(n+1)^{ième}$, cette équation devient

$$\frac{d^{n+1}PQ}{dx^{n+1}} = P\frac{d^{n+1}Q}{dx^{n+1}} + (n+1)\frac{dP}{dx}\frac{d^nQ}{dx^n} + \frac{(n+1)n}{1.2}\frac{d^2P}{dx^2}\frac{d^{n-1}Q}{dx^{n-1}} + \dots$$
$$+ \frac{(n+1)n\dots(n+1-k+1)}{1.2\dots k}\frac{d^kP}{dx^k}\frac{d^{n+1-k}Q}{dx^{n+1-k}} + \dots + Q\frac{d^{n+1}P}{dx^{n+1}},$$

ce qui est la formule (2) dans laquelle n est changé en $n+1$, et dont la généralité est ainsi démontrée.

140. *Dérivées d'une fonction de fonction.* — Soit u une fonction de x, et $\varphi(u)$ une fonction de fonction que nous désignerons par y. On trouve en différentiant successivement et en représentant par $\varphi'(u)$, $\varphi''(u)$, $\varphi'''(u)$,..., les dérivées successives de la fonction $\varphi(u)$,

$$y = \varphi(u), \tag{1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}\varphi'(u), \tag{2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2u}{dx^2}\varphi'(u) + \left(\frac{du}{dx}\right)^2\varphi''(u), \tag{3}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d^3u}{dx^3}\varphi'(u) + 3\frac{du}{dx}\frac{d^2u}{dx^2}\varphi''(u) + \left(\frac{du}{dx}\right)^3\varphi'''(u), \tag{4}$$

et l'on voit aisément que l'expression de $\frac{d^ny}{dx^n}$ est de la forme

$$\frac{d^ny}{dx^n} = A_1\varphi'(u) + A_2\varphi''(u) + \dots + A_n\varphi^n(u),$$

$A_1, A_2, \ldots, A_n$ dépendant de u et de ses dérivées, mais ne variant pas avec la forme de la fonction φ.

Pour obtenir ces coefficients, posons

$$A_k = \frac{B_k}{1.2\ldots k},$$

et, par conséquent,

$$(5) \qquad \frac{d^n y}{dx^n} = B_1 \varphi'(u) + \frac{B_2}{1.2}\varphi''(u) + \ldots + \frac{B_k}{1.2\ldots k}\varphi^k(u) + \ldots + \frac{B_n}{1.2\ldots n}\varphi^n(u).$$

Les coefficients $B_1, B_2, \ldots, B_n$ étant indépendants de la forme de φ, on peut les déterminer en faisant sur cette fonction des hypothèses particulières. Nous supposerons successivement, $\varphi(u) = u$, $\varphi(u) = u^2, \ldots, \varphi(u) = u^n$, et en appliquant l'équation (5) à ces différents cas, on obtiendra, entre les inconnues $B_1, B_2, \ldots, B_n$, les n équations suivantes :

$$(6) \quad \begin{cases} \dfrac{d^n u}{dx^n} = B_1, \\ \dfrac{d^n (u^2)}{dx^n} = 2B_1 u + B_2, \\ \dfrac{d^n (u^3)}{dx^n} = 3B_1 u^2 + 3B_2 u + B_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{d^n (u^n)}{dx^n} = nB_1 u^{n-1} + \dfrac{n(n-1)}{1.2} B_2 u^{n-2} + \dfrac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} B_3 u^{n-3} + \ldots + B_n. \end{cases}$$

Pour résoudre ces équations et calculer l'un quelconque des coefficients, B_k par exemple, ajoutons-les jusqu'à celle de rang k inclusivement, après avoir multiplié la première par $k \cdot \frac{1}{u}$, la seconde par $-\frac{k(k-1)}{1.2}\frac{1}{u^2}$, la troisième par $\frac{k(k-1)(k-2)}{1.2.3}\frac{1}{u^3}$, la quatrième par

$$-\frac{k(k-1)(k-2)(k-3)}{1.2.3.4}\frac{1}{u^4},$$

et ainsi de suite; toutes les inconnues $B_1, B_2, \ldots, B_k$ disparaîtront, à l'exception de B_k. En effet, k' étant un nombre quelconque inférieur à k, le coefficient de $B_{k'}$ est, après cette addition,

$$(-1)^{k'+1}\frac{1}{u^{k'}}\left[\frac{k(k-1)\ldots(k-k'+1)}{1.2.3\ldots k'} - \frac{k(k-1)\ldots(k-k')}{1.2.3\ldots k'+1}(k'+1) + \frac{k(k-1)\ldots(k-k'-1)}{1.2.3\ldots k'+2}\frac{(k'+1)(k'+2)}{1.2}\ldots \pm \frac{k(k-1)\ldots 1}{1.2\ldots k}\frac{(k'+1)(k'+2)\ldots k}{1.2\ldots(k-k')}\right],$$

c'est-à-dire

$$(-1)^{k'+1}\frac{1}{u^{k'}}\cdot\frac{k(k-1)\ldots(k-k'+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots k'}\left[1-(k-k')+\frac{(k-k')(k-k'-1)}{1\cdot 2}\ldots \pm\frac{(k-k')(k-k'-1)\ldots 1}{1\cdot 2\ldots k-k'}\right],$$

ou enfin,

$$\pm\frac{1}{u^{k'}}\left[\frac{k(k-1)\ldots(k-k'+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots k'}(1-1)^{k-k'}\right]=0.$$

Il y a exception quand on suppose $k=k'$, et la somme est dans ce cas $(-1)^{k+1}\frac{1}{u^k}$.

L'équation obtenue en ajoutant les équations (6) respectivement multipliées par les facteurs indiqués, est donc

$$\frac{1}{u^k}B_k=(-1)^{k+1}\left[\frac{k}{u}\frac{d^n u}{dx^n}-\frac{k(k-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{u^2}\frac{d^n u^2}{dx^n}+\frac{k(k-1)(k-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{1}{u^3}\frac{d^n u^3}{dx^n}-\ldots\pm\frac{1}{u^k}\frac{d^n u^k}{dx^n}\right].$$

D'après cela, la formule (5) fera connaître la dérivée $n^{ième}$ d'une fonction $\varphi(u)$, en fonction des dérivées $n^{ièmes}$ de toutes les puissances de u, dont l'exposant ne surpasse pas n.

141. L'expression trouvée pour représenter $\frac{B_k}{u^k}$ peut se transformer de la manière suivante :

On a

$$\left(\frac{u}{\alpha}-1\right)^k=(-1)^k\left(1-\frac{u}{\alpha}\right)^k=(-1)^k\left[1-\frac{ku}{\alpha}+\frac{k(k-1)}{1\cdot 2}\frac{u^2}{\alpha^2}\ldots\pm\frac{u^k}{\alpha^k}\right].$$

Différentions n fois les deux membres par rapport à x, en traitant α comme une constante, nous aurons

$$\frac{d^n\left(\frac{u}{\alpha}-1\right)^k}{dx^n}=(-1)^k\left[-\frac{k}{\alpha}\frac{d^n u}{dx^n}+\frac{k(k-1)}{1\cdot 2}\frac{1}{\alpha^2}\frac{d^n u^2}{dx^n}+\ldots\pm\frac{1}{\alpha^k}\frac{d^n u^k}{dx^n}\right],$$

et si l'on fait $\alpha=u$ dans le second membre, il coïncide avec l'expression de $B_k\cdot\frac{1}{u^k}$. On a donc enfin

$$B_k=u^k\frac{d^n\left(\frac{u}{\alpha}-1\right)^k}{dx^n},$$

pourvu que, dans le second membre, la lettre α, traitée dans les différentiations comme une constante, soit remplacée ensuite par la lettre u.

L'expression de $\frac{d^n\varphi(u)}{dx^n}$ est d'après cela

$$\frac{d^n\varphi(u)}{dx^n} = \sum \frac{u^k}{1.2.3\ldots k}\varphi^k(u).\ \frac{d^n\left(\frac{u}{\alpha}-1\right)^k}{dx^n},$$

la sommation s'étendant à toutes les valeurs entières de k, depuis 1 jusqu'à n, et la lettre α qui figure dans le second membre devant être remplacée par u après la différentiation effectuée.

142. Supposons dans la formule générale $u = x^2$, nous aurons

$$\frac{d^n\varphi(x^2)}{dx^n} = B_1\varphi'(x^2) + \frac{B_2}{1.2}\varphi''(x^2) + \ldots + \frac{B_k}{1.2\ldots k}\varphi^k(x^2) + \ldots + \frac{B_n}{1.2\ldots n}\varphi^n(x^2),$$

et l'expression de B_k devient

$$\frac{1}{x^{2k}}B_k = (-1)^{k+1}\left[\frac{k}{x^2}\frac{d^n x^2}{dx^n} - \frac{k(k-1)}{1.2}\frac{1}{x^4}\frac{d^n x^4}{dx^n} - \ldots \pm \frac{1}{x^{2k}}\frac{d^n x^{2k}}{dx^n}\right].$$

Sans nous arrêter à réduire cette formule, il sera plus simple de calculer directement les dérivées successives de $\varphi(x^2)$, afin d'obtenir, par induction, la loi de leur formation. En posant

$$y = \varphi(x^2), \tag{1}$$

on trouvera par les différentiations successives

$$\frac{dy}{dx} = 2x\varphi'(x^2), \tag{2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = (2x)^2\varphi''(x^2) + 2\varphi'(x^2), \tag{3}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = (2x)^3\varphi'''(x^2) + 6(2x)\varphi''(x^2), \tag{4}$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = (2x)^4\varphi^{IV}(x^2) + 12(2x)^2\varphi'''(x^2) + 12\varphi''(x^2), \tag{5}$$

$$\frac{d^5y}{dx^5} = (2x)^5\varphi^{V}(x^2) + 20(2x)^3\varphi^{IV}(x^2) + 60(2x)\varphi'''(x^2), \tag{6}$$

et l'on est conduit à écrire

$$\frac{d^ny}{dx^n} = (2x)^n\varphi^n(x^2) + n(n-1)(2x)^{n-2}\varphi^{n-1}(x^2) + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2}(2x)^{n-4}\varphi^{n-2}(x^2)\ldots$$

$$+ \frac{n(n-1)\ldots(n-2p+1)}{1.2\ldots p}(2x)^{n-2p}\varphi^{n-p}(x^2) + \ldots, \tag{7}$$

les termes du second membre devant être arrêtés lorsque la loi évidente de formation donne des coefficients égaux à zéro.

Pour vérifier cette formule, il suffit de montrer que si on la suppose vraie pour une valeur de n, elle est vraie, par cela même, pour la valeur immédiatement supérieure. Or en admettant la formule (7) le coefficient de $\varphi^{n+1-p}(x^2)$ dans $\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}$ est évidemment

$$\frac{n(n-1)\dots(n-2p+1)}{1.2\dots p}(2x)^{n-2p+1}+\frac{n(n-1)\dots(n-2p+3)}{1.2\dots p-1}(n-2p+2)\,2\,(2x)^{n-2p+1},$$

c'est-à-dire

$$(2x)^{n-2p+1}\frac{n(n-1)\dots(n-2p+3)(n-2p+2)}{1\,2\dots p-1}\left[\frac{n-2p+1}{p}+2\right]$$
$$=(2x)^{n-2p+1}\frac{(n+1)n\dots(n+1-2p+1)}{1.2.3\dots p},$$

ce qui confirme la loi annoncée.

143. Appliquons la formule précédente à la recherche de

$$\frac{d^{m-1}(1-x^2)^{m-\frac{1}{2}}}{dx^{m-1}},$$

dont l'expression, remarquable par sa simplicité, a été donnée et utilisée par Jacobi. La formule précédente appliquée à ce cas donne immédiatement

$$\frac{d^{m-1}(1-x^2)^{m-\frac{1}{2}}}{dx^{m-1}}=(-1)^{m-1}\left[(2x)^{m-1}(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\left(m-\frac{1}{2}\right)\left(m-\frac{3}{2}\right)\dots\frac{3}{2}\right.$$
$$-\frac{(m-1)(m-2)}{1}(2x)^{m-3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\left(m-\frac{1}{2}\right)\left(m-\frac{3}{2}\right)\dots\left(\frac{5}{2}\right)$$
$$\left.+\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2}(2x)^{m-5}(1-x^2)^{\frac{5}{2}}\left(m-\frac{1}{2}\right)\left(m-\frac{3}{2}\right)\dots\frac{7}{2}-\dots\right],$$

c'est-à-dire

$$\frac{d^{m-1}(1-x^2)^{m-\frac{1}{2}}}{dx^{m-1}}=(-1)^{m-1}\frac{1.3.5\dots2m-1}{m}\left[mx^{m-1}\sqrt{1-x^2}\right.$$
$$-\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^{m-3}(\sqrt{1-x^2})^3$$
$$\left.+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1.2.3.4.5}x^{m-5}(\sqrt{1-x^2})^5\dots\right].$$

Si l'on pose $x=\cos u$, cette expression devient, en vertu d'une formule connue de trigonométrie, qui sera d'ailleurs démontrée dans un prochain chapitre,

$$(-1)^{m-1}\frac{1.3.5\dots2m-1}{m}\sin mu.$$

On a donc, en posant $x = \cos u$,

$$\frac{d^{m-1}(1-x^2)^{m-\frac{1}{2}}}{dx^{m-1}} = (-1)^{m-1}\frac{1.3.5\ldots 2m-1}{m}\sin mu.$$

144. *Dérivées de arc tang x.* — On a

$$\frac{d\,\text{arc tang}\,x}{dx} = \frac{1}{1+x^2},$$
$$\frac{d^2\,\text{arc tang}\,x}{dx^2} = -\frac{2x}{(1+x^2)^2},$$
$$\frac{d^3\,\text{arc tang}\,x}{dx^3} = \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}.$$

Il est facile de continuer les opérations, mais les résultats se compliquent de plus en plus, et la loi générale n'apparaît pas d'elle-même. Pour la découvrir, remarquons qu'en posant

$$u = \text{arc tang}\,x,$$

on a

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{1+x^2} = \frac{\sqrt{-1}}{2}\left[\frac{1}{x+\sqrt{-1}} - \frac{1}{x-\sqrt{-1}}\right];$$

on en conclut

$$\frac{d^{n+1}u}{dx^{n+1}} = \frac{\sqrt{-1}}{2}(1.2.3\ldots n)(-1)^n\left[\frac{1}{(x+\sqrt{-1})^{n+1}} - \frac{1}{(x-\sqrt{-1})^{n+1}}\right].$$

En réduisant au même dénominateur les deux fractions qui sont dans la parenthèse, on verra les imaginaires disparaître et l'expression de la dérivée prendra une forme réelle.

On obtient un résultat élégant en posant

$$u = \frac{\pi}{2} - y;$$

on a alors

$$\cos y = \sin u = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$$
$$\sin y = \cos u = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}},$$
$$x+\sqrt{-1} = \sqrt{1+x^2}\left[\cos y + \sqrt{-1}\sin y\right],$$
$$x-\sqrt{-1} = \sqrt{1+x^2}\left[\cos y - \sqrt{-1}\sin y\right],$$

mais le théorème de Moivre donne, pour toute valeur positive ou négative de m,

$$(\cos x + \sqrt{-1}\sin x)^m = \cos mx + \sqrt{-1}\sin mx,$$
$$(\cos x - \sqrt{-1}\sin x)^m = \cos mx - \sqrt{-1}\sin mx.$$

Par conséquent,

$$\frac{1}{(x+\sqrt{-1})^{n+1}}-\frac{1}{(x-\sqrt{-1})^{n+1}}=\frac{-2\sqrt{-1}}{(1+x^2)^{\frac{n+1}{2}}}[\sin(n+1)y],$$

et comme on a d'ailleurs

$$\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{n+1}{2}}}=\sin^{n+1}y,$$

il en résulte

$$\frac{d^{n+1}u}{dx^{n+1}}=1.2.3\ldots n(-1)^{n+1}\sin^{n+1}y\sin(n+1)y.$$

145. *Dérivées de arc sin x.* — On a

$$\frac{d\arcsin x}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=(1+x)^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{-\frac{1}{2}},$$

et par conséquent

$$\frac{d^{n+1}\arcsin x}{dx^{n+1}}=\frac{d^n(1-x)^{-\frac{1}{2}}(1+x)^{-\frac{1}{2}}}{dx^n},$$

et d'après la formule générale (139)

$$\frac{d^{n+1}\arcsin x}{dx^{n+1}}=\frac{1.3.5\ldots 2n-1}{2^n\sqrt{1-x^2}}\cdot\frac{1}{(1-x)^n}\left[1-\frac{n}{2n-1}\frac{1-x}{1+x}+\frac{1.3.\frac{n(n-1)}{1.2}}{(2n-1)(2n-3)}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2\right.$$
$$-\frac{1.3.5.\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}}{(2n-1)(2n-3)(2n-5)}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^3\pm\cdots\frac{1.3.5\ldots(2p-1)}{(2n-1)(2n-3)\ldots(2n-2p+1)}$$
$$\left.\times\frac{n(n-1)(n-p+1)}{1.2.3\ldots p}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^p\mp\cdots\pm\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n\right].$$

Il sera utile de remarquer que les coefficients des puissances de $\frac{1-x}{1+x}$ dans la parenthèse sont tous moindres que l'unité. Le rapport du coefficient de $\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{p+1}$ à celui de $\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^p$ est en effet

$$\frac{(2p+1)(n-p)}{(2n-2p-1)(p+1)}=\frac{2-\frac{1}{p+1}}{2-\frac{1}{n-p}}.$$

Or ce rapport est moindre que l'unité lorsque l'on a $n-p>p+1$, c'est-à-dire $n>2p+1$, et il est au contraire plus grand que l'unité lorsque l'on a $n<2p+1$.

Les coefficients vont donc en diminuant depuis le premier jusqu'au coefficient minimum, et ils augmentent ensuite depuis celui-là jusqu'au dernier. Les coefficients extrêmes, qui sont l'un et l'autre égaux à l'unité, sont par conséquent plus grands que tous les autres.

Valeur numérique de quelques dérivées lorsque l'on suppose la variable nulle.

146. On a souvent besoin de calculer ce que devient une dérivée pour une valeur numérique attribuée à la variable, et particulièrement lorsque, après l'opération, on suppose celle-ci égale à zéro. Les questions de ce genre se résolvent quelquefois à l'aide d'artifices particuliers, dont nous allons donner quelques exemples.

Dérivées de arc tang x, pour $x = 0$. — Il n'est pas nécessaire de recourir à l'expression générale de la dérivée pour déterminer la valeur qu'elle prend lorsqu'on y suppose $x = 0$.

On a, en effet, et posant $u = \text{arc tang } x$,

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{1+x^2},$$
$$\frac{d^2u}{dx^2} = -\frac{2x}{(1+x^2)^2},$$

et par conséquent

$$(1+x^2)\frac{d^2u}{dx^2} + 2x\frac{du}{dx} = 0.$$

En différentiant cette équation $(n-1)$ fois, et faisant pour cela usage du théorème connu (139), on en déduit

$$(1+x^2)\frac{d^{n+1}u}{dx^2} + 2(n-1)x\frac{d^nu}{dx^n} + (n-1)(n-2)\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}} + 2x\frac{d^nu}{dx^n} + 2(n-1)\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}} = 0,$$

et en supposant $x = 0$,

$$\left(\frac{d^{n+1}u}{dx^{n+1}}\right)_0 + \left(\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}\right)_0 n(n-1) = 0,$$

on en déduit, si $n+1$ est impair, et en remarquant que $\left(\frac{du}{dx}\right)_0 = 1$,

$$\left(\frac{d^{n+1}u}{dx^{n+1}}\right)_0 = (-1)^n\, 1.2.3\ldots n.$$

Si $n+1$ est pair, en remarquant que $\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)_0 = 0$, on déduit de la même équation

$$\left(\frac{d^{n+1}u}{dx^{n+1}}\right)_0 = 0.$$

147. *Dérivées de arc sin x, pour $x = 0$.* — Si l'on pose

$$u = \arcsin x,$$

on en déduit

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\sqrt{1-x^2}\,\frac{du}{dx} = 1,$$

$$\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\,\frac{du}{dx} + \sqrt{1-x^2}\,\frac{d^2u}{dx^2} = 0,$$

et en chassant le dénominateur

$$(1-x^2)\,\frac{d^2u}{dx^2} - x\,\frac{du}{dx} = 0.$$

En différentiant $n-1$ fois cette équation et faisant usage du théorème connu (**139**), il vient

$$(1-x^2)\,\frac{d^{n+1}u}{dx^{n+1}} - 2(n-1)\,x\,\frac{d^nu}{dx^n} - (n-1)(n-2)\,\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}} - x\,\frac{d^nu}{dx^n} - (n-1)\,\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}} = 0,$$

et en supposant $x = 0$,

$$\left(\frac{d^{n+1}u}{dx^{n+1}}\right)_0 - (n-1)^2\left(\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}\right)_0 = 0.$$

Si $(n+1)$ est impair, en remarquant que $\left(\frac{du}{dx}\right)_0 = 1$, on en déduit

$$\left(\frac{d^{n+1}u}{dx^{n+1}}\right)_0 = 1.3^2.5^2\ldots(n-1)^2,$$

et si $n+1$ est pair, on a

$$\left(\frac{d^{n+1}u}{dx^{n+1}}\right)_0 = 0.$$

148. *Dérivées de $(arc\ sin\ x)^2$, pour $x = 0$.* — Posons $(\arcsin x)^2 = u$, on en déduit

$$\frac{du}{dx} = \frac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{2}{1-x^2} + \frac{2x\arcsin x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{1-x^2} + \frac{x}{1-x^2}\,\frac{du}{dx},$$

par conséquent

$$(1-x^2)\,\frac{d^2u}{dx^2} - x\,\frac{du}{dx} = 2.$$

En différentiant $(n-1)$ fois cette équation, on a

$$(1-x^2)\,\frac{d^{n+1}u}{dx^{n+1}} - 2(n-1)\,x\,\frac{d^nu}{dx^n} - (n-1)(n-2)\,\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}} - x\,\frac{d^nu}{dx^n} - (n-1)\,\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}} = 0,$$

et en faisant $x = 0$,

$$\frac{d^{n+1}u}{dx^{n+1}} - (n-1)^2 \left(\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}\right)_0 = 0,$$

et cette relation permet de calculer les dérivées successives, on a, si $n+1$ est impair,

$$\left(\frac{d^{n+1}u}{dx^{n+1}}\right)_0 = 0,$$

et lorsque $n+1$ est pair,

$$\left(\frac{d^{n+1}u}{dx^{n+1}}\right)_0 = 2.2^2.4^2.6^2\ldots(n-1)^2.$$

149. *Dérivées de $x \cot x$, pour $x = 0$.* — Posons $x \cot x = u$, on a évidemment

$$x \cos x = u \sin x; \tag{1}$$

différentions n fois les deux membres de cette équation, on aura, en appliquant la règle relative à la dérivée d'un produit,

$$x\frac{d^n \cos x}{dx^n} + n\frac{d^{n-1}\cos x}{dx^{n-1}} = u\frac{d^n \sin x}{dx^n} + n\frac{du}{dx}\cdot\frac{d^{n-1}\sin x}{dx^{n-1}} + \frac{n(n-1)}{1.2}\frac{d^2u}{dx^2}\frac{d^{n-2}\sin x}{dx^{n-2}}\cdots + \sin x\frac{d^n u}{dx^n}. \tag{2}$$

Si, dans cette équation, on suppose $x = 0$, le terme en $\frac{d^n u}{dx^n}$ disparaîtra et l'on aura l'expression de $\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}$ en fonction de toutes les dérivées précédentes; en faisant successivement $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, ..., on trouve

$$u = 1, \quad \frac{du}{dx} = 0, \quad \frac{d^2u}{dx^2} = -\frac{2}{3}, \quad \frac{d^3u}{dx^3} = 0\ldots,$$

et ces premières valeurs étant connues, l'équation (2) permettra d'en déduire les dérivées successives.

On peut remarquer que toutes les dérivées d'ordre impair sont égales à zéro; la fonction $x \cot x$ est en effet une fonction paire, c'est-à-dire qu'elle ne change ni de signe ni de valeur quand on y remplace x par $-x$; en la désignant par $\varphi(x)$, on a donc

$$\varphi(x) = \varphi(-x),$$

et, en prenant les dérivées successives de cette équation,

$$\varphi'(x) = -\varphi'(-x),$$
$$\varphi''(x) = +\varphi''(-x),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\varphi^n(x) = (-1)^n \varphi^n(-x).$$

On en conclut, en faisant $x = 0$, que, pour toute valeur impaire de n,

$$\varphi^n(0) = -\varphi^{n+1}(0),$$

et par suite

$$\varphi^n(0) = 0.$$

On trouve, en faisant les calculs numériques,

$$\left(\frac{du}{dx}\right)_0 = 0,\ \left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)_0 = -\frac{2}{3},\ \left(\frac{d^3u}{dx^3}\right)_0 = 0,\ \left(\frac{d^4u}{dx^4}\right)_0 = -\frac{8}{15},\ \left(\frac{d^5u}{dx^5}\right)_0 = 0,\ \left(\frac{d^6u}{dx^6}\right)_0 = -\frac{288}{189},$$
$$\left(\frac{d^7u}{dx^7}\right)_0 = 0,\ \left(\frac{d^8u}{dx^8}\right)_0 = -\frac{8064}{945}.$$

150. *Dérivées de* $\frac{x}{e^x - 1}$, *pour* $x = 0$. — Posons $\frac{x}{e^x - 1} = u$, on en déduit

$$x = ue^x - u, \tag{1}$$

et en différentiant

$$1 = e^x \frac{du}{dx} + ue^x - \frac{du}{dx}.$$

En différentiant n fois de suite les deux membres de l'équation (1), on trouve

$$0 = e^x \frac{d^n u}{dx^n} + n e^x \frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}} + \frac{n(n-1)}{1.2} e^x \frac{d^{n-2}u}{dx^{n-2}} + \cdots + ue^x - \frac{d^n u}{dx^n},$$

et si l'on suppose $x = 0$,

$$0 = n\left(\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}\right)_0 + \frac{n(n-1)}{1.2}\left(\frac{d^{n-2}u}{dx^{n-2}}\right)_0 + \cdots + n\left(\frac{du}{dx}\right)_0 + (u)_0.$$

Cette relation permet de calculer l'une des dérivées lorsque l'on connait toutes les précédentes; u_0 est égal à l'unité. Le rapport $\frac{e^x - 1}{x}$, lorsque x est infiniment petit, est, en effet, la dérivée de e^x, qui pour $x = 0$ se réduit à l'unité, et il en est évidemment de même du rapport inverse $\frac{x}{e^x - 1}$. On a, en effectuant les calculs,

$$u_0 = 1,\ \left(\frac{du}{dx}\right)_0 = -\frac{1}{2},\ \left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)_0 = \frac{1}{6},\ \left(\frac{d^3u}{dx^3}\right)_0 = 0,\ \left(\frac{d^4u}{dx^4}\right)_0 = -\frac{1}{30},\ \left(\frac{d^5u}{dx^5}\right)_0 = 0,$$
$$\left(\frac{d^6u}{dx^6}\right)_0 = \frac{1}{42},\ \left(\frac{d^7u}{dx^7}\right)_0 = 0,\ \left(\frac{d^8u}{dx^8}\right)_0 = -\frac{1}{30},\ \left(\frac{d^9u}{dx^9}\right)_0 = 0,\ \left(\frac{d^{10}u}{dx^{10}}\right)_0 = \frac{5}{66},\ \left(\frac{d^{11}u}{dx^{11}}\right)_0 = 0,$$
$$\left(\frac{d^{12}u}{dx^{12}}\right)_0 = -\frac{691}{2730},\ \left(\frac{d^{13}u}{dx^{13}}\right)_0 = 0,\ \left(\frac{d^{14}u}{dx^{14}}\right)_0 = \frac{7}{6},\ \text{etc....}$$

Toutes les dérivées d'ordre impair sont égales à zéro, à l'exception de la pre-

mière $\frac{du}{dx}$. On peut en donner la raison à priori, et indépendamment des calculs précédents; la fonction

$$\frac{x}{e^x - 1} + \frac{x}{2}$$

est en effet, comme on le vérifie aisément, une fonction paire de x, et, comme on l'a vu plus haut pour $x \cot x$, il en résulte que les dérivées d'ordre impair sont nulles pour $x = 0$; or ces dérivées, à l'exception de la première, sont les mêmes que celles de $\frac{x}{e^x - 1}$.

151. *Dérivées de cos (m arc sin x), pour x = 0.* — Posons

$$u = \cos(m \arcsin x),$$

on en déduit

$$\frac{du}{dx} = -\frac{m \sin(m \arcsin x)}{\sqrt{1 - x^2}},$$

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = \frac{-mx}{(1 - x^2)\sqrt{1 - x^2}} \sin(m \arcsin x) - \frac{m^2 \cos(m \arcsin x)}{(1 - x^2)};$$

et l'on en conclut

$$(1 - x^2)\frac{d^2 u}{dx^2} - x\frac{du}{dx} + m^2 u = 0.$$

En différentiant p fois cette équation, on obtient

$$(1 - x^2)\frac{d^{p+2} u}{dx^{p+2}} - 2px\frac{d^{p+1} u}{dx^{p+1}} - p(p-1)\frac{d^p u}{dx^p} - x\frac{d^{p+1} u}{dx^{p+1}} - p\frac{d^p u}{dx^p} + m^2\frac{d^p u}{dx^p} = 0,$$

ou, en faisant $x = 0$,

$$\left(\frac{d^{p+2} u}{dx^{p+2}}\right)_0 = (p^2 - m^2)\left(\frac{d^p u}{dx^p}\right)_0.$$

D'ailleurs, pour $x = 0$, on a $u = 1$, $\frac{du}{dx} = 0$. Par conséquent l'équation précédente montre que toutes les dérivées d'ordre impair sont nulles. Quant à celles d'ordre pair, on les déduira successivement les unes des autres, puisque l'une quelconque d'entre elles se trouve liée à celle qui précède de deux rangs. On aura ainsi

$$\left(\frac{d^{2n+2} u}{dx^{2n+2}}\right)_0 = (-1)^{n+1}(m^2)(m^2 - 4)(m^2 - 16)\ldots(m^2 - 4n^2).$$

L'étude de la fonction précédente a donné lieu à de graves difficultés que nous préviendrons en donnant, dès à présent, quelques explications sur le résultat précédent.

La fonction cos (*m* arc sin *x*) est une fonction mal définie, et, sous un même signe,

elle représente en réalité plusieurs fonctions différentes dont le nombre peut même devenir infini. L'arc dont le sinus est x n'est pas unique en effet, et l'on sait au contraire qu'il en existe un nombre infini; en multipliant ces arcs par m (qui est quelconque), les produits auront en général des cosinus différents, en nombre égal au double du dénominateur de m si m est commensurable, et en nombre infini si m est incommensurable.

Toutes ces fonctions différentes ont-elles les mêmes dérivées?

Le résultat que nous venons d'obtenir semble décider la question, au moins pour la valeur particulière $x=0$, et puisque nous n'avons trouvé qu'une seule valeur, on peut se croire en droit de conclure qu'il n'en existe qu'une. Ce serait là pourtant commettre une erreur grave. Le calcul précédent est fondé sur deux suppositions qui particularisent la fonction à laquelle il se rapporte. En premier lieu, après avoir posé

$$u = \cos m(\arcsin x),$$

nous en avons conclu

$$\frac{du}{dx} = -m\frac{\sin m \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}},$$

admettant par conséquent que la dérivée de $\arcsin x$ est $\frac{+1}{\sqrt{1-x^2}}$. Or cela n'a lieu (34) que si le cosinus de l'arc considéré est positif; dans le cas contraire on a

$$\frac{d\arcsin x}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}},$$

et il aurait fallu écrire

$$\frac{du}{dx} = +m\frac{\sin(m\arcsin x)}{\sqrt{1+x^2}},$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{mx\sin(m\arcsin x)}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} - m^2\frac{\cos(m\arcsin x)}{(1-x^2)},$$

d'où l'on aurait déduit

$$(1-x^2)\frac{d^2u}{dx^2} - x\frac{du}{dx} + m^2u = 0,$$

équation identique à celle que l'on a obtenue en adoptant l'autre hypothèse, et qui conduirait de même à la relation

$$\frac{d^{p+2}u}{dx^{p+2}} = (p^2-m^2)\frac{d^pu}{dx^p}.$$

Mais, en second lieu, nous avons admis qu'en faisant $x=0$, on a $u=1$, $\frac{du}{dx}=0$. Cela n'est vrai que si l'on admet, pour $x=0$, $\arcsin x=0$, qui est la première valeur qui se présente, mais non pas la seule, car on a, pour $x=0$, $\arcsin x = k\pi$,

k étant un nombre entier quelconque, et par suite

$$u = \cos(m \arcsin x) = \cos mk\pi.$$

De même si $\left(\frac{du}{dx}\right)_0$ est nul, c'est en vertu de la même supposition, car en supposant $\arcsin x = k\pi$, on doit adopter, pour $\frac{du}{dx}$, l'une des valeurs suivantes,

$$\frac{du}{dx} = -m \sin mk\pi,$$

$$\frac{du}{dx} = m \sin mk\pi.$$

Il faut bien remarquer que la première convient au cas où k est pair, parce qu'alors $\cos k\pi$ est positif, et la seconde au cas où k est impair.

La valeur trouvée pour $\left(\frac{d^{2n+2}u}{dx^{2n+2}}\right)_0$ se rapporte donc seulement à la fonction $\cos m(\arcsin x)$ dans laquelle on prend pour $\arcsin x$ l'arc qui s'annule pour $x = 0$, et qui, devant varier d'une manière continue, est toujours le plus petit des arcs positifs ou négatifs, ayant x pour sinus. Le cosinus de cet arc est toujours positif.

152. Si nous voulons maintenant rendre à la fonction $u = \cos(m \arcsin x)$ toute sa généralité, il est facile de calculer l'expression générale de ses dérivées pour $x = 0$. On a dans tous les cas

$$\frac{d^{p+2}u}{dx^{p+2}} = (p^2 - m^2)\frac{d^p u}{dx^p}.$$

D'ailleurs, pour $x = 0$, on a

$$u = \cos(m \arcsin 0) = \cos mk\pi,$$

$$\frac{du}{dx} = \pm m \sin(m \arcsin 0) = \pm m \sin mk\pi,$$

et par conséquent on trouvera

$$\frac{d^{2n+2}u}{dx^{2n+2}} = (-1)^{n+1}(m^2)(m^2-4)(m^2-16)\ldots(m^2-4n^2)\cdot\cos m(k)\pi,$$

$$\frac{d^{2n+1}u}{dx^{2n+1}} = \mp(-1)^n(m^2-1)(m^2-9)\ldots[m^2-(2n-1)^2]\, m \sin m(k)\pi,$$

le signe — correspondant au cas où k est pair.

153. *Dérivées de* $\sin(m \arcsin x)$, *pour* $x = 0$. — Le calcul des dérivées de la fonction $\sin(m \arcsin x)$ se fait de la même manière et donne lieu à une discussion

analogue. Posons

$$u = \sin(m \arcsin x),$$

on en conclut

$$\frac{du}{dx} = \frac{m\cos(m\arcsin x)}{\pm\sqrt{1-x^2}},$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{mx\cos(m\arcsin x)}{\pm(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} - \frac{m^2\sin(m\arcsin x)}{(1-x^2)},$$

le signe + du radical devant être adopté lorsque $\arcsin x$ a un cosinus positif, et le signe — dans le cas contraire. On déduit de ces formules l'équation

$$\frac{d^2u}{dx^2}(1-x^2) - x\frac{du}{dx} + m^2u = 0,$$

qui convient à tous les cas. En différentiant p fois cette équation qui ne diffère pas de celle qui a été trouvée plus haut, on trouvera encore, pour $x = 0$,

$$\frac{d^{p+2}u}{dx^{p+2}} = (p^2 - m^2)\frac{d^pu}{dx^p}.$$

D'ailleurs, pour $x = 0$, on a

$$u = \sin(m \arcsin 0) = \sin mk\pi$$

et

$$\frac{du}{dx} = \pm m\cos(m\arcsin 0) = \pm m\cos mk\pi,$$

le signe + correspondant au cas où $(\cos\arcsin x)$ est positif, et par conséquent au cas où k est pair. D'après cela on trouvera aisément

$$\frac{d^{2p+2}u}{dx^{2p+2}} = (-1)^p m^2(m^2-4)\ldots(m^2-4p^2)\sin mk\pi,$$

$$\frac{d^{2p+1}u}{dx^{2p+1}} = \pm(-1)^p(m^2-1)(m^2-5) - [m^2-(2p-1)^2].m\cos mk\pi,$$

k étant un nombre entier arbitraire, le signe + convenant dans la seconde formule, lorsque k est un nombre pair. Si l'on suppose $\arcsin 0 = 0$, c'est-à-dire si $\arcsin x$ est le plus petit arc, positif ou négatif, dont le sinus soit x, on aura $k = 0$ et par conséquent

$$\frac{d^{2p+2}u}{dx^{2p+2}} = 0, \quad \frac{d^{2p+1}u'}{dx^{2p+1}} = -(-1)^p(m^2-1)(m^2-5) - [m^2-(2p-1)^2].m.$$

154. *Dérivées de* $\cos(m \arccos x)$, *pour* $x = 0$. — Posons

$$\cos(m \arccos x) = u,$$

nous aurons

$$\frac{du}{dx} = \pm \frac{m \sin(m \arccos x)}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \pm \frac{mx \sin(m \arccos x)}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} - \frac{m^2 \cos(m \arccos x)}{(1-x^2)},$$

on en conclut

$$(1-x^2)\frac{d^2u}{dx^2} - x\frac{du}{dx} + m^2 u = 0,$$

ce qui est précisément l'équation déjà trouvée deux fois et dont on déduira de la même manière, pour $x = 0$,

$$\frac{d^{p+2}u}{dx^{p+2}} = (p^2 - m^2)\frac{d^p u}{dx^p}.$$

D'ailleurs, pour $x = 0$, on a, en désignant par k un nombre entier quelconque,

$$u = \cos m(\arccos 0) = \cos m(2k+1)\frac{\pi}{2},$$

$$\frac{du}{dx} = \pm m \sin m(2k+1)\frac{\pi}{2};$$

le signe + convenant, comme on le voit facilement, lorsque k est un nombre impair et le signe — dans le cas contraire ; on aura alors

$$\frac{d^{2n+2}u}{dx^{2n+2}} = (-1)^n . m^2 (m^2-4)(m^2-16)\ldots(m^2-4n^2).\cos(2k+1)m\frac{\pi}{2},$$

$$\frac{d^{2n+1}u}{dx^{2n+1}} = \pm(-1)^n . (m^2-1)(m^2-5)\ldots[m^2-(2n-1)^2] . m \sin(2k+1)m\frac{\pi}{2},$$

le signe + devant être adopté, dans la seconde formule, lorsque k est pair, et le signe — dans le cas contraire.

Si l'on veut regarder l'arc dont le cosinus est nul, comme égal à $\frac{\pi}{2}$, il faut prendre k égal à zéro.

155. *Dérivées de sin* $(m \arccos x)$, *pour* $x = 0$. — En posant

$$u = \sin(m \arccos x),$$

on vérifiera, comme dans les cas précédents, l'équation

$$(1-x^2)\frac{d^2u}{dx^2} - x\frac{du}{dx} + m^2 u = 0,$$

de laquelle on déduira, pour $x = 0$,

$$\frac{d^{p+2}u}{dx^{p+2}} = (p^2 - m^2)\frac{d^p u}{dx^p}.$$

Or on a, pour $x = 0$,

$$u = \sin(m \arccos 0) = \sin(2k+1)\, m\,\frac{\pi}{2},$$

$$\frac{du}{dx} = \mp m \cos m(\arccos 0) = \mp m \cos(2k+1)\, m\,\frac{\pi}{2},$$

k étant un nombre entier arbitraire et le signe — de la seconde équation correspondant au cas où ce nombre est pair; au moyen de ces valeurs on trouvera

$$\frac{d^{2n+2}u}{dx^{2n+2}} = (-1)^n m^2.(m^2-4)(m^2-16)\ldots(m^2-4n^2)\sin(2k+1)\, m\,\frac{\pi}{2},$$

$$\frac{d^{2n+1}u}{dx^{2n+1}} = \mp(-1)^n m.(m^2-1)(m^2-9)\ldots[m^2-(2n-1)^2]\cos(2k+1)\, m\,\frac{\pi}{2}.$$

156. *Dérivées de* $(1+x^2)^{\frac{m}{2}}\sin(m \arctang x)$, *pour* $x = 0$. — En posant

$$u = (1+x^2)^{\frac{m}{2}}\sin(m \arctang x),$$

et formant les dérivées $\frac{du}{dx}$ et $\frac{d^2u}{dx^2}$, on trouve, par l'élimination de $\sin(m \arctang x)$, et de $\cos(m \arctang x)$ entre les trois équations obtenues,

$$(1+x^2)\,\frac{d^2u}{dx^2} - 2(m-1)\,x\,\frac{du}{dx} + m^2u - mu = 0.$$

On en déduit, en différentiant p fois,

$$(1+x^2)\,\frac{d^{p+2}u}{dx^{p+2}} + 2px\,\frac{d^{p+1}u}{dx^{p+1}} + p(p-1)\,\frac{d^pu}{dx^p} - 2(m-1)\,x\,\frac{d^{p+1}u}{dx^{p+1}} - 2(m-1)\,p\,\frac{d^pu}{dx^p} + m^2\,\frac{d^pu}{dx^p} - m\,\frac{d^pu}{dx^p} = 0,$$

et, en faisant $x = 0$,

$$\frac{d^{p+2}u}{dx^{p+2}} = -\frac{d^pu}{dx^p}(m-p)(m-p-1).$$

D'ailleurs, pour $x = 0$ (*en supposant* $\arctang 0 = 0$), on a

$$u = 0, \quad \frac{du}{dx} = m,$$

on en conclut,

$$\frac{d^{2n+2}u}{dx^{2n+2}} = 0, \quad \frac{d^{2n+1}u}{dx^{2n+1}} = (-1)^n m\,(m-1)(m-2)\ldots(m-2n+1)(m-2n).$$

Si on laisse à l'expression $\arctang x$ toute sa généralité, on a

$$\arctang 0 = k\pi,$$

et, pour $x = 0$,

$$u = \sin mk\pi\,, \quad \frac{du}{dx} = m\cos mk\pi;$$

on aura alors

$$\frac{d^{2n+2}u}{dx^{2n+2}} = (-1)^n\, m.(m-1)\dots(m-2n)\,(m-2n-1).\sin mk\pi,$$

$$\frac{d^{2n+1}u}{dx^{2n+1}} = (-1)^n\, m.(m-1)\dots(m-2n)\cos mk\pi,$$

k étant un nombre entier arbitraire.

157. *Dérivées de* $(1+x^2)^{\frac{m}{2}}\cos(m\,arc\,tang\,x)$, *pour* $x = 0$. — En posant

$$u = (1+x^2)^{\frac{m}{2}}\cos(m\,\text{arc tang}\,x),$$

on trouve, par un calcul identique au précédent,

$$(1+x^2)\frac{d^2u}{dx^2} - 2(m-1)\,x\frac{du}{dx} + m^2u - mu = 0,$$

et l'on en déduit encore

$$\frac{d^{p+2}u}{dx^{p+2}} = -\frac{d^pu}{dx^p}(m-p)(m-p-1),$$

et d'après les valeurs de u et de $\frac{du}{dx}$, pour $x = 0$, on trouve en supposant arc tang $0 = 0$,

$$\frac{d^{2n+1}u}{dx^{2n+1}} = 0, \quad \frac{d^{2n+2}u}{dx^{2n+2}} = (-1)^n.m.(m-1)\dots(m-2n-1).$$

158. *Dérivées de* $\dfrac{\cos m\ arc\ tang\,x}{(1+x^2)^{\frac{m}{2}}}$, *pour* $x = 0$. — En posant

$$u = \frac{\cos m\ \text{arc tang}\,x}{(1+x^2)^{\frac{m}{2}}},$$

et calculant u et $\frac{du}{dx}$, on vérifie facilement la relation

$$(1+x^2)\frac{d^2u}{dx^2} + (2m+2)\,x\frac{du}{dx} + m(m+1)\,u = 0;$$

on en conclut, en différentiant p fois et faisant $x = 0$,

$$\left(\frac{d^{p+2}u}{dx^{p+2}}\right)_0 + (m+p)(m+p+1)\frac{d^pu}{dx^p} = 0,$$

et par suite, si p est impair et égal à $2k+1$,

$$\frac{d^{2k+1}u}{dx^{2k+1}} = 0,$$

et si p est pair et égal à $2k$,

$$\frac{d^{2k}u}{dx^{2k}} = m.(m+1)\dots(m+2k-1)(-1)^n.$$

Dérivées et différentielles d'ordre supérieur pour les fonctions de plusieurs variables indépendantes. Notation adoptée.

159. Lorsqu'une fonction contient plusieurs variables indépendantes, on peut en former la dérivée par rapport à l'une quelconque d'entre elles ; la notation au moyen de laquelle on représente cette dérivée est la même que dans le cas d'une seule variable indépendante. Si l'on a

$$u = \varphi(x, y, z),$$

les dérivées de u par rapport à x, y, z, sont désignées (50) par $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dy}$, $\frac{du}{dz}$. Les dérivées du second, du troisième ordre, etc., par rapport à l'une de ces variables, seront désignées de même, conformément aux notations indiquées plus haut, par $\frac{d^2u}{dx^2}$, $\frac{d^2u}{dy^2}$, $\frac{d^2u}{dz^2}$, etc....

Lorsque l'on prend la dérivée de u par rapport à x, puis celle du résultat par rapport à y, ou plus généralement lorsqu'on prend un certain nombre m de fois la dérivée par rapport à une variable x, puis un nombre n de fois la dérivée par rapport à y, on désigne le résultat de ces opérations par $\frac{d^{m+n}u}{dx^m dy^n}$.

De même, si l'on avait à prendre la dérivée m fois par rapport à x, n fois par rapport à y, puis p fois par rapport à z, on désignerait le résultat par $\frac{d^{m+n+p}u}{dx^m dy^n dz^p}$.

Possibilité d'intervertir les différentiations.

160. L'étude des dérivées prises successivement par rapport à des variables différentes, conduit à un résultat important. *L'ordre des opérations n'influe pas sur le résultat.*

Pour commencer par le cas le plus simple auquel se ramènent tous les autres, supposons que l'on prenne la dérivée d'une fonction u d'abord par rapport à x, puis la dérivée du résultat par rapport à y, et prouvons qu'il reviendrait au même de

prendre la dérivée par rapport à y, puis celle du résultat par rapport à x. Démontrons, en un mot, que l'on a

$$\frac{d^2u}{dx\,dy} = \frac{d^2u}{dy\,dx};$$

soit

$$u = \varphi(x, y),$$

on a par définition

$$\frac{du}{dx} = \lim \frac{\varphi(x+\Delta x, y) - \varphi(x,y)}{\Delta x} = \frac{\varphi(x+\Delta x, y) - \varphi(x, y)}{\Delta x} + \varepsilon,$$

ε étant infiniment petit en même temps que Δx. Si l'on donne, dans cette égalité un accroissement Δy à y, et qu'on divise par Δy les accroissements correspondants des deux membres, on aura

$$(1) \qquad \frac{\Delta \cdot \frac{du}{dx}}{\Delta y} = \frac{\varphi(x+\Delta x, y+\Delta y) - \varphi(x+\Delta x, y) - \varphi(x, y+\Delta y) + \varphi(x, y)}{\Delta x\,\Delta y} + \frac{\Delta \varepsilon}{\Delta y};$$

on a de même

$$\frac{du}{dy} = \frac{\varphi(x, y+\Delta y) - \varphi(x, y)}{\Delta y} + \varepsilon_1,$$

ε_1 tendant vers zéro avec Δy, et en changeant x en $x + \Delta x$ et égalant les accroissements des deux membres respectivement divisés par Δx, on en conclut

$$(2) \qquad \frac{\Delta \cdot \frac{du}{dy}}{\Delta x} = \frac{\varphi(x+\Delta x, y+\Delta y) - \varphi(x+\Delta x, y) - \varphi(x, y+\Delta y) + \varphi(x, y)}{\Delta x\,\Delta y} + \frac{\Delta \varepsilon_1}{\Delta x}.$$

Or dans ces formules, comme (136) et pour les mêmes raisons, $\frac{\Delta \varepsilon}{\Delta y}$ et $\frac{\Delta \varepsilon_1}{\Delta x}$ ont pour limite zéro, d'ailleurs les premiers termes des seconds membres dans les équations (1) et (2) sont identiquement les mêmes, les premiers membres de ces équations ont donc la même limite. On a donc

$$\lim \frac{\Delta \cdot \frac{du}{dx}}{\Delta y} = \lim \frac{\Delta \cdot \frac{du}{dy}}{\Delta x},$$

c'est-à-dire

$$\frac{d^2u}{dx\,dy} = \frac{d^2u}{dy\,dx},$$

comme on l'avait annoncé.

161. Deux différentiations consécutives par rapport à des variables différentes pouvant être interverties, il est clair que si l'on a un nombre quelconque de diffé-

rentiations à effectuer successivement, l'ordre dans lequel elles s'exécuteront est indifférent. La démonstration est identiquement la même que celle qui sert en arithmétique pour prouver que l'ordre de deux facteurs consécutifs pouvant être changé dans un produit, on peut, par cela seul, disposer tous les facteurs dans un ordre arbitraire.

Différentielles des divers ordres pour les fonctions de plusieurs variables.

162. Soit $u = \varphi(x, y)$ une fonction de deux variables indépendantes. Si l'on attribue à chaque variable un accroissement infiniment petit, il en résultera, pour la fonction $\varphi(x, y)$, un accroissement infiniment petit que l'on peut remplacer par tout autre infiniment petit ayant avec lui un rapport dont la limite soit l'unité. On a vu (54) qu'en désignant par dx et dy les accroissements infiniment petits des deux variables, on peut ainsi représenter l'accroissement correspondant de la fonction par

$$du = \frac{du}{dx}\,dx + \frac{du}{dy}\,dy.$$

Si l'on attribue de nouveau à x et à y des accroissements égaux à ceux qu'ils ont déjà reçus, du, qui est fonction de x et de y, aura lui-même une différentielle que l'on désigne par d^2u, et l'on aura

$$d^2u = d.\left(\frac{du}{dx}\right)dx + d.\left(\frac{du}{dy}\right)dy = \frac{d^2u}{dx^2}\,dx^2 + 2\,\frac{d^2u}{dx\,dy}\,dx\,dy + \frac{d^2u}{dy^2}\,dy^2.$$

En attribuant de nouveau à x et à y des accroissements égaux à dx et à dy, d^2u, qui est une fonction de x et de y, aura une différentielle d^3u donnée par la formule

$$d^3u = \frac{d^3u}{dx^3}\,dx^3 + 3\,\frac{d^3u}{dx^2\,dy}\,dx^2\,dy + 3\,\frac{d^3u}{dx\,dy^2}\,dx\,dy^2 + \frac{d^3u}{dy^3}\,dy^3.$$

En continuant à former les différentielles successives qui correspondent à des accroissements constants attribués à x et à y, on trouve par induction la formule

$$d^nu = \frac{d^nu}{dx^n}\,dx^n + n\,\frac{d^nu}{dx^{n-1}\,dy}\,dx^{n-1}\,dy + \frac{n(n-1)}{1.2}\,\frac{d^nu}{dx^{n-2}\,dy^2}\,dx^{n-2}\,dy^2 + \cdots + \frac{d^nu}{dy^n}\,dy^n,$$

que l'on écrit symboliquement

$$d^nu = \left(\frac{du}{dx}\,dx + \frac{du}{dy}\,dy\right)^n.$$

Dans le second membre de cette formule, il faut remplacer les puissances de du par

des différentielles d'indice égal à leur exposant, ainsi

$$\left(\frac{du}{dx}\right)^p \left(\frac{du}{dy}\right)^q,$$

devra être remplacé par

$$\frac{d^{p+q}u}{dx^p\,dy^q}.$$

Cette formule a été vérifiée pour les valeurs 1, 2, 3,..., de n. Pour montrer qu'elle est générale, il suffit de faire voir qu'en admettant l'équation symbolique

$$d^n u = \left(\frac{du}{dx}\,dx + \frac{du}{dy}\,dy\right)^n,$$

on en déduit, en adoptant les mêmes notations,

$$d^{n+1}u = \left(\frac{du}{dx}\,dx + \frac{du}{dy}\,dy\right)^{n+1}.$$

Pour le démontrer, remarquons que, $d^n u$ étant une fonction de x et de y, la différentielle est donnée par la formule

$$d^{n+1}u = \frac{d}{dx}(d^n u)\,dx + \frac{d}{dy}(d^n u)\,dy;$$

il faut donc prendre la dérivée par rapport à x de l'expression qui s'écrit symboliquement

$$\left(\frac{du}{dx}\,dx + \frac{du}{dy}\,dy\right)^n,$$

multiplier cette dérivée par dx, puis prendre la dérivée de la même expression par rapport à y, et la multiplier par dy. Or si l'on multipliait l'expression par

$$\frac{du}{dx}\,dx + \frac{du}{dy}\,dy,$$

afin de former

$$\left(\frac{du}{dx}\,dx + \frac{du}{dy}\,dy\right)^{n+1},$$

on aurait précisément les mêmes calculs à faire, et les résultats s'écriraient absolument de la même manière En prenant en effet la dérivée par rapport à x d'un terme quelconque

$$A \cdot \frac{d^{p+q}u}{dx^p\,dy^q}\,dx^p\,dy^q,$$

et multipliant cette dérivée par dx, on trouve

$$A \cdot \frac{d^{p+q+1} u}{dx^{p+1} dy^q} dx^{p+1} dy^q,$$

ce qui est identique, pour l'écriture, au terme qu'on aurait obtenu, en multipliant symboliquement

$$A \cdot \frac{d^p u}{dx^p} \frac{d^q u}{dy^q},$$

par $\frac{du}{dx} dx$. De même en prenant la dérivée par rapport à y, et multipliant par dy, les termes obtenus s'écriront de la même manière que ceux que l'on obtiendrait, en multipliant l'expression par $\frac{du}{dy} dy$, en sorte que l'opération qui fournit la différentielle totale $d^{n+1} u$, conduit à écrire les mêmes termes que la multiplication par

$$\frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy.$$

Si donc on admet que $d^n u$ s'écrive comme

$$\left(\frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy\right)^n,$$

on peut en conclure que $d^{n+1} u$ s'écrira comme

$$\left(\frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy\right)^{n+1}.$$

163. La même règle s'applique aux différentielles d'une fonction d'un nombre quelconque de variables: si l'on a

$$u = \varphi(x, y, z, t),$$

on trouve, absolument de la même manière,

$$d^n u = \left(\frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy + \frac{du}{dz} dz + \frac{du}{dt} dt\right)^n,$$

la puissance étant entendue symboliquement comme dans l'exemple précédent.

164. Si une fonction dépend de plusieurs variables qui soient elles-mêmes des fonctions connues d'autres variables considérées comme indépendantes, on doit remarquer que les formules précédentes ne s'y appliquent pas. Soit, par exemple,

$$u = \varphi(p, q),$$

p et q étant des fonctions connues des deux variables x et y; on a

$$du = \frac{du}{dp}\,dp + \frac{du}{dq}\,dq. \tag{1}$$

Car lorsqu'il s'agit de différentielles premières, peu importe le choix des variables indépendantes, et rien (138) ne les distingue essentiellement des autres. On peut donc supposer que p et q remplacent x et y. Mais si l'on veut calculer d^2u, il ne faut pas oublier que l'on désigne ainsi la différentielle de du, lorsqu'on attribue, de nouveau, à x et à y des accroissements infiniment petits égaux à ceux qu'ils ont déjà reçus. A ces accroissements égaux, correspondront, en général, des accroissements inégaux de p et de q, en sorte que, en différentiant l'expression (1) pour former d^2u, dp et dq ne devront pas être regardés comme constants, on aura donc

$$d^2u = \frac{d^2u}{dp^2}\,dp^2 + 2\,\frac{d^2u}{dp\,dq}\,dp\,dq + \frac{d^2u}{dq^2}\,dq^2 + \frac{du}{dp}\,d^2p + \frac{du}{dq}\,d^2q,$$

et en continuant ainsi l'on est conduit à des formules compliquées et rarement utiles.

Dérivées d'ordre supérieur des fonctions implicites.

165. Les considérations précédentes permettent de calculer les dérivées d'ordre supérieur des fonctions implicites de plusieurs variables; la méthode la plus simple consiste souvent à former la différentielle totale de la fonction dont on veut avoir les dérivées partielles, et ces dérivées sont les coefficients des diverses puissances des différentielles de variables indépendantes, divisés respectivement par les facteurs numériques connus.

Il suffira de développer cette méthode sur un exemple. Soient

$$z = \varphi(x, \alpha),$$
$$y = \psi(x, \alpha).$$

On propose de déduire, de ces équations, $\frac{d^2z}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dx\,dy}$, $\frac{d^2z}{dy^2}$. Pour y parvenir, nous calculerons d^2z, en supposant dx et dy constants, et quand nous l'aurons obtenu sous la forme

$$d^2z = A\,dx^2 + 2B\,dx\,dy + C\,dy^2,$$

nous aurons

$$\frac{d^2z}{dx^2} = A, \quad \frac{d^2z}{dx\,dy} = B, \quad \frac{d^2z}{dy^2} = C.$$

Les équations proposées donnent, en remarquant que d^2x et d^2y sont nuls, mais que $d^2\alpha$ ne l'est pas,

$$dz = \frac{d\varphi}{dx}\,dx + \frac{d\varphi}{d\alpha}\,d\alpha,$$

$$dy = \frac{d\psi}{dx}\,dx + \frac{d\psi}{d\alpha}\,d\alpha,$$

$$d^2z = \frac{d^2\varphi}{dx^2}\,dx^2 + 2\,\frac{d^2\varphi}{dx\,d\alpha}\,dx\,d\alpha + \frac{d^2\varphi}{d\alpha^2}\,d\alpha^2 + \frac{d\varphi}{d\alpha}\,d^2\alpha,$$

$$0 = \frac{d^2\psi}{dx^2}\,dx^2 + 2\,\frac{d^2\psi}{dx\,d\alpha}\,dx\,d\alpha + \frac{d^2\psi}{d\alpha^2}\,d\alpha^2 + \frac{d\psi}{d\alpha}\,d^2\alpha.$$

Éliminant entre ces équations $d\alpha$ et $d^2\alpha$, on obtiendra, pour d^2z, une expression de la forme demandée, et le problème sera résolu. On trouve ainsi

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{d^2\varphi}{dx^2} - 2\,\frac{d^2\varphi}{dx\,d\alpha}\,\frac{\frac{d\psi}{dx}}{\frac{d\psi}{d\alpha}} + \frac{d^2\varphi}{d\alpha^2}\left(\frac{\frac{d\psi}{dx}}{\frac{d\psi}{d\alpha}}\right)^2 - \frac{d\varphi}{d\alpha}\left[\frac{\frac{d^2\psi}{dx^2}}{\frac{d\psi}{d\alpha}} + 2\,\frac{\frac{d^2\psi}{dx\,d\alpha}}{\left(\frac{d\psi}{d\alpha}\right)^2}\,\frac{d\psi}{dx} + \frac{\frac{d^2\psi}{d\alpha^2}}{\left(\frac{d\psi}{d\alpha}\right)^3}\left(\frac{d\psi}{dx}\right)^2\right],$$

$$\frac{d^2z}{dy^2} = \frac{\frac{d^2\varphi}{d\alpha^2}}{\left(\frac{d\psi}{d\alpha}\right)^2} - \frac{d\varphi}{d\alpha}\,\frac{\frac{d^2\psi}{d\alpha^2}}{\left(\frac{d\psi}{d\alpha}\right)^3},$$

$$\frac{d^2z}{dx\,dy} = 2\,\frac{d^2\varphi}{d\alpha^2}\,\frac{\frac{d\psi}{dx}}{\left(\frac{d\psi}{d\alpha}\right)^2} - 2\,\frac{d\varphi}{d\alpha}\,\frac{\frac{d^2\psi}{dx\,d\alpha}}{\left(\frac{d\psi}{d\alpha}\right)} + \frac{d\varphi}{d\alpha}\,\frac{d^2\psi}{d\alpha^2}\,\frac{\frac{d\psi}{dx}}{\left(\frac{d\psi}{d\alpha}\right)^3}.$$

La même méthode permettrait de calculer les dérivées d'ordre plus élevé, mais les résultats deviennent de plus en plus compliqués.

166. On peut aussi chercher les dérivées de z successivement et en les déduisant les unes des autres. On a en effet, en différentiant les deux équations données par rapport à x, et traitant y comme une constante,

$$\frac{dz}{dx} = p = \frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{d\alpha}\,\frac{d\alpha}{dx},$$

$$0 = \frac{d\psi}{dx} + \frac{d\psi}{d\alpha}\,\frac{d\alpha}{dx},$$

et, par l'élimination de $\frac{d\alpha}{dx}$,

$$\frac{dz}{dx} = p = \frac{d\varphi}{dx} - \frac{d\psi}{dx}\frac{\frac{d\varphi}{d\alpha}}{\frac{d\psi}{d\alpha}} = \varphi_1(x, \alpha).$$

Les mêmes équations, différentiées par rapport à y, donnent

$$\frac{dz}{dy} = q = \frac{d\varphi}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dy},$$

$$1 = \frac{d\psi}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dy},$$

et l'on en déduit

$$\frac{dz}{dy} = q = \frac{\frac{d\varphi}{d\alpha}}{\frac{d\psi}{d\alpha}} = \varphi_2(x, \alpha).$$

p et q étant des fonctions connues de x et de α, il suffira de remplacer successivement dans ces formules la fonction φ par φ_1, puis par φ_2, pour obtenir $\frac{dp}{dx}$, $\frac{dp}{dy}$, $\frac{dq}{dx}$ et $\frac{dq}{dy}$, c'est-à-dire les secondes dérivées de z. On trouve ainsi

$$\frac{dp}{dx} = \frac{d\varphi_1}{dx} - \frac{d\psi}{dx}\frac{\frac{d\varphi_1}{d\alpha}}{\frac{d\psi}{d\alpha}},$$

$$\frac{dp}{dy} = \frac{\frac{d\varphi_1}{d\alpha}}{\frac{d\psi}{d\alpha}},$$

$$\frac{dq}{dy} = \frac{\frac{d\varphi_2}{d\alpha}}{\frac{d\psi}{d\alpha}},$$

$$\frac{dq}{dx} = \frac{d\varphi_2}{dx} - \frac{d\psi}{dx}\frac{\frac{d\varphi_2}{d\alpha}}{\frac{d\psi}{d\alpha}}.$$

On remarquera que $\frac{dp}{dy}$ et $\frac{dq}{dx}$ représentent l'un et l'autre $\frac{d^2z}{dx\,dy}$; ils sont donc égaux, ce qui établit une relation nécessaire entre les dérivées des fonctions φ_1 et φ_2.

Si l'on voulait déduire de ces formules les résultats obtenus précédemment, il fau-

drait effectuer les différentiations par rapport à x et par rapport à α qui ne sont ici qu'indiquées sur les fonctions φ_1 et φ_2.

EXERCICES.

1. Si, dans une fonction $y=\varphi(x)$, on donne à x des valeurs successives x, $x+h_1$, $x+h_1+h_2$, $x+h_1+h_2+h_3, \ldots$, et que les valeurs correspondantes de y soient $y, y_1, y_2, \ldots, y_n$, le rapport $\dfrac{\Delta^n y}{h_1 h_2 h_3, \ldots, h_n}$ a pour limite la $n^{ième}$ dérivée de y, lorsque h_1, $h_2, \ldots, h_n$ tendent en même temps vers zéro.

2. Si une fonction finie et continue de x s'annule pour les valeurs $x=x_1$, $x=x_2, \ldots$, $x=x_n$, que nous supposons rangées par ordre de grandeur, on a pour toute valeur de x comprise entre x_1 et x_n

$$\varphi(x)=(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)\ldots\frac{\varphi^n(\alpha)}{1.2.3\ldots n},$$

$\varphi^n(\alpha)$ étant la valeur que prend la $n^{ième}$ dérivée de la fonction φ, pour une certaine valeur de x comprise entre x_1 et x_n. On démontrera ce théorème en remarquant que l'équation

$$\varphi(x)-A(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)=0$$

admet, quel que soit A, les racines $x_1, x_2, \ldots, x_n$, et si A est tel qu'elle admette en outre une $(n+1)^{ième}$ racine comprise entre x_1 et x_n, la $n^{ième}$ dérivée

$$\varphi^n(x)-(1.2.3\ldots n)A$$

doit s'annuler entre les mêmes limites.

3. Donner l'expression de $\dfrac{d^n\varphi(e^x)}{dx^n}$ sous la forme

$$A_1\varphi'(e^x)+A_2\varphi''(e^x)+\ldots+A_n\varphi^n(e^n),$$

et calculer les coefficients $A_1, A_2, \ldots, A_n$ qui sont indépendants de la forme de la fonction φ.

4. Calculer $\dfrac{d^n\dfrac{1}{e^x-1}}{dx^n}$, et mettre l'expression sous la forme

$$A_1\frac{1}{e^x-1}+A_2\frac{1}{(e^x-1)^2}+\ldots+A_{n+1}\frac{1}{(e^x-1)^{n+1}},$$

$A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ étant des constantes dont on demande l'expression.

5. L'expression $\frac{d^n \cdot x^n (lx)^n}{dx^n}$ est de la forme

$$1 + A_1 lx + \frac{A_2}{1.2} (lx)^2 + \ldots + \frac{A_n}{1.2\ldots n} (lx)^n,$$

trouver l'expression des constantes $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

6. En posant

$$z = \frac{x}{x^2 + y^2},$$

on a

$$\frac{d^n z}{dx^n} = (-1)^n \cdot \frac{1.2.3\ldots n \cdot \cos\left[(n+1) \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x}\right]}{(x^2+y^2)^{\frac{n+1}{2}}},$$

$$\frac{d^{2n} z}{dy^{2n}} = (-1)^n \cdot \frac{1.2.3\ldots 2n \cdot \cos\left[(2n+1) \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x}\right]}{(x^2+y^2)^{\frac{2n+1}{2}}},$$

$$\frac{d^{2n+1} z}{dy^{2n+1}} = (-1)^{n+1} \frac{1.2.3\ldots(2n+1) \sin\left[(2n+2) \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x}\right]}{(x^2+y^2)^{n+1}},$$

7. z étant une fonction de x et de y, définie par les deux équations

$$z = \alpha x + y\varphi(\alpha) + F(\alpha),$$
$$0 = x + y\varphi'(\alpha) + F'(\alpha),$$

on a, quelles que soient les fonctions $\varphi(\alpha)$ et $F(\alpha)$,

$$\frac{d^2 z}{dx^2} \cdot \frac{d^2 z}{dy^2} = \left(\frac{d^2 z}{dx\, dy}\right)^2.$$

8. Si l'on pose

$$\alpha = \frac{x}{x^2+y^2+z^2},$$

$$\beta = \frac{y}{x^2+y^2+z^2},$$

$$\gamma = \frac{z}{x^2+y^2+z^2},$$

et $\rho^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$, et qu'une fonction v considérée comme fonction de x, y, z, satisfasse à l'équation

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{d^2 v}{dy^2} + \frac{d^2 v}{dz^2} = 0,$$

on aura, en considérant v comme fonction de α, β, γ,

$$\frac{d^2\left(\frac{v}{\rho}\right)}{d\alpha^2} + \frac{d^2\left(\frac{v}{\rho}\right)}{d\beta^2} + \frac{d^2\left(\frac{v}{\rho}\right)}{d\gamma^2} = 0.$$

CHAPITRE VII.

CHANGEMENTS DE VARIABLES.

Influence de la variable indépendante sur les différentielles d'ordre supérieur au premier.

167. Lorsqu'on ne considère que des différentielles du premier ordre, le choix de la variable indépendante est indifférent, et il n'est pas nécessaire d'en faire mention. Si l'on vient à changer cette variable pour une autre qui lui soit liée d'une manière quelconque, les expressions différentielles ne sont pas modifiées. Il en est tout autrement pour les différentielles d'ordre supérieur; pour qu'une différentielle seconde d^2y ait un sens précis, il faut indiquer quelle est la variable indépendante, et si x est cette variable, on écrit souvent, pour cette raison, $\frac{d^2y}{dx^2}dx^2$ au lieu de d^2y, qui serait plus simple, mais moins clair.

Prenons pour exemple la fonction $y = x^4$, on a, en prenant x pour variable indépendante,

$$dy = 4x^3\,dx, \qquad d^2y = 12x^2\,dx^2.$$

Prenons actuellement pour variable indépendante le carré x^2 et désignons-le par u, on aura

$$y = u^2, \qquad dy = 2u\,du, \qquad d^2y = 2\,du^2.$$

Si on remplace u et du par leurs valeurs en x et dx, on déduit de là

$$dy = 4x^3\,dx, \qquad d^2y = 8x^2\,dx^2,$$

et l'on voit que dy n'a pas changé, mais d^2y n'est plus le même.

168. La raison du fait que nous venons de signaler est bien simple. Lorsqu'on prend x pour variable indépendante, dx est constant, et lorsqu'on adopte une nouvelle variable indépendante dont la différentielle est regardée comme constante, dx devenant variable, la différentielle du produit $\varphi'(x)\,dx$ n'est plus la même.

Dans l'exemple choisi plus haut, on a posé $x^2 = u$, et par conséquent $x = \sqrt{u}$, $dx = \frac{du}{2\sqrt{u}}$, $d^2x = -\frac{1}{4}u^{-\frac{3}{2}}du^2$.

Si donc on différentie l'expression

$$dy = 4x^3 dx,$$

on a

$$d^2y = 12x^2 dx^2 + 4x^3 . d^2x = 8x^2 dx^2,$$

ce qui reproduit le résultat obtenu plus haut, en montrant plus clairement encore pourquoi d^2y n'est plus égal à $12x^2 dx^2$, et en quoi il en diffère.

Changement de la variable indépendante.

169. Lorsqu'on considère une fonction y d'une variable x et que cette variable est considérée comme indépendante, les différentielles dy, d^2y, d^3y,..., ont été définies (133). Supposons que l'on veuille actuellement regarder comme indépendante une variable nouvelle t liée à x d'une manière connue; quelles sont les relations qui lient les différentielles dy, d^2y,..., d^ny, aux différentielles de y prises dans cette nouvelle hypothèse? Pour résoudre cette question, nous représenterons les différentielles prises en supposant dx constant, par les notations d_xy, d_x^2y, d_x^3y,..., d_x^ny, et pour les différentielles relatives à la variable indépendante t, nous conserverons la lettre d privée d'indice, en sorte que d^ny sera la différentielle $n^{ième}$ de y lorsqu'on considère dt comme constant. La dérivée de y par rapport à x est, comme on l'a vu (48), représentée par $\frac{dy}{dx}$, quelle que soit la variable indépendante. Soit t cette variable; cherchons la seconde dérivée de y par rapport à x. Il faut, pour l'obtenir, différentier la fraction précédente et diviser sa différentielle par dx; on aura ainsi, pour l'expression de cette seconde dérivée,

$$\frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^3}.$$

De même la troisième dérivée $\frac{d^3y}{dx^3}$ est égale, quelle que soit la variable indépendante, à la différentielle de la seconde dérivée, divisée par dx, c'est-à-dire en effectuant le calcul, à

$$\frac{dx^4 d^3y - dx^3 dy\,d^3x - 3dx^3 d^2y d^2x + 3dy\,dx^2 (d^2x)^2}{dx^7};$$

les formules demandées sont par conséquent

$$d_x^2 y = \frac{d^2y\,dx - d^2x\,dy}{dx}.$$

$$d_x^3 y = \frac{d^3y\,dx^2 - dx\,dy\,d^3x - 3\,dx\,d^2y\,d^2x + 3\,dy\,(d^2x)^2}{dx^4}.$$

Ces formules permettent de prendre telle variable indépendante que l'on voudra,

ou même, ce qui est souvent plus avantageux, de laisser la variable indépendante indéterminée.

170. On devra, dans chaque application, faire usage de l'équation qui lie à x la nouvelle variable indépendante, et calculer les différentielles d^2x, d^3x,..., en fonction de cette nouvelle variable que nos formules laissent entièrement arbitraire. Considérons, par exemple, l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{x}{1-x^2}\frac{dy}{dx} + \frac{y}{1-x^2} = 0, \tag{1}$$

dans laquelle on veut poser $x = \cos t$, et prendre t pour variable indépendante.

L'application de la formule générale met cette équation sous la forme

$$\frac{d^2y\,dx - d^2x\,dy}{dx^3} - \frac{x}{1-x^2}\frac{dy}{dx} + \frac{y}{1-x^2} = 0,$$

et la variable indépendante est alors arbitraire. Si l'on pose $x = \cos t$, on en déduit, en remarquant que $d^2t = 0$,

$$dx = -\sin t\,dt, \qquad d^2x = -\cos t\,dt^2,$$

et l'équation (1) devient, après des réductions faciles,

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y = 0.$$

171. Dans certains cas, l'application des méthodes générales conduirait à des calculs prolixes que des artifices particuliers permettent d'éviter. Nous donnerons, comme exemple, la transformation de l'expression $x^n\frac{d^ny}{dx^n}$ lorsqu'on substitue à x la variable indépendante t définie par l'équation $x = e^t$, qui donne $\frac{dx}{dt} = x$.

On a

$$\frac{d}{dt}\left(x^n\frac{d^ny}{dx^n}\right) = \frac{d}{dx}\cdot\left(x^n\frac{d^ny}{dx^n}\right)\frac{dx}{dt} = \left(nx^{n-1}\frac{d^ny}{dx^n} + x^n\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}\right)x = nx^n\frac{d^ny}{dx^n} + x^{n+1}\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}};$$

par conséquent

$$\frac{d}{dt}\left(x^n\frac{d^ny}{dx^n}\right) - nx^n\frac{d^ny}{dx^n} = x^{n+1}\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}},$$

ce que l'on peut écrire abréviatement, en faisant usage d'une notation qui, pour être comprise, n'a pas besoin d'être expliquée,

$$\left(\frac{d}{dt} - n\right)x^n\frac{d^ny}{dx^n} = x^{n+1}\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}.$$

En supposant $n = 1$, on en déduit

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{d}{dt} - 1\right) x \frac{dy}{dx} = \left(\frac{d}{dt} - 1\right) \frac{dy}{dt},$$

et, par suite, en supposant successivement $n = 2$, $n = 3$,,.., on trouve aisément la formule générale

$$x^n \frac{d^n y}{dx^n} = \left[\frac{d}{dt} - (n-1)\right] \left[\frac{d}{dt} - (n-2)\right] \cdots \left(\frac{d}{dt} - 1\right) \frac{dy}{dt};$$

on a, par exemple, en faisant $n = 3$,

$$x^3 \frac{d^3y}{dx^3} = \left(\frac{d}{dt} - 2\right) \left(\frac{d}{dt} - 1\right) \frac{dy}{dt} = \frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}.$$

172. Nous ferons ici une remarque qui peut être souvent utile. Lorsque la variable indépendante est restée indéterminée, on conserve le droit de la fixer ultérieurement d'une manière arbitraire. Si donc on fait, dans les formules trouvées, $d^2x = 0$, on obtiendra les expressions auxquelles on serait directement parvenu en prenant x pour variable indépendante; en changeant ensuite, dans ces formules, la variable indépendante x pour une variable arbitraire t, on devra retrouver les formules primitives; si cela n'a pas lieu, il y a eu erreur dans les calculs.

Supposons, par exemple, que $y = \varphi(x)$ étant l'équation d'une courbe, on ait trouvé, en résolvant un problème relatif à cette courbe, pour expression d'une certaine ligne, géométriquement définie,

$$\frac{1}{a} = \frac{dx\,d^2y + dy\,d^2x}{dx^2 + dy^2},$$

aucune variable indépendante n'ayant été choisie. En faisant $d^2x = 0$, on aura

$$\frac{1}{a} = \frac{dx\,d^2y}{dx^2 + dy^2}.$$

Pour repasser de là, à la formule générale relative au cas où la variable indépendante est quelconque, on doit remplacer $dx\,d^2y$ par $dx\,d^2y - dy\,d^2x$, et l'on trouve ainsi

$$\frac{1}{a} = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^2 + dy^2}.$$

Ce résultat ne s'accordant pas avec la formule primitive, celle-ci est impossible, et, sans connaître les calculs qui l'ont fournie, on peut affirmer qu'ils sont inexacts.

Changement simultané de toutes les variables.

173. On a quelquefois occasion de changer à la fois toutes les variables d'une formule et de les remplacer par d'autres qui aient avec elles des liaisons données;

c'est ce qui arrive, par exemple, lorsque, dans un problème, on substitue les coordonnées polaires aux coordonnées rectilignes. Le problème général qu'il faut résoudre est alors le suivant :

y étant une fonction de x, substituer à ces variables deux variables nouvelles u et v, qui en sont des fonctions connues, et exprimer les différentielles de x et celles de y en fonction des différentielles des variables nouvelles u et v.

Pour résoudre cette question, il faut d'abord préparer la formule que l'on veut transformer, de manière à ce que la variable indépendante soit arbitraire; cela fait, on n'aura plus qu'à calculer dx, dy, d^2x, d^2y,....

On a évidemment

$$(1) \qquad dx = \frac{dx}{du}\,du + \frac{dx}{dv}\,dv, \qquad dy = \frac{dy}{du}\,du + \frac{dy}{dv}\,dv.$$

Ces équations fourniront les différentielles du premier ordre dx et dy; car x et y étant donnés en fonction de u et de v, on peut regarder $\frac{dx}{du}$, $\frac{dx}{dv}$, $\frac{dy}{du}$, $\frac{dy}{dv}$, comme connues, soit par la différentiation directe, soit par la méthode de différentiation des fonctions implicites, dans le cas où u et v sont définies par deux équations non résolues par rapport à x et à y.

En différentiant les équations (1), on trouve

$$d^2x = \frac{d^2x}{du^2}\,du^2 + 2\,\frac{d^2x}{du\,dv}\,du\,dv + \frac{d^2x}{dv^2}\,dv^2 + \frac{dx}{du}\,d^2u + \frac{dx}{dv}\,d^2v,$$

$$d^2y = \frac{d^2y}{du^2}\,du^2 + 2\,\frac{d^2y}{du\,dv}\,du\,dv + \frac{d^2y}{dv^2}\,dv^2 + \frac{dy}{du}\,d^2u + \frac{dy}{dv}\,d^2v,$$

et ainsi de suite. Les valeurs de $\frac{d^2x}{du^2}$, $\frac{d^2x}{du\,dv}$, $\frac{d^2x}{dv^2}$, $\frac{d^2y}{du^2}$, $\frac{d^2y}{dv^2}$, $\frac{d^2y}{du\,dv}$, se calculent directement si x et y sont donnés explicitement en fonction de u et de v, et, dans le cas contraire, à l'aide de méthodes connues pour la différentiation des fonctions implicites.

C'est surtout dans l'étude des applications géométriques du calcul différentiel que l'on a occasion d'appliquer cette théorie. Pour donner, dès à présent, un exemple, soit

$$\mathrm{R} = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\,d^2y - dy\,d^2x}$$

l'expression d'une certaine ligne; cherchons ce que devient l'expression de R lorsqu'on substitue à x et à y deux variables nouvelles, ρ et ω, définies par les équations

$$x = \rho\cos\omega,$$
$$y = \rho\sin\omega.$$

on aura, en prenant ω pour variable indépendante,

$$dx = d\rho\cos\omega - \rho\sin\omega\, d\omega, \qquad dy = d\rho\sin\omega + \rho\cos\omega\, d\omega,$$
$$d^2x = d^2\rho\cos\omega - 2\,d\rho\sin\omega\, d\omega - \rho\cos\omega\, d\omega^2,$$
$$d^2y = d^2\rho\sin\omega + 2\,d\rho\cos\omega\, d\omega - \rho\sin\omega\, d\omega^2,$$

et, en substituant,

$$R = \frac{(d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2 d\omega^3 + 2\,d\rho^2 d\omega - \rho\, d^2\rho\, d\omega}.$$

174. Lorsque, après avoir regardé, dans une formule, la variable indépendante comme indéterminée, on veut la fixer ultérieurement, si cette variable est une des lettres qui figurent dans les calculs, on remplace par leur valeur, zéro, toutes ses différentielles d'ordre supérieur au premier; mais si cette nouvelle variable ne figure pas explicitement dans les calculs, il faut procéder autrement.

On calculera la différentielle seconde de cette variable indépendante, et en l'égalant à zéro, on aura, entre les diverses différentielles des lettres qui figurent dans l'expression considérée, une relation à l'aide de laquelle on pourra lui faire subir une infinité de transformations. Reprenons, par exemple, l'expression

$$(1) \qquad R = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dy\, d^2x - dx\, d^2y},$$

et prenons pour variable indépendante une fonction s de x et de y définie par l'équation

$$(2) \qquad ds^2 = dx^2 + dy^2;$$

s est, comme on sait (118), l'arc de courbe dont les points ont pour coordonnées x et y. On aura, en écrivant que d^2s est nul,

$$(3) \qquad 0 = dx\, d^2x + dy\, d^2y,$$

et au moyen de cette équation on peut transformer de bien des manières l'équation (1), qui devient

$$\frac{1}{R} = \frac{dy}{ds}\frac{d^2x}{ds^2} - \frac{dx}{ds}\frac{d^2y}{ds^2} = \frac{dx}{ds}\left(\frac{\frac{dx}{ds}\frac{d^2x}{ds^2}}{\frac{dy}{ds}}\right) + \frac{dy}{ds}\frac{d^2x}{ds^2} = \frac{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2\frac{d^2x}{ds^2} + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2\frac{d^2y}{ds^2}}{\frac{dy}{ds}}.$$

On peut adopter cette expression; mais on en obtient une plus élégante en élevant $\frac{1}{R}$ au carré; on a

$$\frac{1}{R^2} = \left(\frac{dx}{ds}\right)^2\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 - 2\,\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds}\frac{d^2x}{ds^2}\frac{d^2y}{ds^2};$$

mais en vertu de la relation (3)

$$-2\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds}\frac{d^2x}{ds^2}\frac{d^2y}{ds^2}=2\left(\frac{dx}{ds}\right)^2\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2=2\left(\frac{dy}{ds}\right)^2\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2=\left(\frac{dx}{ds}\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2;$$

donc

$$\frac{1}{R^2}=\left(\frac{dx}{ds}\right)^2\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{dx}{ds}\right)^2\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2$$

ou

$$\frac{1}{R^2}=\left[\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2\right]\left[\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2\right]=\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2.$$

On doit remarquer que l'expression de R en fonction des dérivées de x et de y par rapport à s, est indéterminée; car il existe des relations entre ces dérivées, et deux expressions qui les contiennent peuvent être équivalentes sans être identiques.

175. Lorsqu'on a obtenu une formule dans laquelle une certaine variable, définie comme on l'a supposé dans le paragraphe précédent, est considérée comme indépendante, on peut se proposer de remonter, au moyen de cette formule, au cas général dans lequel la variable indépendante est entièrement arbitraire. Cette question diffère de celle qui a été résolue (169). Ici, en effet, les dérivées sont prises par rapport à une variable s qui doit disparaître ainsi que ses différentielles du résultat final que l'on veut obtenir. Si l'on donne, par exemple, l'équation

$$\frac{1}{R^2}=\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2, \tag{1}$$

sachant que s désigne une variable telle que

$$ds^2=dx^2+dy^2,$$

l'application des formules (169) donnerait

$$\frac{1}{R^2}=\frac{(d^2x\,ds-dx\,d^2s)^2+(d^2y\,ds-dy\,d^2s)^2}{ds^6}; \tag{2}$$

mais le résultat que nous voulons obtenir est l'expression de $\frac{1}{R}$ en fonction de x et de y seulement et sans que s y figure.

Nous nous bornerons à indiquer, sur l'exemple choisi, la marche que l'on doit suivre.

Pour transformer la formule (2), il suffit de calculer $\frac{d^2x}{ds^2}$ et $\frac{d^2y}{ds^2}$; or on a

$$ds^2 = dx^2 + dy^2,$$

$$\frac{dx}{ds} = \frac{dx}{\sqrt{dx^2+dy^2}},$$

$$\frac{d^2x}{ds^2} = \frac{d}{ds}\left(\frac{dx}{\sqrt{dx^2+dy^2}}\right) = \frac{d^2x\sqrt{dx^2+dy^2} - \frac{dx.(dx\,d^2x+dy\,d^2y)}{\sqrt{dx^2+dy^2}}}{ds(dx^2+dy^2)} = \frac{d^2x\,dy^2 - dx\,dy\,d^2y}{(dx^2+dy^2)^2};$$

on trouve de même

$$\frac{d^2y}{ds^2} = \frac{d^2y\,dx^2 - dx\,dy\,d^2x}{(dx^2+dy^2)^2},$$

et par conséquent

$$\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 = \frac{(d^2x\,dy^2 - dx\,dy\,d^2y)^2 + (d^2y\,dx^2 - dx\,dy\,d^2x)^2}{(dx^2+dy^2)^4}$$

$$= \frac{d^2x^2\,dy^2(dx^2+dy^2) + d^2y^2\,dx^2(dx^2+dy^2) - 2\,dx\,d^2x\,dy\,d^2y(dx^2+dy^2)}{(dx^2+dy^2)^4}$$

$$= \frac{(dx\,d^2y - dy\,d^2x)^2}{(dx^2+dy^2)^3},$$

ce qui est bien le résultat connu

Cas de plusieurs variables indépendantes.

176. Lorsqu'on substitue des variables nouvelles à celles qui figuraient dans l'expression d'une fonction de plusieurs variables, les dérivées de la fonction ainsi transformée peuvent se calculer à l'aide de relations que nous allons faire connaître, qui permettent de les déduire des dérivées de la fonction sous sa forme primitive.

Considérons d'abord, pour plus de simplicité, une fonction z de deux variables

$$z = \varphi(x, y).$$

Soient u et v deux variables nouvelles liées à x et à y par deux équations données, rien n'empêchant, bien entendu, que l'une de ces relations soit $u = x$ ou $v = y$, et que le changement ne porte ainsi que sur une seule des variables dont dépend la fonction z.

En considérant x et y comme variables indépendantes, les différentielles dz, d^2z, d^3z,..., sont déterminées, et leur expression a été donnée, aussi bien en fonction de dx et de dy qu'en fonction des différentielles du, dv, d^2u, d^2v,.... L'identification de ces expressions va nous donner les relations cherchées.

On a

$$dz = \frac{dz}{dx}\,dx + \frac{dz}{dy}\,dy,$$

$$dz = \frac{dz}{du}\,du + \frac{dz}{dv}\,dv.$$

Ces deux expressions de dz doivent devenir identiques si l'on y remplace du et dv par leurs valeurs

$$du = \frac{du}{dx}\,dx + \frac{du}{dy}\,dy,$$

$$dv = \frac{dv}{dx}\,dx + \frac{dv}{dy}\,dy.$$

Il est clair, en effet, qu'après cette substitution, les deux expressions de dz seront de la forme $P\,dx + Q\,dy$, et comme toutes deux représentent, aux infiniment petits du second ordre près, l'accroissement de la fonction z, leur différence doit être infiniment petite du second ordre. Or dx et dy étant deux infiniment petits du premier ordre indépendants l'un de l'autre, il faut pour cela que cette différence soit rigoureusement nulle.

On déduit de cette identité

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{dz}{du}\dfrac{du}{dx} + \dfrac{dz}{dv}\dfrac{dv}{dx}, \\ \dfrac{dz}{dy} = \dfrac{dz}{du}\dfrac{du}{dy} + \dfrac{dz}{dv}\dfrac{dv}{dy}. \end{cases}$$

Ces équations résolvent la question pour le cas des dérivées du premier ordre. Les dérivées $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dy}$, $\frac{dv}{dx}$, $\frac{dv}{dy}$, qui y entrent, doivent être considérées comme connues et se calculeront à l'aide des équations données qui lient u et v à x et à y.

Remarquons que chacune des équations (1) aurait pu s'écrire comme conséquence immédiate de la règle de différentiation (58) des fonctions composées.

177. La comparaison des deux expressions différentes de d^2z donnera l'expression des dérivées du second ordre $\frac{d^2z}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dx\,dy}$, $\frac{d^2z}{dy^2}$, en fonction des dérivées prises par rapport aux variables u et v.

On a, en considérant dx et dy comme constants,

$$(1)\qquad d^2z = \frac{d^2z}{dx^2}\,dx^2 + 2\,\frac{d^2z}{dx\,dy}\,dx\,dy + \frac{d^2z}{dy^2}\,dy^2;$$

on a aussi, dans la même hypothèse,

$$(2)\qquad d^2z = \frac{d^2z}{du^2}\,du^2 + 2\,\frac{d^2z}{du\,dv}\,du\,dv + \frac{d^2z}{dv^2}\,dv^2 + \frac{dz}{du}\,d^2u + \frac{dz}{dv}\,d^2v;$$

d'ailleurs

$$du = \frac{du}{dx}\,dx + \frac{du}{dy}\,dy, \qquad dv = \frac{dv}{dx}\,dx + \frac{dv}{dy}\,dy,$$

$$d^2u = \frac{d^2u}{dx^2}\,dx^2 + 2\,\frac{d^2u}{dx\,dy}\,dx\,dy + \frac{d^2u}{dy^2}\,dy^2, \qquad d^2v = \frac{d^2v}{dx^2}\,dx^2 + 2\,\frac{d^2v}{dx\,dy}\,dx\,dy + \frac{d^2v}{dy^2}\,dy^2.$$

Par la substitution de ces valeurs, l'équation (2) prendra la forme

$$d^2z = A\,dx^2 + 2B\,dx\,dy + C\,dy^2,$$

et en comparant avec l'équation (1), on conclura

$$\frac{d^2z}{dx^2} = A, \qquad \frac{d^2z}{dx\,dy} = B, \qquad \frac{d^2z}{dy^2} = C,$$

A, B, C étant des fonctions connues de $\frac{d^2z}{du^2}$, $\frac{d^2z}{du\,dv}$, $\frac{d^2z}{dv^2}$, $\frac{dz}{du}$, $\frac{dz}{dv}$, et des dérivées de u et de v prises par rapport à x et à y.

La même méthode s'étend évidemment aux dérivées du troisième ordre et des ordres supérieurs.

178. La méthode précédente fait connaître, par un seul et même calcul, l'expression de toutes les dérivées de même ordre. Il peut arriver que, ne voulant obtenir l'expression que d'une seule dérivée, on trouve plus commode de la déterminer directement et isolément.

Supposons, par exemple, que, les données étant celles du paragraphe précédent, on veuille calculer $\frac{d^2z}{dx\,dy}$.

On a d'abord, d'après la théorie des fonctions composées,

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{du}\,\frac{du}{dx} + \frac{dz}{dv}\,\frac{dv}{dx}.$$

Pour obtenir $\frac{d^2z}{dx\,dy}$, il faut prendre la dérivée de chacun des deux membres par rapport à y; on a ainsi

$$\frac{d^2z}{dx\,dy} = \frac{d}{dy}\left(\frac{dz}{du}\right)\cdot\frac{du}{dx} + \frac{dz}{du}\,\frac{d^2u}{dx\,dy} + \frac{d}{dy}\left(\frac{dz}{dv}\right)\cdot\frac{dv}{dx} + \frac{dz}{dv}\,\frac{d^2v}{dx\,dy};$$

d'ailleurs $\frac{d}{dy}\left(\frac{dz}{du}\right)$ et $\frac{d}{dy}\left(\frac{dz}{dv}\right)$ peuvent se calculer à l'aide de la formule générale

$$\frac{d\varphi}{dy} = \frac{d\varphi}{du}\,\frac{du}{dy} + \frac{d\varphi}{dv}\,\frac{dv}{dy},$$

et l'on obtient ainsi

$$\frac{d^2z}{dx\,dy} = \frac{d^2z}{du^2}\,\frac{du}{dx}\,\frac{du}{dy} + \frac{d^2z}{du\,dv}\left(\frac{du}{dx}\,\frac{dv}{dy} + \frac{du}{dy}\,\frac{dv}{dx}\right) + \frac{d^2z}{dv^2}\,\frac{dv}{dx}\,\frac{dv}{dy} + \frac{dz}{du}\,\frac{d^2u}{dx\,dy} + \frac{dz}{dv}\,\frac{d^2v}{dx\,dy}.$$

Les mêmes principes s'appliqueraient à la transformation des dérivées d'une fonction contenant un plus grand nombre de variables indépendantes; il n'est pas nécessaire d'en reprendre l'exposition. Les applications qui vont suivre ne laisseront sur ce point aucune difficulté.

Cas où l'on change la fonction.

179. Lorsqu'une équation lie plusieurs variables, chacune d'elles peut être considérée comme fonction de toutes les autres, et il arrive souvent que, dans le cours d'un même calcul, on juge utile de changer, non-seulement les variables indépendantes, mais encore les fonctions qui en dépendent et auxquelles on substitue des fonctions nouvelles liées aux premières par des relations données.

Soit z une fonction de x et de y. Supposons d'abord que l'on veuille y substituer une nouvelle fonction w, de deux variables nouvelles u et v, u, v, w étant liés, bien entendu, à x, y, z, par trois équations données.

On a

$$dw = \frac{dw}{du}\,du + \frac{dw}{dv}\,dv,$$

$$du = \frac{du}{dx}\,dx + \frac{du}{dy}\,dy + \frac{du}{dz}\,dz = \frac{du}{dx}\,dx + \frac{du}{dy}\,dy + \frac{du}{dz}\left(\frac{dz}{dx}\,dx + \frac{dz}{dy}\,dy\right),$$

$$dv = \frac{dv}{dx}\,dx + \frac{dv}{dy}\,dy + \frac{dv}{dz}\,dz = \frac{dv}{dx}\,dx + \frac{dv}{dy}\,dy + \frac{dv}{dz}\left(\frac{dz}{dx}\,dx + \frac{dz}{dy}\,dy\right).$$

Par conséquent

$$dw = \left[\frac{dw}{du}\left(\frac{du}{dx} + \frac{du}{dz}\frac{dz}{dx}\right) + \frac{dw}{dv}\left(\frac{dv}{dx} + \frac{dv}{dz}\frac{dz}{dx}\right)\right]dx + \left[\frac{dw}{du}\left(\frac{du}{dy} + \frac{du}{dz}\frac{dz}{dy}\right) + \frac{dw}{dv}\left(\frac{dv}{dy} + \frac{dv}{dz}\frac{dz}{dy}\right)\right]dy;$$

mais on a, d'un autre côté,

$$dw = \frac{dw}{dx}\,dx + \frac{dw}{dy}\,dy + \frac{dw}{dz}\,dz = \left(\frac{dw}{dx} + \frac{dw}{dz}\frac{dz}{dx}\right)dx + \left(\frac{dw}{dy} + \frac{dw}{dz}\frac{dz}{dy}\right)dy.$$

En égalant les coefficients de dx et de dy dans ces deux valeurs de dw, on déduit de là

$$\frac{dw}{dx} + \frac{dw}{dz}\frac{dz}{dx} = \frac{dw}{du}\left(\frac{du}{dx} + \frac{du}{dz}\frac{dz}{dx}\right) + \frac{dw}{dv}\left(\frac{dv}{dx} + \frac{dv}{dz}\frac{dz}{dx}\right),$$

$$\frac{dw}{dy} + \frac{dw}{dz}\frac{dz}{dy} = \frac{dw}{du}\left(\frac{du}{dy} + \frac{du}{dz}\frac{dz}{dy}\right) + \frac{dw}{dv}\left(\frac{dv}{dy} + \frac{dv}{dz}\frac{dz}{dy}\right).$$

Ces équations permettent d'exprimer $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$ en fonction de $\frac{dw}{du}$ et $\frac{dw}{dv}$. Les autres

dérivées qui figurent dans leur expression, savoir : $\frac{dw}{dx}$, $\frac{dw}{dz}$, $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dz}$, $\cdots$, doivent être regardées comme données, puisque u, v, w sont des fonctions connues de x, y et z.

On calculera de même d^2w à l'aide des deux formules

$$d^2w = \frac{d^2w}{du^2}du^2 + 2\frac{d^2w}{du\,dv}du\,dv + \frac{d^2w}{dv^2}dv^2 + \frac{dw}{du}d^2u + \frac{dw}{dv}d^2v,$$

$$d^2w = \frac{d^2w}{dx^2}dx^2 + 2\frac{d^2w}{dx\,dy}dx\,dy + \frac{d^2w}{dy^2}dy^2 + \frac{d^2w}{dz^2}dz^2 + 2\frac{d^2w}{dz\,dx}dz\,dx + 2\frac{d^2w}{dy\,dz}dy\,dz + \frac{dw}{dz}dz^2.$$

Si l'on remplace du, dv, d^2u, d^2v et d^2z par leur expression en fonction de dx et de dy, les deux formules prendront, l'une et l'autre, la forme

$$d^2w = P\,dx^2 + 2Q\,dx\,dy + R\,dy^2,$$

et en écrivant qu'elles sont identiques, on obtiendra trois équations qui permettront de calculer $\frac{d^2z}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dx\,dy}$ et $\frac{d^2z}{dy^2}$ en fonction des dérivées de w par rapport à u et v. Nous ne développerons pas les calculs, qui sont compliqués et sans intérêt.

Quelques exemples.

180. Transformer l'expression

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} + \frac{d^2v}{dz^2},$$

en substituant aux trois coordonnées rectangulaires x, y, z trois coordonnées rectangulaires nouvelles x', y', z', liées aux premières par les relations

$$x' = ax + by + cz, \qquad y' = a'x + b'y + c'z, \qquad z' = a''x + b''y + c''z,$$

dans lesquelles les neuf coefficients a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'' sont liés par les relations connues auxquelles satisfont les cosinus des angles formés deux à deux par les axes de deux systèmes rectangulaires. Remarquons que les relations qui lient les variables anciennes aux variables nouvelles étant ici du premier degré, dx', dy', dz', seront constantes en même temps que dx, dy, dz ; on aura donc

$$d^2v = \frac{d^2v}{dx^2}dx^2 + \frac{d^2v}{dy^2}dy^2 + \frac{d^2v}{dz^2}dz^2 + 2\frac{d^2v}{dx\,dy}dx\,dy + 2\frac{d^2v}{dx\,dz}dx\,dz + 2\frac{d^2v}{dy\,dz}dy\,dz,$$

et

$$d^2v = \frac{d^2v}{dx'^2}dx'^2 + \frac{d^2v}{dy'^2}dy'^2 + \frac{d^2v}{dz'^2}dz'^2 + 2\frac{d^2v}{dx'\,dy'}dx'\,dy' + 2\frac{d^2v}{dx'\,dz'}dx'\,dz' + 2\frac{d^2v}{dy'\,dz'}dy'\,dz';$$

d'ailleurs

$$dx' = a\,dx + b\,dy + c\,dz, \qquad dy' = a'\,dx' + b'\,dy' + c'\,dz', \qquad dz' = a''\,dx' + b''\,dy' + c''\,dz',$$

en substituant ces valeurs dans le second membre de l'équation précédente et égalant les coefficients des termes semblables, qui doivent être égaux, puisque dx, dy, dz sont arbitraires, il vient

$$\frac{d^2v}{dx^2} = a^2\frac{d^2v}{dx'^2} + a'^2\frac{d^2v}{dy'^2} + a''^2\frac{d^2v}{dz'^2} + 2aa'\frac{d^2v}{dx'\,dy'} + 2aa''\frac{d^2v}{dx'\,dz'} + 2a'a''\frac{d^2v}{dz'\,dy'},$$

$$\frac{d^2v}{dy^2} = b^2\frac{d^2v}{dx'^2} + b'^2\frac{d^2v}{dy'^2} + b''^2\frac{d^2v}{dz'^2} + 2bb'\frac{d^2v}{dx'\,dy'} + 2bb''\frac{d^2v}{dx'\,dz'} + 2b'b''\frac{d^2v}{dz'\,dy'},$$

$$\frac{d^2v}{dz^2} = c^2\frac{d^2v}{dx'^2} + c'^2\frac{d^2v}{dy'^2} + c''^2\frac{d^2v}{dz'^2} + 2cc'\frac{d^2v}{dx'\,dy'} + 2cc''\frac{d^2v}{dx'\,dz'} + 2c'c''\frac{d^2v}{dz'\,dy'},$$

et par conséquent, en ayant égard aux relations qui lient les neuf coefficients,

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} + \frac{d^2v}{dz^2} = \frac{d^2v}{dx'^2} + \frac{d^2v}{dy'^2} + \frac{d^2v}{dz'^2}.$$

181. Transformer l'expression

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2},$$

dans laquelle v désigne une fonction quelconque de x et de y, en une autre dans laquelle x et y soient remplacés par des variables r et θ, liées aux premières par les équations

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta,$$

équivalentes à

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad \theta = \operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x}.$$

On a

$$d^2v = \frac{d^2v}{dx^2}\,dx^2 + 2\frac{d^2v}{dx\,dy}\,dx\,dy + \frac{d^2v}{dy^2}\,dy^2,$$

et

$$d^2v = \frac{d^2v}{dr^2}\,dr^2 + 2\frac{d^2v}{dr\,d\theta}\,dr\,d\theta + \frac{d^2v}{d\theta^2}\,d\theta^2 + \frac{dv}{dr}\,d^2r + \frac{dv}{d\theta}\,d^2\theta;$$

d'ailleurs

$$dr = \frac{x\,dx + y\,dy}{r}, \quad d\theta = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2},$$

$$d^2r = \frac{(dx^2 + dy^2)\,r - \dfrac{(x\,dx + y\,dy)^2}{r}}{r^2} = \frac{(x^2 + y^2)(dx^2 + dy^2) - (x\,dx + y\,dy)^2}{r^3} = \frac{(x\,dy - y\,dx)^2}{r^3},$$

$$d^2\theta = \frac{-2(x\,dx + y\,dy)(x\,dy - y\,dx)}{(x^2 + y^2)^2} = 2\frac{(y^2 - x^2)\,dx\,dy - xy(dy^2 - dx^2)}{(x^2 + y^2)^2},$$

et par suite

$$d^2v = \frac{d^2v}{dr^2}\frac{(x\,dx+y\,dy)^2}{r^2} + 2\,\frac{d^2v}{dr\,d\theta}\,\frac{(x^2-y^2)\,dx\,dy + xy(dy^2-dx^2)}{r^3}$$
$$+ \frac{d^2v}{d\theta^2}\frac{(x\,dy-y\,dx)^2}{r^4} + \frac{dv}{dr}\frac{(x\,dy-y\,dx)^2}{r^3} + \frac{dv}{d\theta}\,2\,\frac{(y^2-x^2)\,dx\,dy - xy(dy^2-dx^2)}{r^4},$$

et en égalant les coefficients de dx^2 et de dy^2 dans ces expressions de d^2v, il vient

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{d^2v}{dr^2}\frac{x^2}{r^2} - \frac{2xy}{r^3}\frac{d^2v}{dr\,d\theta} + \frac{d^2v}{d\theta^2}\frac{y^2}{r^4} + \frac{dv}{dr}\frac{y^2}{r^3} + \frac{2xy}{r^4}\frac{dv}{d\theta},$$
$$\frac{d^2v}{dy^2} = \frac{d^2v}{dr^2}\frac{y^2}{r^2} + \frac{2xy}{r^3}\frac{d^2v}{dr\,d\theta} + \frac{d^2v}{d\theta^2}\frac{x^2}{r^4} + \frac{dv}{dr}\frac{x^2}{r^3} - \frac{2xy}{r^4}\frac{dv}{d\theta},$$

et par suite

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{y^2} = \frac{d^2v}{dr^2} + \frac{d^2v}{d\theta^2}\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r}\frac{dv}{dr}.$$

182. Transformer l'expression

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} + \frac{d^2v}{dz^2},$$

en substituant, aux trois coordonnées x, y, z, des coordonnées polaires ρ, θ, ψ, liées aux premières par les équations

$$z = \rho\cos\theta, \qquad x = \rho\sin\theta\cos\psi, \qquad y = \rho\sin\theta\sin\psi.$$

Si nous adoptons d'abord comme variable auxiliaire le produit $\rho\sin\theta$, que nous représenterons par r, r et ψ pourront remplacer x et y, et comme on aura

$$x = r\cos\psi, \qquad y = r\sin\psi,$$

un calcul semblable au précédent donnera

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} = \frac{d^2v}{dr^2} + \frac{1}{r^2}\frac{d^2v}{d\psi^2} + \frac{1}{r}\frac{dv}{dr};$$

l'expression proposée devient donc

$$\frac{d^2v}{dr^2} + \frac{1}{r^2}\frac{d^2v}{d\psi^2} + \frac{1}{r}\frac{dv}{dr} + \frac{d^2v}{dz^2}.$$

Remarquons ensuite que, pour une valeur donnée de ψ, r et z sont deux coordonnées rectangulaires par rapport auxquelles ρ et θ peuvent être considérés comme un système de coordonnées polaires; on aura donc

$$\frac{d^2v}{dz^2} + \frac{d^2v}{dr^2} = \frac{d^2v}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{d^2v}{d\theta^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dv}{d\rho},$$

et par suite

$$(A)\qquad \frac{d^2v}{dx^2}+\frac{d^2v}{dy^2}+\frac{d^2v}{dz^2}=\frac{d^2v}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho^2}\frac{d^2v}{d\theta^2}+\frac{1}{r^2}\frac{d^2v}{d\psi^2}+\frac{1}{r}\frac{dv}{dr}+\frac{1}{\rho}\frac{dv}{d\rho}.$$

Il reste à calculer $\frac{dv}{dr}$: il ne faut pas oublier que, dans le calcul de cette dérivée, ψ et z sont considérés comme constants; v dépend alors de ρ et de θ, et l'on a

$$\frac{dv}{dr}=\frac{dv}{d\rho}\frac{d\rho}{dr}+\frac{dv}{d\theta}\frac{d\theta}{dr}.$$

D'ailleurs, z étant constant, l'équation $\rho\cos\theta=z$ donne

$$-\rho\sin\theta d\theta+\cos\theta d\rho=0.$$

Donc

$$\frac{d\rho}{d\theta}=\rho\operatorname{tang}\theta.$$

De plus on déduit de l'équation $\rho\sin\theta=r$

$$d\rho\sin\theta+\rho\cos\theta d\theta=dr;$$

par suite, en vertu de la valeur trouvée pour $\frac{d\rho}{d\theta}$,

$$d\rho\sin\theta+\frac{\cos\theta d\rho}{\operatorname{tang}\theta}=dr \qquad \text{ou} \qquad \frac{d\rho}{dr}=\sin\theta.$$

On en conclut

$$\frac{d\theta}{dr}=\frac{\sin\theta}{\rho\operatorname{tang}\theta}=\frac{\cos\theta}{\rho} \qquad \text{et} \qquad \frac{dv}{dr}=\frac{dv}{d\rho}\sin\theta+\frac{dv}{d\theta}\frac{\cos\theta}{\rho};$$

l'équation (A) devient, en y remplaçant r et $\frac{dv}{dr}$ par leurs valeurs,

$$\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{d^2v}{dy^2}+\frac{d^2v}{dz^2}=\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{d^2v}{d\theta^2}+\cot\theta\frac{dv}{d\theta}\right)+\frac{1}{\rho^2\sin^2\theta}\frac{d^2v}{d\psi^2}+\frac{d^2v}{d\rho^2}+\frac{2}{\rho}\frac{dv}{d\rho}.$$

183. Appliquons les méthodes générales au cas où les coordonnées rectilignes x, y, z, sont remplacées par trois variables ρ, ρ_1, ρ_2, auxquelles M. Lamé, qui en a fait un fréquent et utile usage, donne le nom de *système de coordonnées curvilignes*.

Soient

$$\varphi(x,\ y,\ z)=\rho, \qquad \varphi_1(x,\ y,\ z)=\rho_1, \qquad \varphi_2(x,\ y,\ z)=\rho_2,$$

les équations de trois systèmes de surfaces se coupant à angle droit et pouvant être considérées comme partageant l'espace en une infinité de parallélipipèdes rectangles infiniment petits; à chaque système de valeurs des paramètres ρ, ρ_1, ρ_2, correspondent trois surfaces qui, par hypothèse, se coupent orthogonalement en un point aussi bien défini par les valeurs de ρ, ρ_1, ρ_2, que par celles de x, y, z. Ces paramètres forment un *système de coordonnées curvilignes*.

M. Lamé a introduit utilement dans les calculs relatifs à cette théorie trois

fonctions h, h_1 et h_2, définies par les équations

$$(1)\qquad \begin{aligned} h^2 &= \left(\frac{d\rho}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\rho}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\rho}{dz}\right)^2, \\ h_1^2 &= \left(\frac{d\rho_1}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\rho_1}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\rho_1}{dz}\right)^2, \\ h_2^2 &= \left(\frac{d\rho_2}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\rho_2}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\rho_2}{dz}\right)^2. \end{aligned}$$

Ces fonctions ne changent pas, comme on s'en assure facilement, si l'on remplace les coordonnées x, y, z par d'autres coordonnées rectilignes orthogonales. Cela résulte d'ailleurs immédiatement de ce que, d'après ce qui a été dit (125), $\frac{d\rho}{h}$, $\frac{d\rho_1}{h_1}$, $\frac{d\rho_2}{h_2}$ représentent les arêtes du parallélipipède compris entre les six surfaces qui correspondent aux valeurs ρ, $\rho + d\rho$, ρ_1, $\rho_1 + d\rho_1$, ρ_2, $\rho_2 + d\rho_2$ de nos paramètres. Or les dimensions de ce parallélipipède ne peuvent pas changer avec la direction des axes.

Cela posé, cherchons d'abord à exprimer les dérivées de x, y, z, par rapport à ρ, ρ_1, ρ_2, en fonction de celles de ρ, ρ_1, ρ_2 par rapport à x, y et z. On a

$$(2)\qquad \begin{aligned} d\rho &= \frac{d\rho}{dx}\,dx + \frac{d\rho}{dy}\,dy + \frac{d\rho}{dz}\,dz, \\ d\rho_1 &= \frac{d\rho_1}{dx}\,dx + \frac{d\rho_1}{dy}\,dy + \frac{d\rho_1}{dz}\,dz, \\ d\rho_2 &= \frac{d\rho_2}{dx}\,dx + \frac{d\rho_2}{dy}\,dy + \frac{d\rho_2}{dz}\,dz. \end{aligned}$$

Pour déduire de ces équations les dérivées de x, y, z par rapport à ρ, ρ_1, ρ_2, résolvons-les par rapport aux différentielles dx, dy, dz. Si l'on a égard à ce que $\frac{1}{h}\frac{d\rho}{dx}$, $\frac{1}{h}\frac{d\rho}{dy}$, $\frac{1}{h}\frac{d\rho}{dz}$, $\frac{1}{h_1}\frac{d\rho_1}{dx}$, ..., sont les cosinus des angles formés (96) avec les axes des coordonnées, par les normales à nos trois surfaces qui, par hypothèse, forment un système rectangulaire, on verra que pour résoudre les équations (2) il suffit de les ajouter, après les avoir multipliées successivement par $\frac{1}{h^2}\frac{d\rho}{dx}$, $\frac{1}{h_1^2}\frac{d\rho_1}{dx}$, $\frac{1}{h_2^2}\frac{d\rho_2}{dx}$, puis par $\frac{1}{h^2}\frac{d\rho}{dy}$, $\frac{1}{h_1^2}\frac{d\rho_1}{dy}$, $\frac{1}{h_2^2}\frac{d\rho_2}{dy}$, et enfin par $\frac{1}{h^2}\frac{d\rho}{dz}$, $\frac{1}{h_1^2}\frac{d\rho_1}{dz}$, $\frac{1}{h_2^2}\frac{d\rho_2}{dz}$. On trouve ainsi

$$\begin{aligned} dx &= \frac{1}{h^2}\frac{d\rho}{dx}\,d\rho + \frac{1}{h_1^2}\frac{d\rho_1}{dx}\,d\rho_1 + \frac{1}{h_2^2}\frac{d\rho_2}{dx}\,d\rho_2, \\ dy &= \frac{1}{h^2}\frac{d\rho}{dy}\,d\rho + \frac{1}{h_1^2}\frac{d\rho_1}{dy}\,d\rho_1 + \frac{1}{h_2^2}\frac{d\rho_2}{dy}\,d\rho_2, \\ dz &= \frac{1}{h^2}\frac{d\rho}{dz}\,d\rho + \frac{1}{h_1^2}\frac{d\rho_1}{dz}\,d\rho_1 + \frac{1}{h_2^2}\frac{d\rho_2}{dz}\,d\rho_2, \end{aligned}$$

et, par conséquent, on a (57)

$$\frac{dx}{d\rho}=\frac{1}{h^2}\frac{d\rho}{dx},\qquad \frac{dx}{d\rho_1}=\frac{1}{h_1^2}\frac{d\rho_1}{dx},\qquad \frac{dx}{d\rho_2}=\frac{1}{h_2^2}\frac{d\rho_2}{dx},$$

$$\frac{dy}{d\rho}=\frac{1}{h^2}\frac{d\rho}{dy},\qquad \frac{dy}{d\rho_1}=\frac{1}{h_1^2}\frac{d\rho_1}{dy},\qquad \frac{d\rho_2}{dy}=\frac{1}{h_2^2}\frac{d\rho_2}{dy},$$

$$\frac{dz}{d\rho}=\frac{1}{h^2}\frac{d\rho}{dz},\qquad \frac{dz}{d\rho_1}=\frac{1}{h_1^2}\frac{d\rho_1}{dz},\qquad \frac{dz}{d\rho_2}=\frac{1}{h_2^2}\frac{d\rho_2}{dz}.$$

Ces formules peuvent d'ailleurs se démontrer directement. Remarquons, en effet, que le produit $\frac{dx}{d\rho}d\rho$ représente l'accroissement infiniment petit de x, lorsque, ρ_1 et ρ_2 restant constants, ρ reçoit l'accroissement $d\rho$. Ce produit est donc la projection sur l'axe des X, de la normale infiniment petite comprise entre les surfaces qui correspondent aux paramètres ρ et $\rho+d\rho$, et dont la longueur est (125) $\frac{d\rho}{h}$. Or le cosinus de l'angle formé par cette normale avec l'axe des X est (96) $\frac{1}{h}\frac{d\rho}{dx}$.

On a donc

$$\frac{dx}{d\rho}d\rho=\frac{1}{h^2}d\rho\frac{d\rho}{dx},$$

et par suite, en supprimant le facteur $d\rho$,

$$\frac{dx}{d\rho}=\frac{1}{h^2}\frac{d\rho}{dx}.$$

184. Nous allons maintenant calculer en fonction des coordonnées ρ, ρ_1, ρ_2 la somme

$$\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{d^2v}{dy^2}+\frac{d^2v}{dz^2},$$

à laquelle M. Lamé donne le nom de *paramètre du second ordre de la fonction v*.

Et d'abord ce paramètre s'exprime facilement par ceux des variables ρ, ρ_1, ρ_2, elles-mêmes.

On a, en effet,

$$\frac{dv}{dx}=\frac{dv}{d\rho}\frac{d\rho}{dx}+\frac{dv}{d\rho_1}\frac{d\rho_1}{dx}+\frac{dv}{d\rho_2}\frac{d\rho_2}{dx},$$

$$\frac{d^2v}{dx^2}=\frac{d^2v}{d\rho^2}\left(\frac{d\rho}{dx}\right)^2+\frac{d^2v}{d\rho_1^2}\left(\frac{d\rho_1}{dx}\right)^2+\left(\frac{d^2v}{d\rho_2^2}\right)\left(\frac{d\rho_2}{dx}\right)^2+2\frac{d^2v}{d\rho_1 d\rho_2}\frac{d\rho_1}{dx}\frac{d\rho_2}{dx}$$
$$+2\frac{d^2v}{d\rho_2 d\rho}\frac{d\rho_2}{dx}\frac{d\rho}{dx}+2\frac{d^2v}{d\rho d\rho_1}\frac{d\rho}{dx}\frac{d\rho_1}{dx}+\frac{dv}{d\rho}\frac{d^2\rho}{dx^2}+\frac{dv}{d\rho_1}\frac{d^2\rho_1}{dx^2}+\frac{dv}{d\rho_2}\frac{d^2\rho_2}{dx^2},$$

et si l'on calcule, de la même manière, $\frac{d^2v}{dy^2}$ et $\frac{d^2v}{dz^2}$, on trouvera, en ajoutant et

ayant égard à ce que les surfaces sont orthogonales,

$$\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{d^2v}{dy^2}+\frac{d^2v}{dz^2}=h^2\frac{d^2v}{d\rho^2}+h_1^2\frac{d^2v}{d\rho_1^2}+h_2^2\frac{d^2v}{d\rho_2^2}+\frac{dv}{d\rho}\left(\frac{d^2\rho}{dx^2}+\frac{d^2\rho}{dy^2}+\frac{d^2\rho}{dz^2}\right)$$
$$+\frac{dv}{d\rho_1}\left(\frac{d^2\rho_1}{dx^2}+\frac{d^2\rho_1}{dy^2}+\frac{d^2\rho_1}{dz^2}\right)+\frac{dv}{d\rho_2}\left(\frac{d^2\rho_2}{dx^2}+\frac{d^2\rho_2}{dy^2}+\frac{d^2\rho_2}{dz^2}\right),$$

et par suite le paramètre du second ordre de v sera exprimé en fonction de ρ, ρ_1, ρ_2 et des paramètres de ces trois fonctions, que nous allons actuellement chercher.

185. Les surfaces représentées par les équations $\rho=\text{const.}$, $\rho_1=\text{const.}$, $\rho_2=\text{const.}$, se coupent mutuellement à angle droit, quelles que soient les valeurs des constantes : or les cosinus des angles formés par leurs trois normales en un point avec les axes des X, Y et Z, sont

$$\frac{1}{h}\frac{d\rho}{dx},\quad \frac{1}{h}\frac{d\rho}{dy},\quad \frac{1}{h}\frac{d\rho}{dz},$$
$$\frac{1}{h_1}\frac{d\rho_1}{dx},\quad \frac{1}{h_1}\frac{d\rho_1}{dy},\quad \frac{1}{h_1}\frac{d\rho_1}{dz},$$
$$\frac{1}{h_2}\frac{d\rho_2}{dx},\quad \frac{1}{h_2}\frac{d\rho_2}{dy},\quad \frac{1}{h_2}\frac{d\rho_2}{dz}.$$

Ces neuf quantités ont donc entre elles les relations bien connues qui existent entre les cosinus des angles que font, deux à deux, les axes de deux systèmes rectangulaires, et l'on a, par suite,

$$\frac{d\rho}{dx}=\frac{h}{h_1h_2}\left(\frac{d\rho_1}{dz}\frac{d\rho_2}{dy}-\frac{d\rho_1}{dy}\frac{d\rho_2}{dz}\right),$$
$$\frac{d\rho}{dy}=\frac{h}{h_1h_2}\left(\frac{d\rho_1}{dx}\frac{d\rho_2}{dz}-\frac{d\rho_1}{dz}\frac{d\rho_2}{dx}\right),$$
$$\frac{d\rho}{dz}=\frac{h}{h_1h_2}\left(\frac{d\rho_1}{dy}\frac{d\rho_2}{dx}-\frac{d\rho_1}{dx}\frac{d\rho_2}{dy}\right),$$
$$\frac{d\rho_1}{dx}=\frac{h_1}{hh_2}\left(\frac{d\rho_2}{dz}\frac{d\rho}{dy}-\frac{d\rho_2}{dy}\frac{d\rho}{dz}\right),$$
$$\frac{d\rho_1}{dy}=\frac{h_1}{hh_2}\left(\frac{d\rho_2}{dx}\frac{d\rho}{dz}-\frac{d\rho_2}{dz}\frac{d\rho}{dx}\right),$$
$$\frac{d\rho_1}{dz}=\frac{h_1}{hh_2}\left(\frac{d\rho_2}{dy}\frac{d\rho}{dx}-\frac{d\rho_2}{dx}\frac{d\rho}{dy}\right),$$
$$\frac{d\rho_2}{dx}=\frac{h_2}{hh_1}\left(\frac{d\rho}{dz}\frac{d\rho_1}{dy}-\frac{d\rho}{dy}\frac{d\rho_1}{dz}\right),$$
$$\frac{d\rho_2}{dy}=\frac{h_2}{hh_1}\left(\frac{d\rho}{dx}\frac{d\rho_1}{dz}-\frac{d\rho}{dz}\frac{d\rho_1}{dx}\right),$$
$$\frac{d\rho_2}{dz}=\frac{h_2}{hh_1}\left(\frac{d\rho}{dy}\frac{d\rho_1}{dx}-\frac{d\rho}{dx}\frac{d\rho_1}{dy}\right).$$

Si de ces formules on déduit $\frac{d^2\rho}{dy\,dx}$ et $\frac{d^2\rho}{dx\,dy}$, en différentiant $\frac{d\rho}{dx}$ par rapport à y, puis $\frac{d\rho}{dy}$ par rapport à x, on a, en égalant les résultats,

$$\frac{h}{h_1 h_2}\left(\frac{d^2\rho_1}{dz\,dy}\frac{d\rho_2}{dy}-\frac{d^2\rho_1}{dy^2}\frac{d\rho_2}{dz}+\frac{d\rho_1}{dz}\frac{d^2\rho_2}{dy^2}-\frac{d\rho_1}{dy}\frac{d^2\rho_2}{dy\,dz}\right)+\frac{d\frac{h}{h_1h_2}}{dy}\left(\frac{d\rho_1}{dz}\frac{d\rho_2}{dy}-\frac{d\rho_1}{dy}\frac{d\rho_2}{dz}\right)$$

$$=\frac{h}{h_1 h_2}\left(\frac{d^2\rho_1}{dx^2}\frac{d\rho_2}{dz}-\frac{d^2\rho_1}{dz\,dx}\frac{d\rho_2}{dx}+\frac{d\rho_1}{dx}\frac{d^2\rho_2}{dx\,dz}-\frac{d\rho_1}{dz}\frac{d^2\rho_2}{dx^2}\right)+\frac{d\frac{h}{h_1h_2}}{dx}\left(\frac{d\rho_1}{dx}\frac{d\rho_2}{dz}-\frac{d\rho_1}{dz}\frac{d\rho_2}{dx}\right),$$

ou bien, en ajoutant et retranchant, pour plus de symétrie, quelques termes qui se détruisent,

$$\frac{h}{h_1 h_2}\left[\frac{d\rho_1}{dz}\left(\frac{d^2\rho_2}{dx^2}+\frac{d^2\rho_2}{dy^2}+\frac{d^2\rho_2}{dz^2}\right)-\frac{d\rho_2}{dz}\left(\frac{d^2\rho_1}{dx^2}+\frac{d^2\rho_1}{dy^2}+\frac{d^2\rho_1}{dz^2}\right)\right]$$

$$+\frac{h}{h_1 h_2}\left[\left(\frac{d\rho_2}{dx}\frac{d\frac{d\rho_1}{dz}}{dx}+\frac{d\rho_2}{dy}\frac{d\frac{d\rho_1}{dz}}{dy}+\frac{d\rho_2}{dz}\frac{d\frac{d\rho_1}{dz}}{dz}\right)-\left(\frac{d\rho_1}{dx}\frac{d\frac{d\rho_2}{dz}}{dx}+\frac{d\rho_1}{dy}\frac{d\frac{d\rho_2}{dz}}{dy}+\frac{d\rho_1}{dz}\frac{d\frac{d\rho_2}{dz}}{dz}\right)\right]$$

$$+\left[\frac{d\rho_1}{dz}\left(\frac{d\rho_2}{dx}\frac{d\frac{h}{h_1h_2}}{dx}+\frac{d\rho_2}{dy}\frac{d\frac{h}{h_1h_2}}{dy}+\frac{d\rho_2}{dz}\frac{d\frac{h}{h_1h_2}}{dz}\right)\right.$$

$$\left.-\frac{d\rho_2}{dz}\left(\frac{d\rho_1}{dx}\frac{d\frac{h}{h_1h_2}}{dx}+\frac{d\rho_1}{dy}\frac{d\frac{h}{h_1h_2}}{dy}+\frac{d\rho_1}{dz}\frac{d\frac{h}{h_1h_2}}{dz}\right)\right];$$

mais en ayant égard aux formules (183), et remarquant que l'on a

$$\frac{d\frac{d\rho_1}{dz}}{dx}\frac{dx}{d\rho_2}+\frac{d\frac{d\rho_1}{dz}}{dy}\frac{dy}{d\rho_2}+\frac{d\frac{d\rho_1}{dz}}{dz}\frac{dz}{d\rho_2}=\frac{d\frac{d\rho_1}{dz}}{d\rho_2},$$

cette équation devient

$$\frac{h}{h_1 h_2}\left[\frac{d\rho_1}{dz}\left(\frac{d^2\rho_2}{dx^2}+\frac{d^2\rho_2}{dy^2}+\frac{d^2\rho_2}{dz^2}\right)-\frac{d\rho_2}{dz}\left(\frac{d^2\rho_1}{dx^2}+\frac{d^2\rho_1}{dy^2}+\frac{d^2\rho_1}{dz^2}\right)+h_2^2\frac{d\frac{d\rho_1}{dz}}{d\rho_2}-h_1^2\frac{d\frac{d\rho_2}{dz}}{d\rho_1}\right]$$

$$+\frac{d\rho_1}{dz}h_2^2\frac{d\frac{h}{h_1h_2}}{d\rho_2}-\frac{d\rho_2}{dz}h_1^2\frac{d\frac{h}{h_1h_2}}{d\rho_1}=0.$$

On obtiendrait de même les deux suivantes :

$$\frac{h}{h_1 h_2}\left[\frac{d\rho_1}{dy}\left(\frac{d^2\rho_2}{dx^2}+\frac{d^2\rho_2}{dy^2}+\frac{d^2\rho_2}{dz^2}\right)-\frac{d\rho_2}{dy}\left(\frac{d^2\rho}{dx^2}+\frac{d^2\rho_1}{dy^2}+\frac{d^2\rho_1}{dz^2}\right)+h_2^2\frac{d\frac{d\rho_1}{dy}}{d\rho_1}-h_1^2\frac{d\frac{d\rho_2}{dy}}{d\rho_1}\right]$$
$$+\frac{d\rho_1}{dy}h_2^2\frac{d\frac{h}{h_1h_2}}{d\rho_2}-\frac{d\rho_2}{dy}h_1^2\frac{d\frac{h}{h_1h_2}}{d\rho_1}=0,$$

$$\frac{h}{h_1 h_2}\left[\frac{d\rho_1}{dx}\left(\frac{d^2\rho_2}{dx^2}+\frac{d^2\rho_2}{dy^2}+\frac{d^2\rho_2}{dz^2}\right)-\frac{d\rho_2}{dx}\left(\frac{d^2\rho_1}{dx^2}+\frac{d^2\rho_1}{dy^2}+\frac{d^2\rho_1}{dz^2}\right)+h_2^2\frac{d\frac{d\rho_1}{dx}}{d\rho_2}-h_1^2\frac{d\frac{d\rho_2}{dx}}{d\rho_1}\right]$$
$$+\frac{d\rho_1}{dx}h_2^2\frac{d\frac{h}{h_1h_2}}{d\rho_2}-\frac{d\rho_2}{dx}h_1^2\frac{d\frac{h}{h_1h_2}}{d\rho_1}=0.$$

En ajoutant ces trois équations après les avoir respectivement multipliées par $\frac{d\rho_1}{dx}$, $\frac{d\rho_1}{dy}$, $\frac{d\rho_1}{dz}$, on trouve, toutes réductions faites,

$$\frac{1}{h_2^2}\left(\frac{d^2\rho_1}{dx^2}+\frac{d^2\rho_1}{dy^2}+\frac{d^2\rho_1}{dz^2}\right)+\frac{d\log\frac{hh_1}{h_2}}{d\rho_1}=0.$$

En ajoutant les mêmes équations après les avoir multipliées par $\frac{d\rho_2}{dz}$, $\frac{d\rho_2}{dy}$, $\frac{d\rho_2}{dx}$, on trouve de même

$$\frac{1}{h_1^2}\left(\frac{d^2\rho_1}{dx^2}+\frac{d^2\rho_1}{dy^2}+\frac{d^2\rho_1}{dz^2}\right)+\frac{d\log\frac{hh_2}{h_1}}{d\rho_1}=0;$$

on trouverait de même

$$\frac{1}{h^2}\left(\frac{d^2\rho}{dx^2}+\frac{d^2\rho}{dy^2}+\frac{d^2\rho}{dz^2}\right)+\frac{d\log\frac{h_1h_2}{h}}{d\rho}=0.$$

En ayant égard à ces équations, l'expression de $\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{d^2v}{dy^2}+\frac{d^2v}{dz^2}$ trouvée (184) devient

$$\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{d^2v}{dy^2}+\frac{d^2v}{dz^2}=h^2\left(\frac{d^2v}{d\rho^2}+\frac{dv}{d\rho}\frac{h_1h_2}{h}\frac{d\frac{h}{h_2h_1}}{d\rho}\right)+h_1^2\left(\frac{d^2v}{d\rho_1^2}+\frac{dv}{d\rho_1}\frac{h_2h}{h_1}\frac{d\frac{h_1}{h_2h}}{d\rho_1}\right)$$
$$+h_2^2\left(\frac{d^2v}{d\rho_2^2}+\frac{dv}{d\rho_2}\frac{hh_1}{h_2}\frac{d\frac{h_2}{hh_1}}{d\rho_2}\right),$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{d^2v}{dy^2}+\frac{d^2v}{dz^2}=hh_1h_2\left(\frac{d\frac{h}{h_1h_2}\frac{dv}{d\rho}}{d\rho}+\frac{d\frac{h_1}{h_2h}\frac{dv}{d\rho_1}}{d\rho_1}+\frac{d\frac{h_2}{hh_1}\frac{dv}{d\rho_2}}{d\rho_2}\right).$$

Si les coordonnées ρ, ρ_1, ρ_2 sont des coordonnées polaires, de telle sorte que les surfaces orthogonales soient des sphères, ρ_1 et ρ_2 étant remplacés par θ et ψ, qui représentent habituellement les deux coordonnées angulaires, on a

$$z = \rho \cos\theta,$$
$$x = \rho \sin\theta \cos\psi,$$
$$y = \rho \sin\theta \sin\psi,$$

par suite

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$
$$\psi = \text{arc tang}\frac{y}{x},$$
$$\theta = \text{arc cos}\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

La distance de deux points infiniment voisins étant

$$d\rho^2 = d\rho^2 + \rho^2\, d\theta^2 + \rho^2 \sin^2\theta\, d\psi^2,$$

on a

$$h = 1, \qquad h_1 = \frac{1}{\rho}, \qquad h_2 = \frac{1}{\rho\sin\theta},$$

et par suite

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} + \frac{d^2v}{dz^2} = \frac{1}{\rho^2\sin\theta}\left[\frac{d}{d\rho}\left(\rho^2 \sin\theta \frac{dv}{d\rho}\right) + \frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dv}{d\theta}\right) + \frac{d}{d\psi}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{dv}{d\psi}\right)\right];$$

ce qui s'accorde bien avec le résultat trouvé (182).

EXERCICES.

1. En posant $x = \cos t$, l'équation $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + a^2y = 0$ devient $\frac{d^2y}{dt^2} + a^2y = 0$.

2. Transformer l'équation

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{d^2z}{dy^2},$$

en posant $x+y=\alpha$, $x-y=\beta$, et considérant z comme une fonction de α et de β.

3. Si z est une fonction de x et de y et que l'on pose

$$\frac{dz}{dx} = p, \quad \frac{dz}{dy} = q, \quad \frac{d^2z}{dx^2} = r, \quad \frac{d^2z}{dx\,dy} = s, \quad \frac{d^2z}{dy^2} = t, \quad u = px + qy - z,$$

on aura, en prenant p et q pour variables indépendantes,

$$\frac{du}{dp} = x, \quad \frac{du}{dq} = y, \quad \frac{d^2u}{dp^2} = \frac{t}{rt - s^2}, \quad \frac{d^2u}{dp\,dq} = \frac{-s}{rt - s^2}, \quad \frac{d^2u}{dq^2} = \frac{r}{rt - s^2}.$$

4. Si $\varphi(x, y, z) = \rho$, $\varphi_1(x, y, z) = \rho_1$, $\varphi_2(x, y, z) = \rho_2$, sont les équations de trois séries de surfaces orthogonales, ρ ρ_1, ρ_2 formant par suite un système de coordonnées curvilignes, le déterminant du système des fonctions ρ, ρ_1, ρ_2, par rapport aux variables x, y, z dont elles dépendent, est égal au produit $h\,h_1\,h_2$, dans lequel ces lettres ont la signification indiquée (**183**).

5. Si ρ^2, ρ_1^2, ρ_2^2 sont les trois racines, toujours réelles, de l'équation

$$1 = \frac{x^2}{\lambda} + \frac{y^2}{\lambda - b^2} + \frac{z^2}{\lambda - c^2},$$

en posant

$$du = \frac{d\rho}{\sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}}, \quad du_1 = \frac{d\rho_1}{\sqrt{-(\rho_1^2 - b^2)(\rho_1^2 - c^2)}}, \quad du_2 = \frac{d\rho^2}{\sqrt{(\rho_2^2 - b^2)(\rho_2^2 - c^2)}},$$

l'équation

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} + \frac{d^2v}{dz^2} = 0,$$

équivaut

$$(\rho_1^2 - \rho_2^2)\frac{d^2v}{du^2} + (\rho^2 - \rho_2^2)\frac{d^2v}{du_1^2} + (\rho^2 - \rho_1^2)\frac{d^2v}{du_2^2} = 0.$$

6. Si l'on pose

$$\sqrt{l + x} + \frac{y}{2} = u, \quad \sqrt{l - x} - \frac{y}{2} = v, \quad z = \frac{z_1}{\sqrt[4]{l - x}},$$

l'équation

$$\frac{d^2z}{dy^2} = (l - x)\frac{d^2z}{dx^2} - \frac{dz}{dx}$$

devient

$$\frac{d^2z_1}{du\,dv} = -\frac{z_1}{4(u + v)}.$$

CHAPITRE VIII.

FORMATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

Définition des équations différentielles.

186. Lorsqu'une équation exprime une relation entre une fonction et ses dérivées, on la nomme *équation différentielle*. Nous avons eu déjà l'occasion (146) d'utiliser des équations différentielles pour la recherche des dérivées de certaines fonctions. L'étude des équations de ce genre est d'ailleurs un des sujets les plus importants que nous ayons à traiter.

Une fonction d'une variable étant donnée, l'équation différentielle à laquelle elle satisfait n'est pas déterminée. Si, en effet, on différentie l'équation $y = \varphi(x)$ pour en déduire $\frac{dy}{dx} = \varphi'(x)$, toute combinaison de ces deux équations fournira une relation entre x, y et $\frac{dy}{dx}$, c'est-à-dire une équation différentielle à laquelle satisfait y.

Soit, par exemple, la fonction

$$y = e^{2x},$$

on en déduit

$$\frac{dy}{dx} = 2e^{2x},$$

et ces deux équations donnent les relations

$$\frac{dy}{dx} = 2y, \quad \frac{dy}{dx} + y = 3e^{2x}, \quad y^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 5ye^{2x}, \quad y^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{5}{2}y\frac{dy}{dx},$$

auxquelles on pourrait évidemment en adjoindre une infinité d'autres. Si dans ces équations on considère y comme inconnue, elles admettent la solution commune $y = e^{2x}$, mais chacune d'elles peut en avoir, et en a effectivement, une infinité d'autres.

187. On peut se proposer de combiner l'équation qui définit une fonction avec celle qui fait connaître la dérivée de cette même fonction, de manière à remplir une certaine condition que l'on aura en vue. On peut, par exemple, profiter de l'indétermination que comporte une semblable opération pour faire disparaître un radical, ou une exponentielle, ou un sinus, etc., qui figurent dans l'expression de la fonction et que l'on ne veut pas conserver dans l'équation différentielle.

Soit, par exemple, l'équation

$$y = [\varphi(x)]^m,$$

on en déduit

$$\frac{dy}{dx} = m\varphi'(x)[\varphi(x)]^{m-1},$$

et par conséquent, en éliminant $\varphi(x)^m$,

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{y} = \frac{m\varphi'(x)}{\varphi(x)}.$$

Si l'on a, par exemple,

$$y = \sqrt{1-x^2},$$

on en déduira

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{y} = -\frac{x}{1-x^2},$$

où il n'y a plus de radical.

Soit encore

$$y = \sin\varphi(x),$$

on en déduit

$$\frac{dy}{dx} = \cos\varphi(x).\varphi'(x),$$

et si l'on veut éliminer les lignes trigonométriques $\sin\varphi(x)$ et $\cos\varphi(x)$, on trouve

$$y^2 + \frac{1}{\varphi'(x)^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1.$$

On pourrait donner un grand nombre d'exemples analogues, mais nous nous bornerons à répéter que l'équation différentielle à laquelle satisfait une fonction donnée est essentiellement indéterminée. C'est pour cette raison que l'on peut, comme on vient de le voir, lui imposer des conditions relatives à la forme qu'elle doit avoir.

Élimination des constantes.

188. Lorsqu'une fonction donnée contient dans son expression une constante arbitraire, on peut se proposer de former une équation différentielle à laquelle elle satisfasse, et dont cette constante ait disparu. Le problème est toujours possible et déterminé. Soit, en effet, une équation

$$F(x, y, a) = 0, \tag{1}$$

dans laquelle a désigne une constante arbitraire. On obtient, en la différentiant,

$$\frac{d\mathrm{F}}{dx}+\frac{d\mathrm{F}}{dy}\frac{dy}{dx}=0, \tag{2}$$

et en éliminant a entre les équations (1) et (2), on formera l'équation différentielle demandée. Cette équation pourrait être obtenue par un autre calcul. On pourrait, par exemple, résoudre l'équation (1) par rapport à a, et la différentier après lui avoir donné la forme

$$\varphi(x, y)=a;$$

la constante se trouverait immédiatement éliminée et l'on obtiendrait l'équation

$$\frac{d\varphi}{dx}+\frac{d\varphi}{dy}\frac{dy}{dx}=0.$$

On peut, plus généralement, transformer d'une manière quelconque l'équation proposée avant de la différentier; l'élimination de la constante a pourra donner lieu à des calculs très-différents, mais le résultat final est le même dans tous les cas. Quand on a, en effet,

$$\mathrm{F}(x, y, a)=0, \tag{1}$$

a étant arbitraire, il est permis de choisir à volonté une valeur de x et la valeur correspondante de y; mais, le choix une fois fait, l'équation (1) détermine a et il n'y a plus rien d'arbitraire dans l'expression de y en x; $\frac{dy}{dx}$ est donc complétement déterminé. $\frac{dy}{dx}$ étant déterminé lorsque l'on se donne x et y, la relation qui lie x, y et $\frac{dy}{dx}$ est évidemment déterminée et doit rester la même, quel que soit le moyen employé pour l'obtenir.

189. Lorsqu'une équation entre deux variables x et y contient plusieurs constantes arbitraires, on peut les éliminer et former une équation différentielle dans laquelle elles ne figurent plus, mais il faut, pour cela, introduire des dérivées successives de y en nombre précisément égal à celui des constantes.

Soit l'équation

$$\mathrm{F}(x, y, \mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \ldots, \mathrm{C}_n)=0, \tag{1}$$

où $\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \ldots, \mathrm{C}_n$ désignent des constantes arbitraires. En la différentiant n fois de suite, on formera n équations nouvelles qui, réunies à la proposée, permettront d'éliminer les n constantes. Mais on peut procéder de bien des manières différentes pour atteindre le même but. On peut, en effet, transformer l'équation (1) avant de la différentier; on peut aussi transformer d'une manière quelconque celles qui ré-

sultent de la différentiation de (1) en substituant à l'une d'elles, avant de faire une différentiation nouvelle, le résultat de sa combinaison avec toutes les précédentes. On peut, par exemple, éliminer la constante C_1 entre l'équation (1) et sa dérivée, puis éliminer C_2 entre l'équation différentielle ainsi obtenue et sa dérivée, et continuer ainsi jusqu'à l'élimination de toutes les constantes. Or il est bien digne de remarque que toutes ces méthodes donnant lieu à des calculs très-différents, conduisent cependant au même résultat final. L'équation (1) contenant en effet n constantes arbitraires distinctes, on peut se donner, arbitrairement, pour une valeur donnée de x, les valeurs correspondantes de y et de ses $n-1$ premières dérivées $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$. Mais ces n conditions déterminent les n constantes, et y devient une fonction déterminée de x; $\frac{d^ny}{dx^n}$ est par conséquent déterminée. Cette $n^{ième}$ dérivée étant déterminée lorsqu'on se donne x, y, $\frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$, l'équation qui la lie à ces diverses quantités est déterminée et doit rester la même, quel que soit le moyen employé pour y parvenir.

190. Pour donner un exemple d'élimination des constantes, formons l'équation différentielle du troisième ordre à laquelle satisfait la fonction y définie par l'équation

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2,$$

représentant tous les cercles tracés dans un plan.

En différentiant trois fois, on a

$$(y-b)\frac{dy}{dx}+x-a=0,$$

$$(y-b)\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+1=0,$$

$$(y-b)\frac{d^3y}{dx^3}+3\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2}=0;$$

on déduit de ces deux dernières équations, par l'élimination de $(y-b)$,

$$\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]\frac{d^3y}{dx^3}-3\frac{dy}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2=0,$$

c'est l'équation différentielle demandée.

Élimination des constantes dans une équation qui contient plusieurs variables indépendantes.

191. La différentiation permet d'éliminer les constantes d'une équation dans laquelle figure une fonction de plusieurs variables, absolument comme dans le cas où il n'y a qu'une seule variable indépendante.

Soit l'équation

$$\varphi(x, y, a, b, z) = 0,$$

qui définit z en fonction de x et de y, et de deux constantes arbitraires. En différentiant par rapport à x, puis par rapport à y, on obtient deux équations qui, réunies à la proposée, permettent d'éliminer a et b.

En introduisant les dérivées du second ordre, $\frac{d^2z}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dx\,dy}$, $\frac{d^2z}{dy^2}$, on pourra éliminer cinq constantes; on en éliminerait neuf en introduisant les dérivées du troisième ordre, et ainsi de suite.

192. Il existe une différence importante entre les équations obtenues comme il vient d'être dit et celles qui résultent de l'élimination des constantes dans les équations à une seule variable indépendante. Dans ce dernier cas, en effet, l'équation obtenue a le même degré de généralité que la proposée et peut la remplacer entièrement. De même qu'elle est déduite de la première, on pourrait, en la prenant pour point de départ, retrouver celle-ci. C'est là un théorème de calcul intégral dont nous ne pouvons donner ici la démonstration, mais qui sera établi plus tard; or on peut voir, dès à présent, qu'il en est tout autrement dans le cas de deux ou plusieurs variables indépendantes : l'équation trouvée entre les dérivées partielles de la fonction est beaucoup plus générale que celle qui lui a donné naissance.

Considérons, en effet, une équation de la forme

$$\varphi(x, y, a, b, z) = 0. \tag{1}$$

En prenant les dérivées successives par rapport à x et à y, on pourra former deux équations du premier ordre, trois du second, quatre du troisième, et ainsi de suite. Si donc on veut introduire les dérivées du second ordre, on aura six équations entre x, y, z, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$, $\frac{d^2z}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dy^2}$, $\frac{d^2z}{dx\,dy}$, qui, par l'élimination des constantes a et b, donneront quatre équations entre ces diverses quantités. L'équation différentielle entre x, y, z, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$ ne donnera au contraire que deux équations du second ordre que l'on obtiendra en la différentiant par rapport à x et par rapport à y. Ces deux équations, réunies à la proposée, en font trois seulement au lieu de quatre, et par suite, en considérant les dérivées de z jusqu'au second ordre inclusivement, on voit que l'équation (1) leur impose un plus grand nombre de conditions que l'équation différentielle qui s'en déduit. La différence augmente encore si l'on considère les dérivées du troisième ordre. L'équation proposée, différentiée par rapport à x et par rapport à y jusqu'au troisième ordre inclusivement, donnera

en tout dix relations entre x, y, z, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{d^2z}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dx\,dy}$, $\frac{d^2z}{dy^2}$, $\frac{d^3z}{dx^3}$, $\frac{d^3z}{dx^2dy}$, $\frac{d^3z}{dy^2dx}$, $\frac{d^3z}{dy^3}$, et les deux constantes; il y aura donc huit relations indépendantes des constantes entre x, y, z et les dérivées de z jusqu'à celles du troisième ordre inclusivement. Or, en prenant pour point de départ l'équation différentielle débarrassée des constantes, on en déduit deux équations du second ordre et trois du troisième, ce qui fait six relations, en tout, entre ces mêmes dérivées auxquelles l'équation primitive en impose huit. Ce seul rapprochement fait comprendre que l'équation différentielle laisse à la fonction z une plus grande latitude que l'équation primitive.

193. On peut démontrer d'une autre manière que l'équation obtenue en éliminant deux constantes a et b entre l'équation

$$\varphi(x, y, z, a, b) = 0 \tag{1}$$

et ses dérivées, admet une infinité de solutions non comprises dans l'équation qui lui a donné naissance. Soit, en effet,

$$F\left(x, y, z, \frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}\right) = 0 \tag{2}$$

cette équation différentielle, à laquelle satisfait, par hypothèse, la fonction z déduite de l'équation (1), quelles que soient les valeurs qu'on y attribue aux constantes a et b. Nous pouvons remarquer d'abord que les surfaces représentées par l'équation (1) ont une enveloppe que chacune d'elles touche en un point; l'équation de cette surface enveloppe, s'obtient en éliminant a et b entre l'équation (1) et les dérivées de cette équation par rapport aux constantes a et b. Soit

$$\psi(x, y, z) = 0 \tag{3}$$

le résultat de cette élimination. Cette équation (3) fournit pour z une expression en x et y qui satisfait à l'équation (2), car en chaque point de la surface enveloppe les quantités x, y, z, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$ ont les mêmes valeurs que pour celle des surfaces enveloppées qui est touchée en ce point, et par conséquent la relation (2), qui a lieu pour tous les points de toutes les surfaces enveloppées, a lieu aussi pour la surface enveloppe.

Mais on peut obtenir une infinité d'autres équations qui, pour une raison toute semblable, partagent la propriété reconnue à l'équation (3). Établissons, en effet, entre les constantes a et b une relation arbitraire $b = f(a)$, l'équation (1) deviendra

$$\varphi[x, y, z, a, f(a)] = 0, \tag{4}$$

et, ne contenant plus qu'un seul paramètre a, cette équation représente une série

de surfaces dont l'enveloppe touche chacune d'elles, non plus en un point, mais suivant une ligne. L'équation de cette enveloppe s'obtiendra en éliminant a entre l'équation (4) et sa dérivée par rapport à a, et il est évident que l'on obtiendra ainsi l'équation d'une nouvelle surface pour tous les points de laquelle x, y, z, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$ seront les mêmes que pour un point convenablement choisi de l'une des surfaces primitivement données; l'équation (2) sera par conséquent satisfaite par la fonction z déduite de cette nouvelle relation. Mais, cette fois, l'introduction de la fonction arbitraire $f(a)$ permet d'obtenir un nombre infini de résultats différents, ce qui montre que, conformément à nos prévisions, l'équation (1) est bien loin d'être la solution générale de l'équation différentielle que l'on en déduit.

194. Soit, par exemple,

$$z = ax + by, \tag{1}$$

on en déduit

$$\frac{dz}{dx} = a, \qquad \frac{dz}{dy} = b,$$

par conséquent

$$z = x\frac{dz}{dx} + y\frac{dz}{dy}. \tag{2}$$

Pour trouver d'autres solutions de l'équation (2), posons $b = \varphi(a)$ et éliminons a entre l'équation

$$z = ax + y\,\varphi(a) \tag{3}$$

et sa dérivée

$$0 = x + y\,\varphi'(a). \tag{4}$$

On conclut de l'équation (4) que a est une fonction de $\frac{y}{x}$, et, par suite, l'élimination de a met l'équation (3) sous la forme

$$z = x\,\mathrm{F}\left(\frac{y}{x}\right), \tag{5}$$

F étant une fonction dont la forme dépend de celle de φ; il est facile de vérifier, en effet, que, quelle que soit la fonction F, l'équation (5) satisfait à l'équation différentielle (2). On déduit, en effet, de l'équation (5)

$$\frac{dz}{dx} = \mathrm{F}\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x}\,\mathrm{F}'\left(\frac{y}{x}\right), \qquad \frac{dz}{dy} = \mathrm{F}'\left(\frac{y}{x}\right),$$

et par conséquent

$$z = x\frac{dz}{dx} + y\frac{dz}{dy}.$$

Les surfaces représentées par l'équation (1) sont ici des plans passant par l'origine. En établissant une relation entre les deux constantes, on obtient l'équation d'un plan mobile autour de l'origine suivant une loi arbitraire, et ce plan enveloppe un cône dont l'équation satisfait à l'équation différentielle de l'ensemble de ses plans tangents.

195. La solution précédente repose entièrement sur des considérations géométriques; mais on peut démontrer directement, sans faire intervenir la théorie des surfaces, que l'équation obtenue en éliminant a entre

$$F[x, y, z, a, \varphi(a)] = 0, \tag{1}$$

et

$$\frac{dF[x, y, z, a, \varphi(a)]}{da} = 0, \tag{2}$$

donne, entre $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$, x, y, z, la même relation que l'équation

$$F(x, y, z, a, b) = 0;$$

pour éliminer en effet a entre les équations (1) et (2), il faut déduire de la seconde la valeur de a en fonction de x, y, z et la remettre dans la première. Cela fait, si l'on veut calculer $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$, dans l'équation résultant de cette élimination, il faudra différentier l'équation (1) par rapport à x et par rapport à y, en ayant égard à ce que a, qui était constant, est devenu variable; on aura ainsi

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dz}\frac{dz}{dx} + \frac{dF}{da}\frac{da}{dx} = 0,$$

$$\frac{dF}{dy} + \frac{dF}{dz}\frac{dz}{dy} + \frac{dF}{da}\frac{da}{dy} = 0,$$

mais l'expression de a est telle que l'on a, identiquement, $\frac{dF}{da} = 0$, et les équations précédentes se réduisent par conséquent à

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dz}\frac{dz}{dx} = 0, \qquad \frac{dF}{dy} + \frac{dF}{dz}\frac{dz}{dy} = 0;$$

elles sont donc précisément les mêmes que lorsque a était constant. Or on pourra combiner ces deux équations de manière à éliminer entre elles et la proposée les deux quantités a et $\varphi(a)$ devenues variables. Les calculs seront absolument les mêmes que lorsque ces quantités étaient constantes et se nommaient a et b, et l'on aura le même résultat, comme on voulait le démontrer.

196. Les considérations précédentes peuvent être généralisées. Si l'on considère une fonction de n variables indépendantes, liée à ces n variables par une équation

contenant n constantes arbitraires, on pourra éliminer ces n constantes entre l'équation proposée et les dérivées du premier ordre prises par rapport aux n variables indépendantes; on formera ainsi une équation différentielle du premier ordre qui, quelles que soient les constantes, sera satisfaite par la fonction que définit l'équation proposée, et, en outre, par une infinité d'autres fonctions qui peuvent se déduire de celle-là.

Soit l'équation

$$(1) \qquad 0 = F(u, x_1, x_2, \ldots, x_n, C_1, C_2, \ldots, C_n).$$

Supposons que, parmi les n constantes $C_1, C_2, \ldots, C_n$, on en choisisse un nombre arbitraire p et qu'on les considère comme des fonctions arbitraires de toutes les autres, de telle sorte que l'équation (1) ne contienne plus que $n - p$ constantes; si l'on différentie cette équation par rapport à ces $n - p$ constantes, successivement, on pourra éliminer ces constantes entre l'équation proposée et les équations ainsi formées; le résultat de cette élimination sera une équation entre $u, x_1, x_2, \ldots, x_n$; la fonction u définie par cette relation, dont la forme dépend des fonctions arbitraires que l'on a introduites, satisfera à la même équation différentielle que la fonction primitivement donnée qui contenait les n constantes.

Regardons en effet, dans l'équation (1), $C_1, C_2, \ldots, C_p$ comme des fonctions arbitraires des autres constantes, et différentions-la par rapport aux constantes $C_{p+1}, C_{p+2}, \ldots, C_n$; nous aurons ainsi $n - p$ équations. De ces équations déduisons $C_{p+1}, C_{p+2}, \ldots, C_n$, pour les substituer dans la proposée qui ne contiendra plus alors que $u, x_1, x_2, \ldots, x_n$. Je dis que les dérivées $\frac{du}{dx_1}, \frac{du}{dx_2}, \ldots, \frac{du}{dx_n}$ et la fonction u, auront, pour des valeurs données de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, absolument les mêmes expressions en fonction de $x_1, x_2, \ldots, x_n, C_1, C_2, \ldots, C_n$ que lorsque les lettres $C_1, C_2, \ldots, C_n$ étaient constantes. En effet, après avoir remplacé, dans l'équation (1), $C_{p+1}, C_{p+2}, \ldots, C_n$ par leurs valeurs, si on la différentie pour obtenir $\frac{du}{dx_1}$, il faudra avoir égard à ce que les lettres $C_1, C_2, \ldots, C_n$ ne désignent plus des constantes, mais des fonctions de $C_{p+1}, C_{p+2}, \ldots, C_n$, qui elles-mêmes contiennent $x_1, x_2, \ldots, x_n$,. L'équation obtenue par la différentiation par rapport à x_1 sera alors

$$\frac{dF}{dx_1} + \frac{dF}{du}\frac{du}{dx_1} + \frac{dF}{dC_{p+1}}\frac{dC_{p+1}}{dx_1} + \ldots + \frac{dF}{dC_n}\frac{dC_n}{dx_1} = 0,$$

mais, par hypothèse, les expressions de $C_{p+1}, C_{p+2}, \ldots, C_n$ donnent identiquement

$$\frac{dF}{dC_{p+1}} = 0, \quad \frac{dF}{dC_{p+2}} = 0, \ldots, \quad \frac{dF}{dC_n} = 0,$$

et l'équation se réduit à

$$\frac{dF}{dx_1} + \frac{dF}{du}\frac{du}{dx_1} = 0,$$

absolument la même que lorsque C_1, C_2,..., C_n représentaient des constantes.

D'après cela, les relations entre u, x_1, x_2,..., x_n, $\frac{du}{dx_1}$, $\frac{du}{dx_2}$,..., $\frac{du}{dx_n}$, C_1, C_2,..., C_n, sont les mêmes que lorsque C_1, C_2,..., C_n étaient constants, et par suite, quoique C_1, C_2,..., C_p soient devenus des fonctions de C_{p+1}, C_{p+2},..., C_n, et que ces dernières quantités soient elles-mêmes des fonctions de x_1, x_2,..., x_n, on pourra les éliminer absolument de même dans les deux cas, car le résultat d'une élimination ne dépend pas de la signification de la lettre éliminée. On aura donc toujours la même relation entre la fonction u, les variables dont elle dépend, et ses dérivées par rapport à ces variables.

On donnera au résultat le plus grand degré de généralité possible, en supposant le nombre arbitraire p égal à $n-1$.

Soit, par exemple, une fonction de trois variables

$$u = C_1 x_1 + C_2 x_2 + C_3 x_3 ; \tag{1}$$

on trouve, en éliminant les constantes entre cette équation et ses dérivées par rapport à x_1, x_2 et x_3,

$$x_1 \frac{du}{dx_1} + x_2 \frac{du}{dx_2} + x_3 \frac{du}{dx_3} = u. \tag{2}$$

Soient

$$C_2 = \varphi(C_1), \quad C_3 = \psi(C_1);$$

si on élimine C_1 entre les équations

$$\begin{aligned} u &= C_1 x_1 + x_2 \varphi(C_1) + x_3 \psi(C_1), \\ 0 &= x_1 + x_2 \varphi'(C_1) + x_3 \psi'(C_1), \end{aligned} \tag{3}$$

on obtiendra une équation entre x_1, x_2, x_3 et u contenant deux fonctions arbitraires φ et ψ, et telle que la fonction u que l'on en déduit satisfasse à l'équation (2).

Quelles que soient les fonctions φ et ψ, on tirera de (3)

$$C_1 = F\left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}\right),$$

et, par suite, u est une fonction homogène du premier degré de la forme

$$u = x_1 F\left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}\right);$$

on vérifie aisément que cette fonction satisfait à l'équation (2).

Élimination des fonctions arbitraires.

197. Les résultats précédents conduisent à penser que la différentiation permet non-seulement d'éliminer des constantes, mais encore de faire disparaître des fonctions arbitraires d'une équation qui en renferme. Nous allons prouver qu'en effet il en est ainsi, et présenter quelques remarques relatives à cette élimination.

Et d'abord il ne peut être question ici des fonctions d'une seule variable. La présence d'une fonction arbitraire dans l'équation qui définit une telle fonction la rendrait elle-même entièrement arbitraire, et il n'y aurait pas lieu par conséquent d'en faire l'objet d'une étude spéciale.

Considérons le cas où une fonction z dépend de deux variables indépendantes x et y. Les fonctions arbitraires renfermées dans l'équation qui lie x, y et z peuvent être de deux sortes. L'équation considérée peut renfermer, sous le signe d'une fonction arbitraire, une fonction donnée en x, y et z. C'est ce qui arrive, par exemple, dans l'équation

$$x + y + z = \varphi(x^2 + y^2 + z^2),$$

où φ désigne une fonction arbitraire de la somme $x^2 + y^2 + z^2$. Dans d'autres cas, l'équation contient une ou plusieurs fonctions arbitraires de quantités dont l'expression en x, y, z varie avec la forme même des fonctions, parce qu'elles sont définies par d'autres équations où figurent les mêmes fonctions avec leurs dérivées. Ce second cas se présente dans le système

$$z = (x + \alpha)[y + \varphi(\alpha)],$$
$$x + \varphi(\alpha) + (y + \alpha)\varphi'(\alpha) = 0;$$

l'élimination de α donnera, entre x, y et z, une relation qui dépend évidemment de la forme choisie pour la fonction arbitraire $\varphi(\alpha)$, mais α ne peut être exprimé en fonction de x, y et z que si l'on se donne cette fonction φ. Si, par exemple, on suppose $\varphi(\alpha) = \alpha$, on trouve

$$\alpha = -\frac{x + y}{2},$$

et en prenant $\varphi(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$, on en déduit

$$\alpha = \sqrt{\frac{y}{x}};$$

la fonction φ porte donc, dans les deux cas, sur des expressions très-différentes.

Il est clair que si l'équation qui lie z à x et à y contient n fonctions arbitraires

$\varphi_1(\alpha_1)$, $\varphi_2(\alpha_2)$,..., $\varphi_n(\alpha_n)$, il faudra, pour qu'on puisse les éliminer, avoir, en même temps, n autres équations renfermant les mêmes fonctions qui pourront y être mêlées à leurs dérivées et aux variables α_1, α_2,..., α_n elles-mêmes.

Par exemple, les trois équations

$$z = \varphi(\alpha)\psi'(\beta) + \psi(\beta)\varphi'(\alpha),$$
$$x = \varphi(\alpha) + \psi(\beta),$$
$$y = \varphi'(\alpha) + \psi'(\beta),$$

établissent, entre x, y et z, une relation qui dépend de la forme choisie pour chacune des deux fonctions désignées par φ et ψ.

198. Considérons d'abord le cas le plus simple, celui où la fonction arbitraire porte sur une fonction donnée de x, y et z et où l'équation donnée est de la forme

$$v = \varphi(u), \tag{1}$$

v et u étant des fonctions données de x, y et z, et φ une fonction arbitraire.

En prenant la dérivée de l'équation (1) par rapport à x, puis par rapport à y, on a

$$\frac{dv}{dx} + \frac{dv}{dz}\frac{dz}{dx} = \varphi'(u)\left(\frac{du}{dx} + \frac{du}{dz}\frac{dz}{dx}\right),$$
$$\frac{dv}{dy} + \frac{dv}{dz}\frac{dz}{dx} = \varphi'(u)\left(\frac{du}{dy} + \frac{du}{dz}\frac{dz}{dy}\right),$$

et en divisant ces deux équations membre à membre

$$\frac{\dfrac{dv}{dx} + \dfrac{dv}{dz}\dfrac{dz}{dx}}{\dfrac{dv}{dy} + \dfrac{dv}{dz}\dfrac{dz}{dy}} = \frac{\dfrac{du}{dx} + \dfrac{du}{dz}\dfrac{dz}{dx}}{\dfrac{du}{dy} + \dfrac{du}{dz}\dfrac{dz}{dy}},$$

c'est-à-dire

$$\frac{dz}{dx}\left(\frac{du}{dy}\frac{dv}{dz} - \frac{du}{dz}\frac{dv}{dy}\right) + \frac{dz}{dy}\left(\frac{dv}{dx}\frac{du}{dz} - \frac{dv}{dz}\frac{du}{dx}\right) = \frac{du}{dx}\frac{dv}{dy} - \frac{du}{dy}\frac{dv}{dx}.$$

On voit que, quelles que soient les fonctions u et v, cette équation contient les dérivées partielles $\dfrac{dz}{dx}$ et $\dfrac{dz}{dy}$ au premier degré.

199. Considérons, en second lieu, le cas plus général où la fonction z est définie par un système de $k+1$ équations entre x, y, z, et k fonctions arbitraires qui doivent être éliminées ainsi que les variables dont elles dépendent.

Soient $\varphi_1(\alpha_1)$, $\varphi_2(\alpha_2)$,..., $\varphi_k(\alpha_k)$ ces k fonctions arbitraires qui peuvent figurer

ainsi que leurs dérivées, dans les $k+1$ équations données; on commencera par calculer les dérivées partielles $\frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}, \frac{d^2z}{dx^2}, \frac{d^2z}{dx\,dy}, \frac{d^2z}{dy^2}, \dots$, en fonction de x, y, z, et des fonctions $\varphi_1(\alpha_1)$, $\varphi_2(\alpha_2), \dots, \varphi_k(\alpha_k)$ et de leurs dérivées. Pour cela, on différentiera d'abord toutes les équations par rapport à x, puis par rapport à y, et l'on formera ainsi $2(k+1)$ équations nouvelles, contenant, avec $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$, les dérivées par rapport à x et par rapport à y de $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$. On pourra donc éliminer ces dérivées, et calculer $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$. Les dérivées du second ordre des $k+1$ équations proposées sont au nombre de $3(k+1)$; elles contiennent, outre $\frac{d^2z}{dx^2}, \frac{d^2z}{dy^2}, \frac{d^2z}{dx\,dy}$, les dérivées du premier et du second ordre de $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$. Si l'on y remplace les dérivées du premier ordre, $\frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}, \frac{d\alpha_1}{dx}, \frac{d\alpha_1}{dy}, \dots$, par leurs valeurs déduites des équations précédentes, et que l'on élimine ensuite les $3k$ dérivées du second ordre $\frac{d^2\alpha_1}{dx^2}, \frac{d^2\alpha_1}{dx\,dy}, \frac{d^2\alpha_1}{dy^2}, \dots$, il restera trois équations, desquelles on pourra déduire $\frac{d^2z}{dx^2}, \frac{d^2z}{dx\,dy}$ et $\frac{d^2z}{dy^2}$. En continuant à opérer de même, on pourra déterminer les dérivées de z de tel ordre que l'on voudra. Leurs expressions contiendront, avec x, y, z, les fonctions $\varphi_1(\alpha_1)$, $\varphi_2(\alpha_2), \dots, \varphi_k(\alpha_k)$, et les dérivées de ces diverses fonctions que la différentiation aura introduites. Il est clair, en effet, que si une équation contient la fonction $\varphi(\alpha)$, la dérivée de cette équation, par rapport à l'une ou l'autre des variables indépendantes x et y, contiendra $\varphi'(\alpha)$; une seconde différentiation introduira $\varphi''(\alpha)$, et ainsi de suite. Les dérivées de z, calculées comme il a été dit, jusqu'à celles d'ordre n inclusivement, contiendront donc, dans leur expression, les k fonctions $\varphi_1(\alpha_1)$, $\varphi_2(\alpha_2), \dots, \varphi_k(\alpha_k)$ et leurs dérivées d'ordre inférieur à $n+1$, ce qui fait en tout $(n+1)k$ fonctions que l'on doit éliminer pour obtenir la relation cherchée entre z et ses dérivées. Mais en réunissant z à ses dérivées, jusqu'à celles d'ordre n, le nombre total de ces fonctions est $\frac{n.n+1}{2}$, et, quel que soit k, on peut choisir n assez grand pour que l'on ait

$$\frac{n.n+1}{2} > (n+1)k.$$

Le nombre des équations surpassant alors celui des quantités à éliminer, l'élimination sera toujours possible.

200. Lorsqu'une fonction $\varphi(\alpha)$ figure dans une équation, la dérivée de cette équation par rapport à x ou par rapport à y contient toujours $\varphi'(\alpha)$. Il résulte de là que, en général, chaque dérivée de z contiendra une dérivée de la fonction φ qui ne figure pas dans l'expression des dérivées d'ordre inférieur. Mais dans cer-

tains cas exceptionnels cette fonction nouvelle introduite par la différentiation disparaît dans les éliminations et ne figure plus dans le résultat final.

Soient, par exemple, les équations

$$z = \frac{[y - \varphi(\alpha)]^2}{\varphi'(\alpha)},$$

$$x + \alpha = \frac{y - \varphi(\alpha)}{\varphi'(\alpha)}.$$

On déduit de ces équations, en les différentiant par rapport à x, puis par rapport à y,

$$\frac{dz}{dx} = \frac{-2[y-\varphi(\alpha)]\varphi'(\alpha)^2 - \varphi''(\alpha)[y-\varphi(\alpha)]^2}{\varphi'(\alpha)^2}\frac{d\alpha}{dx},$$

$$\frac{dz}{dy} = \frac{2[y-\varphi(\alpha)]\left[1-\varphi'(\alpha)\frac{d\alpha}{dy}\right]\varphi'(\alpha) - [y-\varphi(\alpha)]^2\varphi''(\alpha)\frac{d\alpha}{dy}}{\varphi'(\alpha)^2},$$

$$1 + \frac{d\alpha}{dx} = \frac{-\varphi'(\alpha)^2\frac{d\alpha}{dx} - \varphi''(\alpha)[y-\varphi(\alpha)]\frac{d\alpha}{dx}}{\varphi'(\alpha)^2},$$

$$\frac{d\alpha}{dy} = \frac{\left[1-\varphi'(\alpha)\frac{d\alpha}{dy}\right]\varphi'(\alpha) - \varphi''(\alpha)\frac{d\alpha}{dy}[y-\varphi(\alpha)]}{\varphi'(\alpha)^2}.$$

On déduit des deux dernières

$$\frac{d\alpha}{dx} = \frac{\varphi'(\alpha)^2}{-2\varphi'(\alpha)^2 - [y-\varphi(\alpha)]\varphi''(\alpha)},$$

$$\frac{d\alpha}{dy} = \frac{\varphi'(\alpha)}{2\varphi'(\alpha)^2 + [y-\varphi(\alpha)]\varphi''(\alpha)},$$

et, en substituant dans les deux autres,

$$\frac{dz}{dx} = y - \varphi(\alpha),$$

$$\frac{dz}{dy} = \frac{y-\varphi(\alpha)}{\varphi'(\alpha)}.$$

La dérivée $\varphi''(\alpha)$ figure donc dans les équations qui servent à déterminer les dérivées du premier ordre $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$, et disparaît cependant de leur expression finale.

201. Il est important de distinguer, comme nous venons de le faire, le cas particulier où le calcul des dérivées de z n'introduit pas de dérivées nouvelles des fonc-

tions arbitraires contenues dans les équations données. Pour faire comprendre quelles conséquences cette circonstance peut entraîner dans la théorie qui nous occupe, nous démontrerons le théorème suivant :

La fonction z étant définie par deux équations de la forme

$$(1)\qquad \begin{aligned} y &= F_1[x, \alpha, \varphi(\alpha), \varphi'(\alpha)], \\ z &= F_2[x, \alpha, \varphi(\alpha), \varphi'(\alpha)], \end{aligned}$$

où F_1 et F_2 sont des fonctions données et $\varphi(\alpha)$ une fonction arbitraire, si l'élimination de la fonction $\varphi(\alpha)$ est possible entre les dérivées du premier ordre $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$, l'équation entre x, y, z, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$ à laquelle elle conduit, est du premier degré par rapport à $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$, toutes les fois que les dérivées $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$ contiennent dans leur expression la fonction $\varphi''(\alpha)$.

Posons, pour simplifier, $\frac{dz}{dx} = p$, $\frac{dz}{dy} = q$, en ayant soin de bien distinguer la dérivée p de la dérivée partielle $\frac{dF_2}{dx}$, dans laquelle α est traité comme une constante, tandis que dans le calcul de p c'est y qui est regardé comme invariable.

Les équations (1), différentiées par rapport à x, y étant regardé comme constant, donnent

$$(2)\qquad \begin{aligned} 0 &= \frac{dF_1}{dx} + \frac{dF_1}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dx}, \\ p &= \frac{dF_2}{dx} + \frac{dF_2}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dx}, \end{aligned}$$

$\frac{dF_1}{d\alpha}$ et $\frac{dF_2}{d\alpha}$ représentant les dérivées de F_1 et F_2 par rapport à la lettre α considérée comme variable partout où elle figure dans leur expression, c'est-à-dire aussi bien sous les signes $\varphi(\alpha)$ et $\varphi'(\alpha)$ que dans les termes où elle est engagée seule.

En égalant les valeurs de la dérivée partielle $\frac{d\alpha}{dx}$ déduites des équations (2), on a

$$p = \frac{dF_2}{dx} - \frac{dF_2}{d\alpha}\cdot\frac{\frac{dF_1}{dx}}{\frac{dF_1}{d\alpha}},$$

en différentiant les équations (1) par rapport à y en laissant x constant, nous aurons

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{dF_1}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dy}, \\ q &= \frac{dF_2}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dy}, \end{aligned}$$

et par suite

$$q = \frac{\frac{dF_2}{d\alpha}}{\frac{dF_1}{d\alpha}}.$$

En général, ces expressions de p et de q contiendront $\varphi''(\alpha)$, car cette dérivée figure *nécessairement* dans $\frac{dF_1}{d\alpha}$ et dans $\frac{dF_2}{d\alpha}$: elle ne peut disparaître qu'en se trouvant accidentellement dans un facteur commun à ces deux dérivées. Or si cela n'a pas lieu, on ne peut éliminer $\varphi''(\alpha)$ qu'en éliminant la fraction $\frac{\frac{dF_2}{d\alpha}}{\frac{dF_1}{d\alpha}}$, qui est seule à contenir cette dérivée, et le résultat de cette élimination est nécessairement

$$p = \frac{dF_2}{dx} - \frac{dF_1}{dx} \cdot q.$$

S'il existe une relation entre x, y, z, p, q, c'est qu'il sera possible d'éliminer ensuite, α, $\varphi(\alpha)$ et $\varphi'(\alpha)$ entre cette équation et les deux proposées qui ne contiennent ni p ni q, en sorte que le résultat sera nécessairement linéaire par rapport à p et à q.

Les équations

$$z = \frac{[y - \varphi(\alpha)]^2}{\varphi'(\alpha)},$$

$$x + \alpha = \frac{y - \varphi(\alpha)}{\varphi'(\alpha)},$$

conduisent à la relation

$$z = pq,$$

qui n'est pas linéaire en p et q. Il arrive en effet, comme l'exige le théorème précédent, que les dérivées $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$ que l'on en déduit ne contiennent pas $\varphi''(\alpha)$.

Équations aux dérivées partielles des diverses classes de surfaces.

202. Nous allons considérer successivement les grandes classes de surfaces étudiées par les géomètres. L'application des méthodes auxquelles ce chapitre est consacré permet d'éliminer les fonctions arbitraires qui figurent dans leur équation générale et d'obtenir ainsi l'équation différentielle qui caractérise chaque classe.

Surfaces cylindriques. — Une surface cylindrique est engendrée par une droite qui

se meut en restant parallèle à une droite fixe. Soient

$$\begin{aligned} x &= az + \alpha, \\ y &= bz + \beta, \end{aligned} \tag{1}$$

les équations de la droite mobile. a et b sont deux constantes et α, β deux variables liées par une équation, car, sans cela, la droite pourrait passer par tous les points de l'espace, et la loi de son mouvement ne serait pas définie.

Supposons donc que l'on ait

$$\beta = \varphi(\alpha); \tag{2}$$

la fonction φ est d'ailleurs complétement arbitraire, et sa forme particulière distingue les unes des autres les diverses surfaces cylindriques. Si l'on élimine α et β entre les équations (1) et (2), on obtient

$$y - bz = \varphi(x - az); \tag{3}$$

c'est l'équation générale des surfaces cylindriques.

En différentiant cette équation par rapport à x, puis par rapport à y, on a

$$\begin{aligned} -b\frac{dz}{dx} &= \varphi'(x - az)\left(1 - a\frac{dz}{dx}\right), \\ 1 - b\frac{dz}{dy} &= -a\varphi'(x - az)\frac{dz}{dy}, \end{aligned}$$

et en éliminant la fonction arbitraire $\varphi'(x - az)$, on a, après une réduction évidente,

$$a\frac{dz}{dx} + b\frac{dz}{dy} = 1, \tag{4}$$

c'est l'équation différentielle de toutes les surfaces cylindriques dont les génératrices sont parallèles à la droite donnée. Elle exprime, comme on s'en assure bien facilement, que le plan tangent en chaque point est parallèle à cette droite.

Si l'on voulait éliminer a et b et obtenir une propriété commune à toutes les surfaces cylindriques et indépendante de la direction des génératrices, il faudrait différentier l'équation (4) par rapport à x, puis par rapport à y, et l'on obtiendrait

$$a\frac{d^2z}{dx^2} + b\frac{d^2z}{dx\,dy} = 0, \qquad a\frac{d^2z}{dx\,dy} + b\frac{d^2z}{dy^2} = 0,$$

et par conséquent

$$\left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right)^2 = \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right);$$

cette équation convient à toutes les surfaces cylindriques, mais elle convient aussi, comme nous le verrons, à une infinité d'autres.

203. *Surfaces coniques.* — Une surface conique est une surface engendrée par une

droite mobile qui passe par un point fixe. α, β, γ étant les coordonnées de ce point, les équations de la droite mobile sont de la forme

$$\begin{aligned} x-\alpha &= m(z-\gamma), \\ y-\beta &= n(z-\gamma); \end{aligned} \tag{1}$$

les coefficients m et n sont liés par une équation, car, sans cela, la droite pourrait passer par tous les points de l'espace et la loi de son mouvement ne serait pas définie. Supposons donc que l'on ait

$$m = \varphi(n); \tag{2}$$

la fonction φ est d'ailleurs arbitraire et sa forme distingue les unes des autres les surfaces coniques. En éliminant m et n entre les équations (1) et (2), on a l'équation générale des surfaces coniques

$$\frac{x-\alpha}{z-\gamma} = \varphi\left(\frac{y-\beta}{z-\gamma}\right); \tag{3}$$

en différentiant cette équation par rapport à x, puis par rapport à y, on a

$$\frac{(z-\gamma)-\dfrac{dz}{dx}(x-\alpha)}{(z-\gamma)^2} = -\varphi'\left(\frac{y-\beta}{z-\gamma}\right)\frac{dz}{dx}\cdot\frac{y-\beta}{(z-\gamma)^2},$$

$$\frac{-(x-\alpha)\dfrac{dz}{dy}}{(z-\gamma)^2} = \varphi'\left(\frac{y-\beta}{z-\gamma}\right)\frac{(z-\gamma)-\dfrac{dz}{dy}(y-\beta)}{(z-\gamma)^2};$$

en éliminant $\varphi'\left(\dfrac{x-\alpha}{z-\gamma}\right)$, on trouve, après des réductions évidentes,

$$(x-\alpha)\frac{dz}{dx} + (y-\beta)\frac{dz}{dy} = (z-\gamma); \tag{4}$$

c'est l'équation aux dérivées partielles des surfaces coniques dont le sommet a pour coordonnées α, β, γ; elle exprime, comme on s'en assure bien facilement, que les plans tangents passent tous par le sommet du cône.

Si l'on veut éliminer α, β, γ et obtenir une propriété commune à toutes les surfaces coniques et indépendante de la position du sommet, il faut différentier l'équation (4) par rapport à x, puis par rapport à y; on a ainsi

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dx} + (y-\beta)\frac{d^2z}{dy\,dx} + (x-\alpha)\frac{d^2z}{dx^2},$$

$$\frac{dz}{dy} = \frac{dz}{dy} + (x-\alpha)\frac{d^2z}{dx\,dy} + (y-\beta)\frac{d^2z}{dy^2}.$$

En supprimant les termes communs et éliminant le rapport $\frac{\gamma-\beta}{x-z}$, on déduit de ces équations

$$\left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right)^2=\frac{d^2z}{dx^2}\cdot\frac{d^2z}{dy^2};$$

c'est l'équation déjà trouvée pour les surfaces cylindriques.

204. *Surfaces de révolution.* — Les surfaces de révolution sont engendrées par une ligne qui tourne, sans changer de forme, autour d'une droite fixe, de telle sorte que chacun de ses points décrive un cercle ayant son plan perpendiculaire à cette droite et son centre situé sur elle.

Soient

$$x=az+p,\quad y=bz+q,$$

les équations de la droite fixe qui sert d'axe à la surface. L'un quelconque des cercles peut être considéré comme l'intersection d'une sphère ayant son centre en un point arbitraire de la droite (par exemple, en celui dont les coordonnées sont $x=m$, $y=n$, $z=0$), avec un plan perpendiculaire à la droite. Les équations de ce cercle sont donc de la forme

$$\left.\begin{aligned}(x-m)^2+(y-n)^2+z^2&=R^2,\\ ax+by+z&=k;\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

il existe d'ailleurs une équation entre k et R, sans quoi le cercle pourrait passer par un point quelconque de l'espace, et il n'y aurait pas de surface engendrée. Supposons donc

$$k=\varphi(R^2);\qquad(2)$$

l'élimination de k et de R entre les équations (1) et (2) donne

$$ax+by+z=\varphi[(x-m)^2+(y-n)^2+z^2];\qquad(3)$$

c'est l'équation générale des surfaces de révolution.

En différentiant cette équation par rapport à x, puis par rapport à y, on obtient

$$a+\frac{dz}{dx}=2\varphi'[(x-m)^2+(y-n)^2+z^2]\left[(x-m)+z\frac{dz}{dx}\right],$$

$$b+\frac{dz}{dy}=2\varphi'[(x-m)^2+(y-n)^2+z^2]\left[(y-n)+z\frac{dz}{dy}\right],$$

et en éliminant φ', il vient, après des réductions évidentes,

$$a(y-n)-b(x-m)+(y-n-bz)\frac{dz}{dx}+(az-x+m)\frac{dz}{dy}=0,$$

c'est l'équation différentielle des surfaces de révolution; elle exprime que la normale rencontre l'axe. Si l'on suppose l'axe de la surface confondu avec l'axe des z, on a

$$a=0, \quad b=0, \quad m=0, \quad n=0,$$

et l'équation différentielle devient

$$y\frac{dz}{dx}-x\frac{dz}{dy}=0;$$

l'équation sous forme finie est, dans ce cas,

$$z=\varphi(x^2+y^2).$$

205. *Surfaces conoïdes.* — Une surface conoïde est la surface engendrée par une droite qui rencontre une droite donnée, et reste parallèle à un plan fixe.

Prenons pour plan des XY, celui auquel la génératrice doit rester parallèle, et soient $x=mz$, $y=nz$ les équations de la droite qu'elle rencontre. La génératrice aura des équations de la forme

$$z=\gamma, \quad y=\alpha x+\beta;$$

pour qu'elle rencontre la directrice, on doit avoir

$$n\gamma=\alpha m\gamma+\beta,$$

en sorte que les équations de la génératrice sont de la forme

$$z=\gamma, \quad y-n\gamma=\alpha(x-m\gamma); \tag{1}$$

pour que le mouvement soit défini, il faut qu'il existe une équation entre α et γ, soit

$$\gamma=\varphi(\alpha); \tag{2}$$

en éliminant α et γ entre les équations (1), (2), on aura l'équation générale des conoïdes

$$z=\varphi\left(\frac{y-nz}{x-mz}\right), \tag{3}$$

en différentiant par rapport à x, puis par rapport à y, on obtient

$$\frac{dz}{dx}=\frac{-n\dfrac{dz}{dx}(x-mz)-(y-nz)\left(1-m\dfrac{dz}{dx}\right)}{(x-mz)^2}\varphi'\left(\frac{y-nz}{x-mz}\right),$$

$$\frac{dz}{dy}=\frac{\left(1-n\dfrac{dz}{dy}\right)(x-mz)+m\dfrac{dz}{dy}(y-nz)}{(x-mz)^2}\varphi'\left(\frac{y-nz}{x-mz}\right),$$

et en éliminant φ', on trouve, après des réductions évidentes,

$$(x-mz)\frac{dz}{dx}+(y-nz)\frac{dz}{dy}=0;$$

c'est l'équation différentielle des conoïdes. Si l'on suppose que la directrice soit l'axe des z, on a $m=0$, $n=0$; l'équation sous forme finie devient

$$z=\varphi\left(\frac{y}{x}\right),$$

et l'équation différentielle

$$x\frac{dz}{dx}+y\frac{dz}{dy}=0.$$

206. Les équations différentielles des surfaces considérées jusqu'ici sont du premier ordre; celles qu'il nous reste à étudier ont des équations différentielles du second ou du troisième ordre; pour les écrire plus simplement, nous adopterons la notation suivante, qui est très-habituellement employée dans les questions relatives à la théorie des surfaces.

L'équation d'une surface étant

$$z=\varphi(x,y),$$

nous poserons

$$\frac{dz}{dx}=p,\quad \frac{dz}{dy}=q,\quad \frac{d^2z}{dx^2}=r,\quad \frac{d^2z}{dx\,dy}=s,\quad \frac{d^2z}{dy^2}=t,$$

et par conséquent

$$dz=p\,dx+q\,dy,$$
$$d^2z=r\,dx^2+2s\,dx\,dy+t\,dy^2,$$
$$\frac{dp}{dx}=r,\quad \frac{dp}{dy}=\frac{dq}{dx}=s,\quad \frac{dq}{dy}=t.$$

207. *Surface engendrée par une droite qui rencontre une droite fixe.*

Prenons la droite fixe pour axe des z; les équations de la génératrice sont de la forme

$$y=\gamma x,\quad z=ax+b.$$

Pour que cette droite engendre une surface déterminée, il faut que a et b soient des fonctions données de γ; en posant

$$a=\varphi(\gamma),\quad b=\psi(\gamma),$$

les équations de la génératrice sont

$$y=\gamma x,\quad z=x\varphi(\gamma)+\psi(\gamma), \tag{1}$$

et l'élimination de γ donne

$$z=x\varphi\left(\frac{y}{x}\right)+\psi\left(\frac{y}{x}\right), \tag{2}$$

c'est l'équation générale des surfaces considérées; elle contient deux fonctions arbitraires. Pour éliminer les fonctions φ et ψ, on pourrait, conformément à la méthode exposée, former les dérivées de l'équation (2) par rapport à x et par rapport à y; mais il est plus simple et plus élégant de différentier les équations (1) en y considérant x et y comme variables et γ comme constant. Cela revient à considérer sur la surface deux points infiniment voisins situés sur une même génératrice; on obtient ainsi

$$dy = \gamma\, dx, \quad dz = \varphi(\gamma)\, dx. \tag{3}$$

Remplaçons, dans cette dernière équation, dz par $p\,dx + q\,dy$, puis divisons par dx, en remarquant que, d'après les équations (3), on a $\frac{dy}{dx} = \gamma = \frac{y}{x}$, on aura

$$p + q\frac{y}{x} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right). \tag{4}$$

Pour que les deux fonctions $p + q\frac{y}{x}$ et $\frac{y}{x}$ dépendent l'une de l'autre, il faut et il suffit (73) que leur déterminant soit nul, c'est-à-dire, puisqu'il s'agit ici de deux fonctions de deux variables, que leurs dérivées soient proportionnelles; l'équation (4) équivaut donc à

$$\frac{\dfrac{d.\left(p + q\frac{y}{x}\right)}{dx}}{\dfrac{d.\left(p + q\frac{y}{x}\right)}{dy}} = \frac{\dfrac{d.\left(\frac{y}{x}\right)}{dx}}{\dfrac{d.\left(\frac{y}{x}\right)}{dy}},$$

c'est-à-dire

$$\frac{r + s\frac{y}{x} - q\frac{y}{x^2}}{s + t\frac{y}{x} + \frac{q}{x}} = -\frac{y}{x},$$

ou, en réduisant,

$$ty^2 + 2sxy + rx^2 = 0;$$

c'est l'équation différentielle des surfaces considérées: r, s, t, y désignent les dérivées du second ordre définies plus haut.

208. *Surfaces gauches à plan directeur.* — On nomme surface gauche à plan directeur, la surface engendrée par une droite qui reste parallèle à un plan fixe.

Prenons pour plan des xy le plan fixe que l'on nomme *plan directeur;* les équations de la génératrice sont de la forme

$$z = \gamma, \quad y = \alpha x + \beta,$$

α et β étant des fonctions de γ dont la forme détermine la surface particulière. On peut donc poser

$$\alpha = \varphi(\gamma), \quad \beta = \psi(\gamma),$$

et l'on voit que l'équation générale des surfaces gauches à plans directeurs est

$$y = x\varphi(z) + \psi(z); \tag{1}$$

différentions cette équation en y laissant z constant, nous aurons

$$dy = dx\,\varphi'(z), \tag{2}$$

d'ailleurs z étant constant, on a

$$0 = p\,dx + q\,dy,$$

et par suite

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{p}{q},$$

ce qui met l'équation (2) sous la forme

$$p + q\varphi'(z) = 0.$$

D'après cette équation, le rapport $\frac{p}{q}$ est fonction de z; il est nécessaire et suffisant pour cela, comme nous venons de le rappeler, que leurs dérivées soient proportionnelles : on a donc

$$\frac{\dfrac{d.\frac{p}{q}}{dx}}{\dfrac{d.\frac{p}{q}}{dy}} = \frac{\dfrac{dz}{dx}}{\dfrac{dz}{dy}},$$

c'est-à-dire

$$\frac{qr - sp}{sq - tp} = \frac{p}{q},$$

ou, en chassant les dénominateurs,

$$rq^2 - 2pqs + tp^2 = 0;$$

c'est l'équation différentielle des surfaces gauches à plan directeur.

209. *Surfaces développables.* — Nous définirons les surfaces développables comme l'enveloppe des positions d'un plan mobile. Nous avons déjà trouvé (**112**) que l'équation d'une telle surface s'obtient en éliminant α entre deux équations de la forme suivante :

$$z = x\varphi(\alpha) + y\psi(\alpha) + \mathrm{F}(\alpha), \tag{1}$$

$$0 = x\varphi'(\alpha) + y\psi'(\alpha) + \mathrm{F}'(\alpha). \tag{2}$$

Pour éliminer les fonctions arbitraires, différentions la première par rapport à x, elle fournira, en ayant égard à la seconde,

$$\frac{dz}{dx} = \varphi(\alpha); \tag{3}$$

en différentiant la même équation par rapport à y, on trouve, en ayant égard à la relation (2),

$$\frac{dz}{dy} = \psi(\alpha), \tag{4}$$

$\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$ étant fonctions d'une même variable α, on peut éliminer α entre les deux équations (3) et (4), et l'on obtiendra une relation de la forme

$$\frac{dz}{dx} = \mathrm{F}\left(\frac{dz}{dy}\right),$$

c'est-à-dire, d'après notre notation habituelle,

$$p = \mathrm{F}(q). \tag{5}$$

Pour éliminer la fonction F, différentions l'équation (5) par rapport à x, puis par rapport à y, nous aurons

$$r = \mathrm{F}'(q)\, s,$$
$$s = \mathrm{F}'(q)\, t,$$

et par suite

$$rt = s^2;$$

c'est l'équation aux dérivées partielles des surfaces développables.

210. Toute surface développable est le lieu des tangentes à une courbe que l'on nomme son arête de rebroussement. En prenant cette propriété comme définition, on peut être conduit à la même équation différentielle.

La tangente à une courbe quelconque a en effet pour équations

$$\begin{aligned} v - z &= \frac{dz}{dx}(t - x), \\ u - y &= \frac{dy}{dx}(t - x), \end{aligned} \tag{1}$$

z et y étant des fonctions de x définies par les équations de la courbe. La lettre x désignant ici un paramètre, remplaçons-la par α, et pour suivre l'analogie avec les problèmes précédents, remplaçons t, u, v, qui sont les coordonnées d'un point de la surface, par x, y, z, et z et y par $\varphi(\alpha)$ et $\psi(\alpha)$; nous aurons

$$\begin{aligned} z - \varphi(\alpha) &= \varphi'(\alpha)(x - \alpha), \\ y - \psi(\alpha) &= \psi'(\alpha)(x - \alpha), \end{aligned} \tag{2}$$

entre lesquelles il faut éliminer α et les fonctions arbitraires φ et ψ.

En différentiant les deux équations (2) par rapport à x, on trouve

$$\frac{dz}{dx} - \varphi'(\alpha)\frac{d\alpha}{dx} = \varphi'(\alpha)\left(1 - \frac{d\alpha}{dx}\right) + \varphi''(\alpha)(x-\alpha)\frac{d\alpha}{dx},$$

$$-\psi'(\alpha)\frac{d\alpha}{dx} = \psi'(\alpha)\left(1 - \frac{d\alpha}{dx}\right) + \psi''(\alpha)(x-\alpha)\frac{d\alpha}{dx};$$

et en éliminant $\frac{d\alpha}{dx}$ entre ces deux équations,

$$\frac{dz}{dx} = \varphi'(\alpha) - \frac{\varphi''(\alpha)}{\psi''(\alpha)}\psi'(\alpha),$$

en sorte que $\frac{dz}{dx}$ ne dépend que de α. On verra de même que $\frac{dz}{dy}$ ne dépend que de α. On en conclura, comme (**209**), qu'il existe une relation de la forme

$$\frac{dz}{dx} = \mathrm{F}\left(\frac{dz}{dy}\right),$$

de laquelle on déduira, comme on l'a déjà fait,

$$\left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right)^2 = \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right).$$

211. L'équation précédente peut encore s'obtenir par une autre considération. Le plan tangent à une surface développable est le même tout le long d'une génératrice. Cherchons, en général, les conditions pour qu'un même plan tangent à une surface ait une infinité de points de contact.

L'équation du plan tangent au point dont les coordonnées sont x, y, z, est

$$v - z = p(t-x) + q(u-y);$$

si x, y, z changent infiniment peu, pour que le plan reste le même, il faut que $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$ ne changent pas, et que, par conséquent, leurs différentielles soient nulles; on aura donc en même temps

$$0 = \frac{d^2z}{dx^2}dx + \frac{d^2z}{dx\,dy}dy, \qquad 0 = \frac{d^2z}{dx\,dy}dx + \frac{d^2z}{dy^2}dy;$$

et en égalant les deux valeurs de $\frac{dy}{dx}$, il vient

$$\frac{d^2z}{dx^2}\cdot\frac{d^2z}{dy^2} = \left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right)^2. \tag{1}$$

Ainsi donc, si un plan tangent touche une surface suivant une ligne continue, l'équation précédente sera satisfaite en tous les points de cette ligne. Mais si la surface est le lieu d'une série de lignes le long desquelles le plan tangent soit le même, si elle est en un mot l'enveloppe des positions d'un plan mobile, l'équation (1)

devra avoir lieu en un point quelconque de la surface dont elle est par conséquent l'équation différentielle.

L'interprétation géométrique de l'équation (1) est d'ailleurs bien simple ; cette équation peut s'écrire, en effet,

$$\frac{r}{s} = \frac{s}{t},$$

c'est-à-dire

$$\frac{\frac{dp}{dx}}{\frac{dp}{dy}} = \frac{\frac{dq}{dx}}{\frac{dq}{dy}};$$

elle exprime par conséquent que les fonctions p et q ont leurs dérivées proportionnelles, et par suite qu'elles dépendent l'une de l'autre : on a donc une relation de la forme

$$p = \varphi(q).$$

On voit par cette relation entre les deux coefficients de l'équation du plan tangent que, si l'on veut mener à une telle surface un plan tangent parallèle à un plan donné, le problème est généralement impossible.

212. *Surfaces réglées.* — L'équation la plus générale des surfaces engendrées par une droite mobile résulte évidemment de l'élimination du paramètre α entre deux équations de la forme

$$\begin{aligned} z &= x\varphi(\alpha) + \alpha, \\ y &= x\psi(\alpha) + \varpi(\alpha). \end{aligned} \tag{1}$$

Différentions ces deux équations en laissant α constant; nous aurons

$$\begin{aligned} dz &= \varphi(\alpha)\,dx, \\ dy &= \psi(\alpha)\,dx. \end{aligned} \tag{2}$$

Mais on a

$$dz = p\,dx + q\,dy; \tag{3}$$

la première de ces équations devient donc, en divisant par dx et remplaçant $\frac{dy}{dx}$ par sa valeur $\psi(\alpha)$,

$$p + q\psi(\alpha) = \varphi(\alpha); \tag{4}$$

différentions de nouveau en laissant encore α constant, nous aurons

$$dp + dq\psi(\alpha) = 0, \tag{5}$$

c'est-à-dire

$$r\,dx + s\,dy + \psi(\alpha)(s\,dx + t\,dy) = 0, \tag{6}$$

ou, en divisant par dx et remplaçant $\frac{dy}{dx}$ par sa valeur,

$$r + s\psi(\alpha) + \psi(\alpha)[s + t\psi(\alpha)] = 0; \tag{7}$$

différentions encore une fois en laissant toujours α constant, et remarquons que l'on a

$$dr = \frac{d^3z}{dx^3}\,dx + \frac{d^3z}{dx^2\,dy}\,dy,$$

$$ds = \frac{d^3z}{dx^2\,dy}\,dx + \frac{d^3z}{dx\,dy^2}\,dy,$$

$$dt = \frac{d^3z}{dy^2\,dx}\,dx + \frac{d^3z}{dy^3}\,dy,$$

il viendra

$$\left(\frac{d^3z}{dx^3}\,dx + \frac{d^3z}{dx^2\,dy}\,dy\right) + 2\psi(\alpha)\left(\frac{d^3z}{dx^2\,dy}\,dx + \frac{d^3z}{dx\,dy^2}\,dy\right) + \psi(\alpha)^2\left(\frac{d^3z}{dy^2\,dx}\,dx + \frac{d^3z}{dy^3}\,dy\right) = 0; \tag{8}$$

en remplaçant $\frac{dy}{dx}$ par sa valeur $\psi(\alpha)$ et en éliminant ensuite $\psi(\alpha)$ entre les équations (7) et (8), on obtient l'équation différentielle des surfaces réglées qui est du troisième ordre.

213. *Surfaces canaux.* — On nomme surface canal la surface enveloppe des positions d'une sphère de rayon constant dont le centre parcourt une courbe quelconque. On a vu (**113**) que l'équation d'une telle surface s'obtient en éliminant le paramètre α entre les deux équations

$$(z-\alpha)^2 + [y-\varphi(\alpha)]^2 + [x-\psi(\alpha)]^2 = a^2, \tag{1}$$

$$z - \alpha + [y-\varphi(\alpha)]\,\varphi'(\alpha) + [x-\psi(\alpha)\,\psi'(\alpha) = 0. \tag{2}$$

Pour éliminer les fonctions arbitraires φ et ψ, différentions l'équation (1) par rapport à x en laissant y constant, puis par rapport à y en laissant x constant. Dans ces deux différentiations, les termes provenant de la variation de α disparaîtront à cause de l'équation (2).

Nous obtiendrons ainsi

$$(z-\alpha)\frac{dz}{dx} + x - \psi(\alpha) = 0, \tag{3}$$

$$(z-\alpha)\frac{dz}{dy} + y - \varphi(\alpha) = 0; \tag{4}$$

on en conclut, en remarquant que $\varphi(\alpha)$ est nécessairement une fonction de $\psi(\alpha)$.

$$(z-\alpha)\frac{dz}{dx} + x = \mathrm{F}\left[(z-\alpha)\frac{dz}{dy} + y\right]; \tag{5}$$

F étant une nouvelle fonction arbitraire dont la forme dépend de celle de $\varphi(\alpha)$ et de

celle de $\psi(\alpha)$. Mais les équations (3) et (4), en ayant égard à (1), donnent

$$z-\alpha=\frac{a}{\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}},$$

en sorte que (5) devient

$$(6)\qquad \frac{a\frac{dz}{dx}}{\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}}+x=\mathrm{F}\left[\frac{a\frac{dz}{dy}}{\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}}+y\right].$$

Pour éliminer cette fonction F, il faut différentier l'équation précédente par rapport à x, puis par rapport à y, et l'on trouve, en éliminant F′ entre les deux équations obtenues, et adoptant les notations précédentes,

$$(7)\quad a^2(rt-s^2)+a\sqrt{1+p^2+q^2}[(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t]+(1+p^2+q^2)^2=0.$$

L'équation (6) exprime une propriété géométrique de la surface qui est une conséquence immédiate de la définition; en effet, $x+\frac{ap}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$, $y+\frac{aq}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$, sont les coordonnées du point obtenu en portant sur la normale, à partir de chaque point de la surface, une longueur égale à a. La relation établie entre ces deux coordonnées exprime que le lieu des points ainsi obtenus est une courbe et non une surface, comme cela aurait lieu si l'on faisait une telle construction sur une surface d'autre nature.

Introduction remarquable d'une équation différentielle dans un problème d'arithmétique.

214. Considérons deux nombres quelconques m et n, formons-en deux autres m_1 et n_1 qui soient respectivement la moyenne arithmétique et la moyenne géométrique entre les deux premiers; en d'autres termes, posons

$$m_1=\frac{m+n}{2},$$

$$n_1=\sqrt{mn};$$

opérons sur m_1 et n_1 comme on l'a fait sur m et n, et posons

$$m_2=\frac{m_1+n_1}{2},$$

$$n_2=\sqrt{m_1n_1};$$

en continuant indéfiniment ces opérations, on formera une série de nombres m_3,

n_3, m_4, n_4,..., qui, comme on s'en assure très-aisément, vont sans cesse en se rapprochant; on demande quelle est la limite vers laquelle on est conduit par de telles opérations indéfiniment répétées.

Ce problème curieux a été pour la première fois résolu par Gauss. Tout récemment, M. Borchardt l'a rattaché élégamment à une équation différentielle à l'aide des considérations que nous allons faire connaître.

Soit ω la limite cherchée; ω dépend évidemment de m et de n. Posons donc

$$\omega = f(m, n),$$

il est clair, par la définition de ω, que l'on a aussi

$$\omega = f(m_1, n_1);$$

de plus, si m et n étaient multipliés par un même nombre k, les nombres successivement déduits m_1, n_1, m_2, n_2,..., et par suite ω lui-même, seraient multipliés par k; ω est donc une fonction homogène du premier degré de m et de n, et l'on a par conséquent

$$\omega = mf\left(\frac{n}{m}\right) = m_1 f\left(\frac{n_1}{m_1}\right) \cdots.$$

Posons $\frac{n}{m} = x$, $\frac{n_1}{m_1} = x_1$,..., et désignons la fonction $f\left(\frac{n}{m}\right)$ par $\frac{1}{y}$; $f\left(\frac{n_1}{m_1}\right)$ étant de même désigné par $\frac{1}{y_1}$, on a évidemment

$$y = y_1 \frac{m}{m_1} = \frac{2y_1}{1+x}; \tag{1}$$

x_1 étant lié à x par l'équation

$$x_1 = \frac{2\sqrt{x}}{1+x}, \tag{2}$$

on déduit de l'équation (2)

$$\frac{dx_1}{dx} = \frac{1-x}{(1+x)^2\sqrt{x}} = \frac{(x_1 - x_1^3)(1+x)^2}{2(x-x^3)},$$

et de (1)

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{(1+x)^2} y_1 + \frac{2}{(1+x)} \frac{dy_1}{dx_1} \frac{dx_1}{dx}.$$

Remplaçons $\frac{dx_1}{dx}$ par sa valeur, et chassons le dénominateur $x - x^3$, nous aurons

$$(x-x^3)\frac{dy}{dx} = \frac{2x(x-1)}{1+x} y_1 + (1+x)(x_1 - x_1^3)\frac{dy_1}{dx_1};$$

on en déduit, en prenant les dérivées des deux membres par rapport à x,

$$\frac{d(x-x^3)\frac{dy}{dx}}{dx} = 2y_1 \cdot \frac{d\frac{x(x-1)}{1+x}}{dx} + \frac{2x(x-1)}{1+x}\frac{dy_1}{dx_1}\frac{dx_1}{dx} + (x_1 - x_1^3)\frac{dy_1}{dx_1}$$
$$+ (1+x)\frac{d(x_1-x_1^3)\frac{dy_1}{dx_1}}{dx_1}\cdot\frac{dx_1}{dx}.$$

D'après la valeur de $\frac{dx_1}{dx}$ on voit aisément que les deux termes qui contiennent $\frac{dy_1}{dx_1}$ en facteur se détruisent, et que, en retranchant xy aux deux membres, cette équation peut s'écrire

$$\frac{d.(x-x^3)\frac{dy}{dx}}{dx} - xy = \frac{1-x}{(1+x)\sqrt{x}}\left[\frac{d.(x_1-x_1^3)\frac{dy_1}{dx_1}}{dx_1} - x_1y_1\right].$$

Si, dans cette équation, x se change en x_1, x_1 se changera en x_2, puis x_1 étant remplacé par x_2, x_2 le sera par x_3, et ainsi de suite; si donc on pose

$$\frac{d.(x-x^3)\frac{dy}{dx}}{dx} - xy = \varpi(y),$$

on aura

$$\varpi(y) = \frac{(1-x)}{(1+x)\sqrt{x}}\frac{(1-x_1)}{(1+x_1)\sqrt{x_1}}\frac{(1-x_2)}{(1+x_2)\sqrt{x_2}}\cdots\frac{1-x_n}{(1+x_n)\sqrt{x_n}}\varpi(y_n);$$

or si n grandit sans limite, $1-x_n$ tend évidemment vers zéro; on a donc

$$\varpi(y) = 0,$$

et y satisfait, par conséquent, à l'équation différentielle

$$(x-x^3)\frac{d^2y}{dx^2} + (1-3x^2)\frac{dy}{dx} - xy = 0.$$

Sans pouvoir suivre ici les conséquences de ce résultat, nous avons pensé qu'une analyse aussi remarquable ne serait pas déplacée dans un chapitre consacré à la formation des équations différentielles.

Équations différentielles totales.

215. Les équations différentielles auxquelles satisfont les fonctions de plusieurs variables indépendantes ont lieu entre les fonctions elles-mêmes et leurs dérivées partielles. On est quelquefois conduit à considérer une autre sorte d'équations qui ont lieu entre *les différentielles* des variables indépendantes et celle de la fonction qui en dépend. On a vu (57) que, z étant une fonction de x et de y, il existe une équa-

tion du premier degré entre les différentielles dx, dy, dz dont deux restent arbitraires et déterminent la troisième; une équation de cette forme

$$\text{(1)} \qquad P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0,$$

où P, Q, R sont des fonctions données de x, y, z, se nomme une *équation différentielle totale*.

Il y a une différence manifeste entre l'équation différentielle (1) et une équation aux différentielles partielles. Dans l'équation (1), en effet, dx et dy sont arbitraires, il est permis de les supposer successivement égaux à zéro, et l'on aura ainsi

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{P}{R}, \quad \frac{dz}{dy} = -\frac{Q}{R};$$

l'équation (1) fait donc connaître, à elle seule, les deux dérivées partielles $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$, entre lesquelles une équation aux différentielles partielles établirait seulement une relation.

216. L'introduction des dérivées partielles du premier ordre d'une fonction de deux variables permet, comme on l'a vu (197), d'éliminer une fonction arbitraire; la recherche d'une équation entre les différentielles permet seulement l'élimination d'une constante.

Soit $F(x, y, z, C) = 0$ une relation entre x, y, z et une constante arbitraire C. On en déduit, entre les différentielles dx, dy, dz, la relation

$$\frac{dF}{dx}\,dx + \frac{dF}{dy}\,dy + \frac{dF}{dz}\,dz = 0,$$

qui est la seule à laquelle ces différentielles soient assujetties; le résultat de l'élimination de C entre cette équation et la proposée est une équation parfaitement déterminée de la forme

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0.$$

217. Une équation de la forme

$$\text{(1)} \qquad P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0$$

ne correspond pas toujours à une relation entre x, y et z. Il est facile de voir que les fonctions P, Q, R doivent remplir, pour qu'il en soit ainsi, une condition nécessaire. De l'équation (1), on déduit, en effet,

$$\text{(2)} \qquad dz = -\frac{P}{R}\,dx - \frac{Q}{R}\,dy,$$

et par suite,

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{P}{R}, \quad \frac{dz}{dy} = -\frac{Q}{R}; \tag{3}$$

donc

$$\frac{d\frac{P}{R}}{dy} = \frac{d\frac{Q}{R}}{dx}, \tag{4}$$

et par suite, en remarquant que P, Q et R contiennent z qui est supposé fonction de x et de y,

$$\frac{d\frac{P}{R}}{dy} + \frac{d\frac{P}{R}}{dz}\frac{dz}{dy} = \frac{d\frac{Q}{R}}{dx} + \frac{d\frac{Q}{R}}{dz}\frac{dz}{dx};$$

en remplaçant $\frac{dz}{dy}$ et $\frac{dz}{dx}$ par leurs valeurs (3), effectuant et réduisant, on en déduit

$$P\left(\frac{dQ}{dx} - \frac{dR}{dy}\right) + Q\left(\frac{dR}{dx} - \frac{dP}{dz}\right) + R\left(\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx}\right) = 0, \tag{5}$$

et cette équation doit avoir lieu pour toutes les valeurs de x, y et z qui satisfont à la proposée. Deux cas peuvent se présenter : ou l'équation (5) est identique, et alors la condition est évidemment remplie ; ou elle établit entre x, y et z une relation qui doit être la relation cherchée elle-même, et si l'équation (1) n'est pas une conséquence de l'équation (5), il faut conclure qu'elle est impossible.

Soit, par exemple, l'équation

$$(6xy^2z - 5yz^3)\,dx + (5x^2yz - 4xz^3)\,dy + (4x^2y^2 - 6xyz^3)\,dz = 0; \tag{6}$$

en formant l'équation (5), on voit qu'elle est identique. La théorie précédente permet alors de se demander à quelle relation entre x, y et z convient l'équation (6).

Soit encore

$$(z - y)\,dx + x\,dy + (y - z)\,dz = 0, \tag{A}$$

l'équation (5) devient alors

$$z - x - y = 0. \tag{B}$$

Or on en déduit

$$dz = dx + dy, \tag{C}$$

et comme les valeurs (B) et (C) de z et de dz rendent l'équation (A) identique, on doit en conclure que l'équation (A) est possible et qu'elle a pour solution unique

$$z = x + y.$$

Soit enfin

$$z\,dx - y\,dy + y\,dz = 0;$$

l'équation (5) devient, dans ce cas,

$$-2z = 0,$$

et comme $z = 0$ n'est pas une solution de la proposée, celle-ci est impossible et ne correspond à aucune relation entre x, y et z.

218. Les résultats précédents peuvent être généralisés. Une équation entre quatre variables x, y, z, u et une constante arbitraire, donne, par l'élimination de la constante, une équation différentielle totale de la forme

$$\mathrm{P}\,dx + \mathrm{Q}\,dy + \mathrm{R}\,dz + \mathrm{S}\,du = 0. \tag{1}$$

Mais il existe entre les fonctions P, Q, R, S, des relations nécessaires. Si, en effet, dans l'équation (1) on considère u comme une fonction des variables indépendantes x, y, z, et que l'on remplace du par sa valeur,

$$du = \frac{du}{dx}\,dx + \frac{du}{dy}\,dy + \frac{du}{dz}\,dz.$$

dx, dy, dz, étant arbitraires, leurs coefficients devront être nuls, et l'équation (1) entraînera par conséquent les trois suivantes :

$$\mathrm{P} + \mathrm{S}\frac{du}{dx} = 0,$$

$$\mathrm{Q} + \mathrm{S}\frac{du}{dy} = 0,$$

$$\mathrm{R} + \mathrm{S}\frac{du}{dz} = 0.$$

En résolvant ces équations par rapport aux dérivées partielles de u qui y figurent, et écrivant que l'on a

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{du}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{du}{dy}\right),$$

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{du}{dy}\right) = \frac{d}{dy}\left(\frac{du}{dz}\right),$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{du}{dz}\right) = \frac{d}{dz}\left(\frac{du}{dx}\right),$$

on trouve, en ayant égard aux valeurs de $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dy}$, $\frac{du}{dz}$, et en supprimant les termes

qui se détruisent :

$$S\left(\frac{dP}{dy}-\frac{dQ}{dx}\right)+Q\left(\frac{dS}{dx}-\frac{dP}{du}\right)+P\left(\frac{dQ}{du}-\frac{dS}{dy}\right)=0,$$
$$S\left(\frac{dQ}{dz}-\frac{dR}{dy}\right)+R\left(\frac{dS}{dy}-\frac{dQ}{du}\right)+Q\left(\frac{dR}{du}-\frac{dS}{dz}\right)=0,$$
$$S\left(\frac{dR}{dx}-\frac{dP}{dz}\right)+P\left(\frac{dS}{dz}-\frac{dR}{du}\right)+R\left(\frac{dP}{du}-\frac{dS}{dx}\right)=0,$$

et ces trois équations doivent être satisfaites identiquement pour que l'équation (1) puisse se déduire d'une relation entre x, y, z, u et une constante arbitraire.

219. Lorsque p variables $x_1, x_2, .., x_p$ sont liées par n relations, contenant $2n-1$ constantes arbitraires, on peut éliminer ces constantes entre les équations proposées et leurs différentielles totales; le résultat de cette élimination est évidemment de la forme

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \ldots + X_p dx_p = 0. \tag{1}$$

Réciproquement, si une telle équation est donnée, et que l'on y considère $p-n$ des variables comme fonctions inconnues des n autres, on pourra écrire immédiatement n équations qui sont la conséquence nécessaire et en quelque sorte la traduction de l'équation (1). Si par exemple $x_1, x_2, \ldots, x_{p-n}$ sont fonctions de x_{p-n+1}, $x_{p-n+2}, \ldots, x_p$, on aura

$$dx_1 = \frac{dx_1}{dx_{p-n+1}}\,dx_{n-p+1} + \frac{dx_1}{dx_{p-n+2}}\,dx_{n-p+2} + \cdots + \frac{dx_1}{dx_p}\,dx_p,$$

et les autres différentielles s'exprimant de même, on pourra, après les avoir remplacées par leur valeur, égaler à zéro les coefficients des n différentielles arbitraires dx_{p-n+1}, $dx_{p-n+2}, \ldots, dx_p$; on obtiendra ainsi n équations entre $p-n$ inconnues. Si n est égal ou inférieur à $p-n$, il n'existe aucune condition nécessaire entre les coefficients $X_1, X_2, \ldots, X_p$; mais, dans le cas contraire, ces fonctions sont assujetties à des conditions sur lesquelles nous aurons à revenir.

EXERCICES.

1. Éliminer les constantes a et b et former l'équation différentielle du second ordre à laquelle satisfait la fonction y définie par l'équation

$$xy = ae^x + be^{-x}.$$

2. Éliminer a, b, c, d et former l'équation différentielle du troisième ordre à laquelle

satisfait la fonction y définie par l'équation

$$ae^y + be^{-y} = ce^x + de^{-x}.$$

On trouve

$$\left[\frac{d^3y}{dx^3} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - \frac{dy}{dx}\right]\left[\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 1\right] = 3\,\frac{dy}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2.$$

3. Éliminer la fonction arbitraire de l'équation

$$\frac{1}{z} - \frac{1}{x} = \varphi\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right),$$

et en déduire l'équation aux dérivées partielles

$$x^2\,\frac{dz}{dx} + y^2\,\frac{dz}{dy} = z^2.$$

4. Éliminer les fonctions arbitraires de l'équation

$$z = x\varphi(ax + by) + y\psi(ax + by),$$

et en déduire l'équation

$$a^2\,\frac{d^2z}{dy^2} - 2ab\,\frac{d^2z}{dx\,dy} + b^2\,\frac{d^2z}{dx^2} = 0.$$

5. L'équation

$$z = \varphi[x + f(y)],$$

dans laquelle φ et f sont des fonctions arbitraires, entraîne

$$\frac{d^2z}{dx\,dy}\,\frac{dz}{dx} - \frac{dz}{dy}\,\frac{d^2z}{dx^2} = 0.$$

6. Éliminer les fonctions arbitraires de l'équation

$$z = x^n\varphi\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{1}{y^n}\psi\left(\frac{y}{x}\right),$$

on trouve

$$x^2\,\frac{d^2z}{dx^2} + 2xy\,\frac{d^2z}{dx\,dy} + y^2\,\frac{d^2z}{dy^2} + x\,\frac{dz}{dx} + y\,\frac{dz}{dy} = n^2z.$$

7. Éliminer les fonctions arbitraires de l'équation

$$z = \varphi(x + y) + xy\,\psi(x - y).$$

On trouve

$$\frac{d^3z}{dx^3} + \frac{d^3z}{dx^2\,dy} - \frac{d^3z}{dx\,dy^2} - \frac{d^3z}{dy^3} = \frac{2}{x+y}\left(\frac{d^2z}{dx^2} - \frac{d^2z}{dy^2}\right).$$

8. On donne

$$z = \varphi(\alpha) - x\,\varphi'(\alpha) + \psi(\beta) + x\psi'(\beta),$$

$$y = \frac{\alpha + \beta}{2},$$

$$x = \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Éliminer les fonctions arbitraires φ et ψ et former l'équation différentielle partielle à laquelle satisfait z,

$$\frac{d^2z}{dx^2} - \frac{d^2z}{dy^2} - \frac{2}{x}\frac{dz}{dx} = 0.$$

9. On donne

$$y + \alpha x = \varphi(\alpha),$$
$$z = \alpha x + \frac{y}{\alpha},$$

former l'équation différentielle partielle à laquelle satisfait z.

$$\left(1+\frac{dz}{dx}\right)\left(1+\frac{dz}{dy}\right)z = \left[1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right]x + \left[1+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right]y.$$

10. Les équations

$$z = \frac{\psi(\alpha)}{(x+\alpha)^2\psi'(\alpha)} + \frac{1}{x+\alpha},$$
$$y + l[(x+\alpha)^2\psi'(\alpha)] = 0,$$

donnent par l'élimination de la fonction arbitraire $\psi(\alpha)$,

$$\left(z - \frac{dz}{dy}\right)^2 + \frac{dz}{dx} = 0.$$

LIVRE SECOND.

DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIE.

CHAPITRE PREMIER.

ÉTUDE GÉNÉRALE DES SÉRIES.

Définitions.

220. Une série est une somme composée d'un nombre illimité de termes; elle est *convergente* lorsqu'en y considérant un nombre de termes de plus en plus grand et les ajoutant dans l'ordre même où ils sont écrits, la somme obtenue s'approche indéfiniment d'une limite déterminée.

Lorsqu'une série n'est pas convergente, elle est dite *divergente*.

Les termes d'une série peuvent se succéder suivant une loi quelconque, être positifs ou négatifs, réels ou imaginaires, mais la condition d'être en nombre illimité exige que cette loi soit connue et permette de les calculer successivement, puisqu'il est impossible, comme cela a lieu pour un polynôme, de les écrire tous effectivement.

La formule algébrique qui exprime un terme en fonction du rang qu'il occupe se nomme le *terme général de la série*.

Quoique, d'après la définition, la série soit précisément la limite vers laquelle converge la somme des termes, on dit très-habituellement que l'on fait la somme d'une série lorsque l'on parvient à calculer la valeur de cette limite, et cette locution légèrement incorrecte est tout à fait consacrée par l'usage.

Quelques exemples de séries.

221. Nous commencerons par donner quelques exemples fort simples de séries dont la somme est connue. La remarque suivante peut en fournir un grand nombre.

Appelons $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ des nombres quelconques assujettis à la seule condition que α_n soit infiniment petit lorsque n est infiniment grand; on a évidemment

$$(1) \qquad \alpha_1 = (\alpha_1 - \alpha_2) + (\alpha_2 - \alpha_3) + (\alpha_3 - \alpha_4) + \ldots + (\alpha_{n-1} - \alpha_n) + \ldots,$$

et cette identité contient un grand nombre de séries.

Soient, en premier lieu, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = x$, $\alpha_3 = x^2, \ldots, \alpha_n = x^{n-1}$, x désignant un nombre plus petit que l'unité; la formule (1) devient

$$1 = (1-x)(1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots), \tag{2}$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+\ldots+x^n+\cdots,$$

formule importante et connue dès les éléments.

Soient encore $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = \frac{1}{2}, \cdots, \alpha_n = \frac{1}{n}, \cdots$; la formule (1) devient

$$1 = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots + \frac{1}{n.n+1} + \cdots,$$

formule curieuse, et l'une des premières que Leibnitz ait trouvées en abordant l'étude des séries.

Si l'on fait

$$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = \frac{1}{3}, \quad \alpha_3 = \frac{1}{5}, \cdots, \quad \alpha_n = \frac{1}{2n-1}, \cdots,$$

on trouve de même

$$1 = \frac{2}{3} + \frac{2}{15} + \ldots + \frac{2}{(2n-1)(2n+1)} + \cdots,$$

et par conséquent

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + \cdots$$

222. Citons encore quelques séries remarquables sommées par Stirling par des considérations analogues, et utilisées dans son ouvrage sur la sommation des séries.

On a, quel que soit z,

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z(z+1)} + \frac{1}{(z+1)(z+2)} + \ldots + \frac{1}{(z+p)(z+p+1)} + \cdots;$$

en effet,

$$\frac{1}{z(z+1)} = \frac{1}{z} - \frac{1}{z+1},$$

$$\frac{1}{(z+1)(z+2)} = \frac{1}{z+1} - \frac{1}{z+2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{(z+p)(z+p+1)} = \frac{1}{z+p} - \frac{1}{z+p+1},$$

en ajoutant ces équations on obtient la formule annoncée.

Nous rapporterons encore, sans nous arrêter à une démonstration rendue trop

facile par ce qui précède, les formules

$$\frac{1}{2}\frac{1}{z(z+1)} = \frac{1}{z(z+1)(z+2)} + \frac{1}{(z+1)(z+2)(z+3)} + \dots,$$

$$\frac{1}{3}\frac{1}{z(z+1)(z+2)} = \frac{1}{z(z+1)(z+2)(z+3)} + \frac{1}{(z+1)(z+2)(z+3)(z+4)} + \dots,$$

$$\frac{1}{4}\frac{1}{z(z+1)(z+2)(z+3)} = \frac{1}{z(z+1)(z+2)(z+3)(z+4)} + \frac{1}{(z+1)(z+2)(z+3)(z+4)(z+5)} + \dots.$$

223. Si, dans la formule (1) du paragraphe précédent, on pose

$$\alpha_1 = \operatorname{arc\,tang}\frac{c}{a}, \quad \alpha_2 = \operatorname{arc\,tang}\frac{c}{a+b}, \quad \alpha_3 = \operatorname{arc\,tang}\frac{c}{a+2b}, \dots,$$

elle devient

$$\operatorname{arc\,tang}\frac{c}{a} = \operatorname{arc\,tang}\frac{bc}{a(a+b)+c^2} + \operatorname{arc\,tang}\frac{bc}{(a+b)(a+2b)+c^2} + \operatorname{arc\,tang}\frac{bc}{(a+2b)(a+3b)+c^2} + \dots.$$

En supposant $b = 2$, $a = 1$, $c = 1$, il vient

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arc\,tang}\frac{1}{2} + \operatorname{arc\,tang}\frac{1}{8} + \operatorname{arc\,tang}\frac{1}{18} + \dots + \operatorname{arc\,tang}\frac{1}{2n^2} + \dots;$$

en supposant $a = 1$, $b = 1$, $c = 1$, on trouve de même

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arc\,tang}\frac{1}{3} + \operatorname{arc\,tang}\frac{1}{7} + \operatorname{arc\,tang}\frac{1}{21} + \dots + \operatorname{arc\,tang}\frac{1}{n^2+n+1} + \dots.$$

224. Aux formules précédentes, dont la démonstration est immédiate et résulte de la simple décomposition de chaque terme en deux parties, nous pouvons adjoindre la suivante : quoique de forme différente, elle se démontre de la même manière. On a

$$\frac{1}{x} = 2\cot 2x + \operatorname{tang} x + \frac{1}{2}\operatorname{tang}\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\operatorname{tang}\frac{1}{4}x + \frac{1}{8}\operatorname{tang}\frac{1}{8}x + \dots.$$

Considérons, en effet, l'identité

$$\operatorname{tang} x = \cot x - 2\cot 2x.$$

On en déduit

$$\frac{1}{2}\operatorname{tang}\frac{x}{2}=\frac{1}{2}\cot\frac{x}{2}-\cot x,$$

$$\frac{1}{4}\operatorname{tang}\frac{x}{4}=\frac{1}{4}\cot\frac{x}{4}-\frac{1}{2}\cot\frac{x}{2},$$

$$\frac{1}{8}\operatorname{tang}\frac{x}{8}=\frac{1}{8}\cot\frac{x}{8}-\frac{1}{4}\cot\frac{x}{4},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{2^n}\operatorname{tang}\frac{x}{2^n}=\frac{1}{2^n}\cot\frac{x}{2^n}-\frac{1}{2^{n-1}}\cot\frac{x}{2^{n-1}},$$

et en ajoutant ces diverses équations,

$$\operatorname{tang}x+\frac{1}{2}\operatorname{tang}\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\operatorname{tang}\frac{x}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}\operatorname{tang}\frac{x}{2^n}=\frac{1}{2^n}\cot\frac{x}{2^n}-2\cot 2x.$$

Si l'on fait croître n indéfiniment, $\cot\frac{x}{2^n}$ égal à $\frac{1}{\operatorname{tang}\frac{x}{2^n}}$ peut être remplacé par $\frac{2^n}{x}$: le premier terme du second membre a donc pour limite $\frac{1}{x}$, et l'on a

$$\frac{1}{x}-2\cot 2x=\operatorname{tang}x+\frac{1}{2}\operatorname{tang}\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\operatorname{tang}\frac{x}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}\operatorname{tang}\frac{x}{2^n}+\ldots,$$

ce qui est précisément la formule annoncée.

225. La somme d'une série s'obtient quelquefois en décomposant chaque terme de manière à transformer la série proposée en d'autres plus simples et dont les sommes sont connues.

C'est de cette manière que Jacques Bernoulli a démontré les formules suivantes, déduites ingénieusement par Leibnitz de la théorie de l'intérêt composé, et qui sont des cas particuliers d'une formule beaucoup plus générale et fort importante que nous aurons à étudier plus tard. On a, quel que soit le nombre x positif ou négatif, mais en valeur absolue inférieur à l'unité,

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\ldots+x^n+\ldots,$$

$$\frac{1}{(1-x)^2}=1+2x+3x^2+\ldots+(n+1)x^n+\ldots,$$

$$\frac{1}{(1-x)^3}=1+3x+6x^2+10x^3+\ldots+\frac{(n+1)(n+2)}{2}x^n+\ldots,$$

$$\frac{1}{(1-x)^4}=1+4x+10x^2+20x^3+\ldots+\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}x^n+\ldots.$$

La première de ces séries est bien connue. Considérons la seconde et posons

$$S = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots + (n+1)x^n + \ldots.$$

Si l'on fait

$$\begin{aligned} A &= 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots, \\ B &= \quad x + x^2 + x^3 + \ldots, \\ C &= \quad\quad x^2 + x^3 + \ldots, \\ D &= \quad\quad\quad x^3 + \ldots, \end{aligned}$$

on a évidemment

$$S = A + B + C + D + \ldots = \frac{1}{1-x} + \frac{x}{1-x} + \frac{x^2}{1-x} + \cdots,$$

c'est-à-dire

$$S = \frac{1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots}{1-x} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

De même, si l'on pose

$$S' = 1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + \ldots + \frac{(n+1)(n+2)}{2}x^n + \ldots,$$

et que l'on fasse

$$\begin{aligned} A &= 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots + (n+1)x^n + \ldots, \\ B &= \quad x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots + nx^n + \ldots, \\ C &= \quad\quad x^2 + 2x^3 + \ldots + (n-1)x^n + \ldots, \\ D &= \quad\quad\quad x^3 + \ldots + (n-2)x^n + \ldots, \end{aligned}$$

on aura évidemment

$$S' = A + B + C + \ldots = \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{x}{(1-x)^2} + \ldots + \frac{x^n}{(1-x)^2} + \ldots,$$

c'est-à-dire

$$S' = \frac{1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^3}.$$

Nous ne pousserons pas plus loin ces indications relatives à des théorèmes qui doivent être obtenus plus loin sous une forme beaucoup plus générale; bornons-nous à inscrire ici, comme facile à démontrer par un procédé tout semblable, la formule

$$\frac{1}{(1-x)^n} = 1 + nx + \frac{n\,n+1}{2}x^2 + \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}x^3 + \ldots,$$

dans laquelle n est un nombre entier quelconque, et x un nombre positif ou négatif moindre en valeur absolue que l'unité.

226. La même méthode peut s'appliquer à la sommation de la série suivante :

$$S = 1 + 4x + 9x^2 + 16x^3 + \ldots + (n+1)^2 x^n + \ldots$$

Si l'on pose

$$\begin{aligned} A &= 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots, \\ B &= \quad 3x + 3x^2 + 3x^3 + \ldots, \\ C &= \quad\quad 5x^2 + 5x^3 + \ldots, \\ D &= \quad\quad\quad 7x^3 + \ldots; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

on a évidemment

$$S = A + B + C + C + D + \ldots = \frac{1}{1-x} + \frac{3x}{1-x} + \frac{5x^2}{1-x} + \ldots = \frac{1 + 3x + 5x^2 + 7x^3 + \ldots}{1-x};$$

mais le numérateur

$$1 + 3x + 5x^2 + 7x^3 + \ldots$$

peut s'écrire de la manière suivante :

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + 2(x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots) = \frac{1}{1-x} + \frac{2x}{(1-x)^2},$$

et l'on conclut enfin

$$S = \frac{\dfrac{1}{1-x} + \dfrac{2x}{(1-x)^2}}{(1-x)} = \frac{(1+x)}{(1-x)^3}.$$

227. Le nombre de séries que l'on peut sommer ou de développements que l'on peut découvrir par des procédés analogues à celui que l'on vient d'indiquer est extrêmement considérable; l'énumération, si nous la faisions ici, en serait peu utile et nous écarterait d'ailleurs complétement de notre sujet; nous laisserons donc de côté ces premiers exemples destinés à montrer tout d'abord avec quelle facilité des expressions très-diverses peuvent être développées en séries, pour nous occuper des règles de convergence et de quelques principes généraux relatifs au calcul des séries.

Nécessité de la convergence des séries dont on fait usage.

228. Les géomètres du XVIIIe siècle attachaient peu d'importance à la convergence des séries. Les plus illustres d'entre eux ont employé des séries divergentes et paraissent s'être fait illusion sur le peu de rigueur des raisonnements où elles interviennent. On trouve cependant dans les œuvres de Jacques Bernoulli un exemple très-remarquable du danger qu'elles présentent, et c'est même à cause de l'absurdité d'un résultat, qu'il affirme la divergence de la série dont il s'est servi pour l'obtenir. Nous rapporterons cette démonstration, qui fournit un des

arguments les plus simples et les plus concluants que l'on puisse présenter sur cette question qui, d'ailleurs, n'est plus douteuse aujourd'hui pour personne.

Considérons la série

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}+\cdots,$$

et *désignons-la par* S; nous aurons

$$S=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots,$$

ou, ce qui revient au même,

$$S=\frac{1}{2}+\frac{2}{6}+\frac{3}{12}+\ldots+\frac{n}{n(n+1)}+\cdots;$$

posons

$$A=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots,$$

$$B=\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots,$$

$$C=\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots,$$

$$D=\frac{1}{20}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots;$$

on aura évidemment

$$S=A+B+C+D+\ldots;$$

d'un autre côté, on a (**221**)

$$A=1,\quad B=A-\frac{1}{2}=\frac{1}{2},\quad C=B-\frac{1}{6}=\frac{1}{3},\quad D=C-\frac{1}{12}=\frac{1}{4},\ldots,$$

et ainsi de suite indéfiniment; on a donc

$$S=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots,$$

et en comparant cette valeur avec la précédente, on serait conduit à conclure

$$1=0,$$

résultat absurde. Le raisonnement précédent serait cependant irréprochable si la série désignée par S était convergente; on peut donc affirmer qu'elle ne l'est pas, et l'on voit en même temps quelles erreurs peut entraîner l'emploi des séries divergentes

232. On démontre facilement que la série

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots,$$

déjà considérée (228), est divergente. Il est impossible, en effet, que la somme de ses termes s'approche indéfiniment d'une limite déterminée, car en s'arrêtant à un terme quelconque $\frac{1}{n}$, la somme des n suivants

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}$$

est composée de n termes, tous plus grands que $\frac{1}{2n}$ et par conséquent cette somme est plus grande que $\frac{1}{2}$; quelle que soit donc la somme déjà obtenue, on peut l'accroître de plus d'une demi-unité, donc elle augmente indéfiniment sans avoir aucune limite.

D'après cela, toute série à termes positifs

$$u_0+u_1+\ldots+u_n+\ldots,$$

dans laquelle le produit nu_n ne décroît pas indéfiniment lorsque n augmente, est nécessairement divergente. Supposons, en effet, qu'à partir d'une certaine valeur de n, on ait constamment

$$nu_n > k,$$

k étant un nombre fixe différent de zéro; on aura par suite

$$\begin{aligned} nu_n &> k,\\ (n+1)\,u_{n+1} &> k,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ (n+p)\,u_{n+p} &> k, \end{aligned}$$

et les termes de la série proposée sont plus grands que ceux de la suite divergente

$$\frac{k}{n}+\frac{k}{n+1}+\ldots+\frac{k}{n+p}+\cdots,$$

ils ont donc une somme infinie.

233. La réciproque du théorème précédent n'est pas exacte. Une série telle que le produit nu_n tende vers zéro lorsque n augmente, n'est pas pour cela nécessairement convergente. On peut même démontrer, et c'est un théorème bien remarquable dû à Abel, qu'il n'existe aucune fonction $\varphi(n)$ telle que toute série à termes positifs

$$u_0+u_1+u_2+\ldots+u_n+u_{n+1}+\ldots$$

soit nécessairement convergente si $u_n\varphi(n)$ tend vers zéro quand n augmente, et nécessairement divergente dans le cas contraire.

Pour démontrer cette proposition, remarquons que si la série à termes positifs

$$u_0+u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots$$

est divergente, la suivante

$$\frac{u_1}{u_0}+\frac{u_2}{u_0+u_1}+\frac{u_3}{u_0+u_1+u_2}+\ldots+\frac{u_n}{u_0+u_1+\ldots+u_{n-1}}+\ldots$$

l'est aussi. On sait en effet que l'on a (44) pour toute valeur positive de x,

$$l(1+x)<x;$$

par suite,

$$l(u_0+u_1+\ldots+u_n)-l(u_0+u_1+\ldots+u_{n-1})$$
$$=l\left(1+\frac{u_n}{u_0+u_1+\ldots+u_{n-1}}\right)<\frac{u_n}{u_0+u_1+\ldots+u_{n-1}},$$

et en faisant successivement $n=1$, $n=2,\ldots$,

$$l(u_0+u_1)-lu_0<\frac{u_1}{u_2},$$

$$l(u_0+u_1+u_2)-l(u_0+u_1)<\frac{u_2}{u_0+u_1},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$l(u_0+u_1+\ldots+u_n)-l(u_0+u_1+\ldots+u_{n-1})<\frac{u_n}{u_0+u_1+\ldots+u_{n-1}};$$

et en ajoutant ces inégalités,

$$l(u_0+u_1+\ldots+u_n)-lu_0<\frac{u_1}{u_0}+\frac{u_2}{u_0+u_1}+\ldots+\frac{u_n}{u_0+u_1+\ldots+u_{n-1}}.$$

Si donc $u_0+u_1+\ldots+u_n$ augmente sans limite avec n, il en est de même à fortiori du second membre de l'inégalité, et la série dont ce second membre forme les n premiers termes est divergente.

Cela posé, soit, s'il est possible, $\varphi(n)$ une fonction de n, telle qu'une série quelconque à termes positifs

$$u_0+u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots,$$

soit convergente ou divergente suivant que $\varphi(n).u_n$ tend ou non vers zéro lorsque n augmente; alors la série

(1) $$\frac{1}{\varphi(1)}+\frac{1}{\varphi(2)}+\ldots+\frac{1}{\varphi(n)}+\ldots,$$

sera divergente, et la série

$$(2)\qquad \frac{1}{\varphi(2)\frac{1}{\varphi(1)}}+\frac{1}{\varphi(3)\left[\frac{1}{\varphi(1)}+\frac{1}{\varphi(2)}\right]}+\frac{1}{\varphi(4)\left[\frac{1}{\varphi(1)}+\frac{1}{\varphi(2)}+\frac{1}{\varphi(3)}\right]}+\ldots$$
$$+\frac{1}{\varphi(n)\left[\frac{1}{\varphi(1)}+\ldots+\frac{1}{\varphi(n-1)}\right]}$$

sera convergente; car, dans la première, le terme de rang n multiplié par $\varphi(n)$ donne pour produit l'unité, et dans la seconde, à cause de la divergence de la première série, le produit analogue tend évidemment vers zéro: mais, d'après ce qui a été dit plus haut, la série (1) étant divergente, il doit en être de même de la série (2), et l'hypothèse qu'il existe une fonction $\varphi(n)$ remplissant la condition admise implique contradiction.

234. Quoique les séries à termes réels et positifs ne forment qu'une bien petite portion de celles que les géomètres ont à considérer, on s'est occupé souvent des conditions de leur convergence, et nous devons adjoindre aux théorèmes précédents quelques autres résultats intéressants auxquels leur étude a conduit.

Théorème. Lorsque dans une série à termes positifs

$$(A)\qquad u_1+u_2+\ldots+u_n+u_{n+1}+\ldots,$$

chaque terme est moindre que le précédent, la série (A) et la suivante

$$(B)\qquad u_1+au_a+a^2u_{a^2}+a^3u_{a^3}+\ldots+a^nu_{a^n}+\ldots,$$

sont en même temps convergentes et divergentes, quel que soit le nombre entier désigné par a. Supposons d'abord que la série (A) soit convergente, désignons-la par S; on aura

$$(C)\qquad \begin{aligned} u_1&=u_1,\\ au_a&=au_a,\\ a^2u_{a^2}&<a\left(u_{a+1}+u_{a+2}+\ldots+u_{a^2}\right),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a^nu_{a^n}&<a\left(u_{a^{n-1}+1}+u_{a^{n-1}+2}+\ldots+u_{a^n}\right); \end{aligned}$$

ces inégalités sont faciles à établir. Considérons par exemple la dernière de celles qui sont écrites, les termes de la série (A) allant par hypothèse en diminuant, le second membre est plus grand que si tous les termes de la parenthèse étaient remplacés par u_{a^n}, et par suite plus grand que

$$a\left(a^n-a^{n-1}\right)u_{a^n},$$

ou que

$$a^n(a-1)\,u_{a^n},$$

et à fortiori, puisque a est entier, plus grand que $a^n\,u_{a^n}$.

En ajoutant les inégalités (C) on obtient, en remarquant que les indices se suivent sans interruption dans le second membre,

$$u_1 + au_a + a^2u_{a^2} + \ldots + a^n\,u_{a^n} < u_1 + a\left(u_a + u_{a+1} + u_{a+2} + \ldots + u_{a^n}\right),$$

et comme la série dont les a^n premiers termes figurent dans le second membre est par hypothèse convergente, le premier ne peut pas croître indéfiniment et la série (B) est convergente.

Admettons, en second lieu, que la série (A) soit divergente, nous écrirons les inégalités suivantes

$$(a-1)\,au_a > u_a + u_{a+1} + \ldots + u_{a^2-1},$$
$$(a-1)\,a^2u_{a^2} > u_{a^2} + u_{a^2+1} + \ldots + u_{a^3-1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(a-1)\,a^n\,u_{a^n} > u_{a^n} + u_{a^n+1} + \ldots + u_{a^{n+1}-1},$$

qui toutes sont évidentes si l'on a égard à ce que les termes $u_1, u_2, u_3, \ldots$, vont par hypothèse en diminuant.

En ajoutant les inégalités précédentes qui ont toutes lieu dans le même sens, on en déduit

$$(a-1)\left(au_a + a^2u_{a^2} + a^3\,u_{a^3} + \ldots + a^n\,u_{a^n}\right) > u_a + u_{a+1} + \ldots + u_{a^{n+1}-1};$$

le second membre croissant par hypothèse indéfiniment avec n, il en est à fortiori de même du premier, et la série (B) est, comme nous l'avions annoncé, divergente.

235. Cauchy, qui le premier a fait connaître le théorème précédent, s'en est servi élégamment pour prouver que la série

$$1 + \frac{1}{2^\mu} + \frac{1}{3^\mu} + \ldots + \frac{1}{n^\mu} + \ldots,$$

est convergente ou divergente suivant que l'exposant positif μ est plus grand ou plus petit que l'unité. Il suffit, en effet, d'appliquer à cette série le théorème général qui précède, en y supposant $a = 2$. On voit alors qu'elle est convergente ou divergente en même temps que la série plus simple

$$1 + \frac{2}{2^\mu} + \frac{4}{4^\mu} + \frac{8}{8^\mu} + \cdots,$$

c'est-à-dire

$$1+\left(\frac{1}{2}\right)^{\mu-1}+\left(\frac{1}{4}\right)^{\mu-1}+\left(\frac{1}{8}\right)^{\mu-1}+\ldots;$$

or cette série est une progression géométrique de raison $\left(\frac{1}{2}\right)^{\mu-1}$, convergente si μ surpasse l'unité, et divergente dans le cas contraire : la proposition est donc démontrée.

236. On peut établir de même que la série

$$1+\frac{1}{2(l2)^{\mu}}+\frac{1}{3(l3)^{\mu}}+\ldots+\frac{1}{n(ln)^{\mu}}+\ldots$$

est convergente si μ surpasse l'unité et divergente dans le cas contraire. En appliquant en effet le théorème de Cauchy dans lequel on suppose $a=2$, on voit que cette série est convergente ou divergente en même temps que

$$1+\frac{1}{(l2)^{\mu}}+\frac{1}{(l4)^{\mu}}+\frac{1}{(l8)^{\mu}}+\ldots,$$

c'est-à-dire

$$1+\frac{1}{(l2)^{\mu}}\left(1+\frac{1}{2^{\mu}}+\frac{1}{3^{\mu}}+\ldots\right),$$

série convergente si μ est plus grand que l'unité et divergente dans le cas contraire.

237. Supposons maintenant que dans la série

(A) $$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots,$$

le terme général u_n soit égal à $\frac{1}{n\,ln.(l.l.n)^{\mu}}$; nous pourrons, pour examiner la condition de convergence, substituer la série

(B) $$u_1+au_a+a^2u_{a^2}+\ldots+a^nu_{a^n}+\ldots,$$

où a désigne un nombre entier arbitraire. Le terme général de cette série est

$$v_n=a^nu_{a^n}=\frac{a^n}{a^n l\,a^n.(l.l\,a^n)^{\mu}}=\frac{1}{n\,l\,a\,[l.(n\,l\,a)]^{\mu}}.$$

Si μ est plus grand que l'unité, prenons a supérieur à e et par conséquent $l\,a$ plus grand que l'unité, le terme v_n est moindre que

$$\frac{1}{n\,(ln)^{\mu}},$$

c'est-à-dire (236) moindre que le terme général d'une série convergente; la série (B) est donc divergente, et il en est de même de la série (A).

Si μ est égal ou inférieur à l'unité, nous supposerons $a = 2$, et, par conséquent, la moindre que l'unité; v_n est alors plus grand que

$$\frac{1}{n(\mathrm{l}n)^{\mu}},$$

c'est-à-dire plus grand que le terme général d'une série divergente; la série (B) et par conséquent la série (A) est donc dans ce cas divergente.

On verra d'une manière toute semblable que les séries qui ont pour termes généraux $\frac{1}{n.\mathrm{l}n.\mathrm{l}.\mathrm{l}n.(\mathrm{l}.\mathrm{l}.\mathrm{l}n)^{\mu}}$, $\frac{1}{n.\mathrm{l}n.\mathrm{l}.\mathrm{l}n.\mathrm{l}.\mathrm{l}.\mathrm{l}n.(\mathrm{l}.\mathrm{l}.\mathrm{l}.\mathrm{l}n)^{\mu}}$, etc..., sont convergentes si μ est plus grand que l'unité et divergentes dans le cas contraire.

Remarquons seulement que les logarithmes des nombres négatifs étant imaginaires, les premiers termes de ces séries ne sont pas réels, mais on peut les remplacer par des nombres arbitraires sans changer les conditions de convergence.

238. La considération des séries précédentes a conduit à des règles qui peuvent être quelquefois employées utilement pour prononcer sur la convergence d'une série à termes positifs. Soit une série

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots,$$

il est clair par ce qui précède que s'il existe un nombre μ plus grand que l'unité, et tel que, pour de grandes valeurs de n, on ait constamment

$$u_n < \frac{1}{n^{\mu}}, \tag{1}$$

la série est convergente. Si, au contraire, il existe un nombre μ plus petit que l'unité et tel que, pour de grandes valeurs de n, on ait constamment

$$u_n > \frac{1}{n^{\mu}}, \tag{2}$$

la série est divergente.

Or l'inégalité (1) équivaut à

$$\frac{1}{u_n} > n^{\mu},$$

et par suite à

$$\mathrm{l}\left(\frac{1}{u_n}\right) > \mu\,\mathrm{l}n,$$

ou encore à

$$\frac{\mathrm{l}\left(\frac{1}{u_n}\right)}{\mathrm{l}.n} > \mu;$$

de même l'inégalité (2) peut être remplacée par

$$\frac{l\frac{1}{u_n}}{l.n} < \mu;$$

or il est clair que l'on peut satisfaire à la première de ces inégalités, en choisissant μ plus grand que l'unité, pourvu que la fraction $\frac{l\frac{1}{u_n}}{ln}$ ait une limite plus grande que l'unité, et à la seconde en choisissant μ plus petit que l'unité, pourvu que $\frac{l\frac{1}{u_n}}{ln}$ ait une limite moindre que l'unité. Dans le premier cas la série est convergente, et dans le second elle est divergente.

239. Lorsque le rapport $\frac{l\frac{1}{u_n}}{ln}$ a précisément pour limite l'unité, la convergence ou la divergence de la série reste douteuse; on pourra souvent en décider de la manière suivante. Il est évident, d'après ce qui précède, que la série dont le terme général est u_n est convergente si l'on peut trouver un nombre μ supérieur à l'unité et tel, que l'on ait constamment, pour de grandes valeurs de n,

$$u_n < \frac{1}{n\,(ln)^{\mu}}; \tag{1}$$

la série est au contraire divergente s'il existe un nombre μ inférieur à l'unité et tel, que l'on ait constamment, pour de grandes valeurs de n,

$$u_n > \frac{1}{n\,(ln)^{\mu}}. \tag{2}$$

Or la première de ces inégalités peut s'écrire

$$\frac{1}{u_n} < n\,(ln)^{\mu}, \tag{3}$$

c'est-à-dire

$$l\frac{1}{u_n} > ln + \mu\, l.ln, \tag{4}$$

ou enfin

$$\mu < \frac{l\frac{1}{u_n} - ln}{l.ln} < \frac{l\frac{1}{n.u_n}}{l.ln}; \tag{5}$$

l'inégalité (2) équivaut de même à

$$\mu > \frac{l\frac{1}{n.u_n}}{l.ln}.$$

Pour qu'on puisse satisfaire à la première par une valeur de μ supérieure à l'unité, il suffit que $\frac{\mathrm{l}\frac{1}{nu_n}}{\mathrm{l}.\mathrm{l}n}$ ait une limite plus grande que l'unité, et pour qu'on puisse satisfaire à la seconde par une valeur de μ moindre que l'unité, il suffit que la même expression ait une limite moindre que l'unité. Il y a donc convergence ou divergence suivant que l'expression $\frac{\mathrm{l}\frac{1}{nu_n}}{\mathrm{l}.\mathrm{l}n}$ a une limite plus grande ou plus petite que l'unité.

Il est bon de remarquer que le numérateur $\mathrm{l}\frac{1}{nu_n}$ étant égal à $\mathrm{l}\frac{1}{u_n} - \mathrm{l}n$, serait infiniment grand par rapport à $\mathrm{l}.\mathrm{l}n$, si les deux termes dont il est la différence n'avaient pas un rapport infiniment peu différent de l'unité, c'est-à-dire si la règle précédente n'était pas en défaut; la nouvelle règle est donc particulièrement applicable aux séries pour lesquelles la précédente ne suffit pas.

Remarquons enfin que nu_n tend nécessairement vers zéro, sans quoi, u_n étant comparable à $\frac{1}{n}$, la série serait divergente comme la série

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots.$$

La limite de l'expression $\frac{\mathrm{l}\frac{1}{nu_n}}{\mathrm{l}.\mathrm{l}n}$ est donc positive dans les cas où il peut y avoir intérêt à la chercher.

240. Si le rapport $\frac{\mathrm{l}\frac{1}{nu_n}}{\mathrm{l}.\mathrm{l}n}$ tend vers l'unité, la convergence ou la divergence de la série restent douteuses. Pour en décider, on comparera alors le terme général u_n à

$$(1) \qquad \frac{1}{n\mathrm{l}n\,(\mathrm{l}.\mathrm{l}n)^{\mu}}.$$

Si pour de grandes valeurs de n cette dernière expression surpasse u_n, μ étant plus grand que l'unité, il y aura convergence; si au contraire on peut faire en sorte que, μ étant moindre que l'unité, u_n surpasse l'expression (1), il y aura divergence.

On conclut aisément de là qu'une série est convergente si l'expression $\frac{\mathrm{l}.\frac{1}{nu_n\mathrm{l}n}}{\mathrm{l}.\mathrm{l}.\mathrm{l}n}$ a une limite plus grande que l'unité, et divergente dans le cas contraire. On remarquera, comme au paragraphe précédent, que pour que la limite dont nous parlons ici ne soit pas infinie il faut que le rapport $\frac{\mathrm{l}\frac{1}{nu_n}}{\mathrm{l}.\mathrm{l}n}$ ait l'unité pour limite. S'il en est

ainsi, $\frac{l\frac{1}{u_n}}{ln}$ aura lui-même l'unité pour limite, et par conséquent la troisième règle servira précisément lorsque les deux précédentes n'auraient rien pu apprendre.

La série des règles analogues peut se continuer indéfiniment, mais les cas où elles peuvent s'appliquer deviennent de plus en plus rares, et il ne semble pas nécessaire de nous étendre davantage sur ce point.

241. Considérons, par exemple, la série

$$1+\frac{1}{\sqrt{2^3}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3^4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt[n]{n^{n+1}}},\ldots,$$

le rapport d'un terme au précédent a pour limite l'unité.

En posant $u_n=\frac{1}{\sqrt[n]{n^{n+1}}}$, on a

$$\frac{l\frac{1}{u_n}}{ln}=\frac{n+1}{n},$$

et la limite de ce premier rapport est l'unité.

On a ensuite

$$\frac{l\frac{1}{nu_n}}{l.ln}=\frac{ln}{nl.ln},$$

la limite est zéro. La série est donc divergente.

Règle de Gauss.

242. Gauss a donné dans l'un de ses Mémoires une règle de convergence pour les séries à termes positifs, qui, sans être aussi générale que les précédentes, s'applique à une classe nombreuse et importante de séries. La démonstration donnée par l'illustre auteur est d'ailleurs tellement élégante, qu'elle mérite d'être reproduite pour elle-même.

Soit une série

$$(A)\qquad u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots.$$

Supposons que le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ s'exprime par une fonction rationnelle du nombre n des termes qui précèdent u_n, en sorte que l'on ait

$$(1)\qquad \frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{n^\lambda+An^{\lambda-1}+Bn^{\lambda-2}+\ldots}{n^\lambda+an^{\lambda-1}+bn^{\lambda-2}+\ldots}.$$

Ce rapport tendant évidemment vers l'unité, la série n'est pas de celles auxquelles la règle (230) soit applicable. Le théorème de Gauss est le suivant :

Si la première des différences $A-a, B-b,\ldots$, *qui ne s'évanouit pas est positive, les termes croissent avec* n, *et la série est divergente.*

Si la première de ces différences qui ne s'évanouit pas est négative, les termes de la série sont décroissants lorsque n augmente.

Si les coefficients A *et a sont inégaux, les termes croissent sans limite ou tendent indéfiniment vers zéro; lorsque au contraire* $A - a$ *est nul, les termes de la série tendent vers une limite finie et différente de zéro.*

Le seul cas où la convergence soit possible est celui où $A - a$ *est différent de zéro et négatif, et dans ce cas, si* $A + 1 - a$ *est positif ou nul, il y a divergence, si* $A + 1 - a$ *est négatif, il y a convergence.*

Nous allons démontrer successivement ces théorèmes.

1° *Si la première des différences* $A - a$, $B - b, \ldots$, *qui ne s'évanouit pas est positive*, le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ sera, d'après l'expression (1), constamment supérieur à l'unité pour des valeurs suffisamment grandes de n, les termes de la série vont alors en augmentant.

2° *Si la première des différences* $A - a$, $B - b, \ldots$, *qui ne s'évanouit pas est négative*, le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est inférieur à l'unité pour des valeurs suffisamment grandes de n, et les termes de la série vont par conséquent en diminuant.

3° *Si les premiers coefficients* A *et a sont inégaux, les termes de la série croissent sans limite lorsque* $A - a$ *est positif, et tendent vers zéro si* $A - a$ *est négatif.*

Supposons en effet que $A - a$ soit positif; soit h un nombre entier tel, que

$$h(A - a) > 1;$$

posons

$$\frac{u_1^h}{1} = v_1, \quad \frac{u_2^h}{2} = v_2, \ \ldots, \quad \frac{u_n^h}{n} = v_n. \tag{2}$$

Dans la série

$$v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n + \ldots,$$

le rapport d'un terme au précédent est

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)^h \frac{n}{n+1},$$

c'est-à-dire, en remplaçant $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ par sa valeur,

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{n^{\lambda h+1} + hA\,n^{\lambda h} + \ldots}{n^{\lambda h+1} + (ha+1)\,n^{\lambda h} + \ldots},$$

et comme on a supposé $hA > ha + 1$, le rapport $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ est plus grand que l'unité lorsque n est très-grand; $\frac{u_n^h}{n}$ augmente donc avec n, et par suite u_n est infini en même temps que n.

Si $A - a$ est négatif, pour prouver que u_n tend vers zéro, il suffit de considérer la série

$$\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \ldots + \frac{1}{u_n} + \frac{1}{u_{n+1}} + \ldots ;$$

le rapport d'un terme au précédent sera

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{n^\lambda + an^{\lambda-1} + \ldots}{n^\lambda + An^{\lambda-1} + \ldots};$$

on en conclut, d'après ce qui précède, que $\frac{1}{u_n}$ croît indéfiniment, et par suite u_n tend vers zéro.

4° *Si l'on a* $A = a$, *les termes de la série tendent vers une limite déterminée qui n'est ni zéro ni l'infini.*

Supposons d'abord que, A étant égal à a, la première des différences $A - a$, $B - b$,... qui ne s'évanouit pas soit positive; soit h un nombre entier tel, que l'on ait

$$h + b - B > 1;$$

posons

$$(3) \qquad u_n \left(\frac{n}{n-1}\right)^h = v_n, \quad u_{n+1}\left(\frac{n+1}{n}\right)^h = v_{n+1}, \quad u_{n+2}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^h = v_{n+2} \ldots .$$

Dans la série dont le terme général est v_n, le rapport d'un terme au précédent est exprimé par

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+1}}{u_n}\,\frac{(n^2-1)^h}{n^{2h}} = \frac{n^{\lambda+2h} + An^{\lambda+2h-1} + (B-h)\,n^{\lambda+2h-2}}{n^{\lambda+2h} + An^{\lambda+2h-1} + bn^{\lambda+2h-2} + \ldots},$$

et comme par hypothèse on a

$$B - h < b,$$

le terme général v_n diminue lorsque n augmente; mais, en vertu des équations (3), u_n est moindre que v_n en valeur absolue : et puisque v_n diminue, il est impossible que u_n augmente sans limite, et comme ce terme est croissant avec n, il converge nécessairement vers une limite finie.

Si la première différence qui ne s'évanouit pas est négative, on pourra appliquer le raisonnement précédent à la série

$$\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} + \ldots + \frac{1}{u_n} + \ldots ,$$

et les termes de cette série tendant vers une limite finie, il en est de même de leurs inverses u_1, u_2,..., u_n.

5° *Si* $A - a + 1$ *est positif ou nul, la série est divergente.* Soit h un nombre entier positif suffisamment grand ; posons

$$(4) \qquad v_n = u_n(n-h), \quad v_{n+1} = u_{n+1}(n-h+1), \quad v_{n+2} = u_{n+2}(n-h+2)\ldots,$$

on aura,

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+1}}{u_n} \cdot \frac{n-h+1}{n-h} = \frac{n^{\lambda+1} + (A-h+1)\,n^{\lambda} + [B - A(h-1)]\,n^{\lambda-1} + \ldots}{n^{\lambda+1} + (a-h)\,n^{\lambda} + (b-ah)\,n^{\lambda-1} + \ldots}.$$

Si $A + 1 - a$ est positif, v_n augmente avec n lorsque n est suffisamment grand, car le coefficient de n^{λ} au numérateur est plus grand qu'au dénominateur. Si $A + 1 - a$ est nul, $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ est encore plus grand que 1, car les coefficients de n^{λ} étant les mêmes, celui de $n^{\lambda-1}$ est plus grand au numérateur si h est supposé suffisamment grand; on aura donc, dans les deux cas, pour une valeur de n suffisamment grande,

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} > 1,$$

et par suite, en remplaçant v_n et v_{n+1} par leurs valeurs, et mettant au lieu de n, $n+1$, $n+2$,...

$$u_{n+1} > u_n \frac{n-h}{n-h+1}, \quad u_{n+2} > u_{n+1} \frac{n-h+1}{n-h+2}, \quad u_{n+3} > u_{n+2} \frac{n-h+2}{n-h+3},$$

on en déduit aisément

$$(5) \qquad u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots > (n-h)\,u_n \left(\frac{1}{n-h} + \frac{1}{n-h+1} + \frac{1}{n-h+2} + \ldots \right),$$

et comme la série qui figure dans le second membre est divergente, il en est à fortiori de même de la série proposée qui forme le premier.

6° *Si* $A - a + 1$ *est négatif, la série est convergente.*

Soit dans ce cas h un nombre positif moindre que $a - A - 1$, je dis que l'on aura, pour une valeur suffisamment grande de n,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{n-h-1}{n}.$$

Cette inégalité revient en effet à

$$\frac{n u_{n+1}}{(n-h-1)\,u_n} < 1.$$

Or on a, d'après l'expression de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$,

$$\frac{n u_{n+1}}{(n-h-1)\,u_n} = \frac{n^{\lambda+1} + A n^{\lambda} + B n^{\lambda-1} + \ldots}{n^{\lambda+1} + (a-h-1)\,n^{\lambda} + [b - (h+1)a]\,n^{\lambda-1} + \ldots},$$

et, comme $A - a + 1 + h < 0$, cette fraction est, pour de grandes valeurs de n, constamment moindre que l'unité. On a d'après cela

$$u_{n+1} < u_n \frac{n-h-1}{n}, \qquad u_{n+2} < u_{n+1} \frac{n-h}{n+1} < u_n \frac{(n-h-1)(n-h)}{n.n+1},$$

$$u_{n+3} < u_{n+2} \frac{n-h+1}{n+2} < u_n . \frac{(n-h-1)(n-h)(n-h+1)}{n(n+1)(n+2)},$$

et par suite,

$$(6) \qquad u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots < u_n \left[1 + \frac{n-h-1}{n} + \frac{(n-h-1)(n-h)}{n(n+1)} + \ldots \right].$$

Or la somme des termes qui multiplient u_n dans le second membre peut facilement se calculer. On a pour une valeur quelconque de n

$$1 = \frac{n-1}{h} - \frac{n-h-1}{h},$$

$$1 + \frac{n-h-1}{n} = \frac{n-1}{h} - \frac{(n-h-1)(n-h)}{nh},$$

$$1 + \frac{n-h-1}{n} + \frac{(n-h-1)(n-h)}{n.(n+1)} = \frac{n-1}{h} - \frac{(n-h-1)(n-h)(n-h+1)}{h.n.(n+1)},$$

$$1 + \frac{n-h-1}{n} + \frac{(n-h-1)(n-h)}{n\,(n+1)} + \ldots + \frac{(n-h-1)(n-h)-(n-h+p)}{n.(n+1)\ldots(n+p+1)}$$

$$= \frac{n-1}{h} - \frac{(n-h-1)\ldots(n-h+p+1)}{h.n.(n+1)\ldots(n+p+1)}.$$

La fraction qui forme le second terme du second membre tend vers zéro lorsque p augmente; car, si l'on nomme v_p la valeur générale de cette expression, on a

$$\frac{v_{p+1}}{v_p} = \frac{n-h+p+2}{n+p+2} = \frac{p+(n-h+2)}{p+(n+2)};$$

par suite, la différence désignée plus haut par $A - a$ est négative, et v_p tend vers zéro. La série qui figure dans le second membre de (6) est donc convergente, et il est par suite impossible que le premier membre $u_n + u_{n+1} + \ldots$ augmente sans limite. La série dont le terme général est u_n est donc convergente.

Méthode de M. Kummer.

243. M. Kummer a fait connaître une méthode à l'aide de laquelle on peut très-souvent prononcer sur la convergence des séries à termes positifs. Cette méthode se distingue des règles précédentes par la grande indétermination qu'elle laisse subsister dans le mode d'application, et qui souvent est un avantage pour ceux qui savent habilement en profiter.

Soit la série à termes positifs

$$(1) \qquad u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots .$$

Soient $\varphi(n)$ une fonction quelconque de n et a une constante arbitraire; posons

$$(2) \qquad \psi(n) = \frac{\varphi(n)\,u_n}{a} - \left[\frac{\varphi(n+1)}{a} + 1\right] u_{n+1},$$

et l'on aura identiquement

$$(u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \ldots + u_{n+k}) = \frac{\varphi(n)\,u_n}{a} - [\psi(n) + \psi(n+1) + \ldots + \psi(n+k-1)] - \frac{\varphi(n+k)\,u_{n+k}}{a},$$

ainsi qu'on s'en assure en substituant à $\psi(n)$, $\psi(n+1)$,..., leurs valeurs fournies par l'équation (2).

Cela posé, supposons que pour de très-grandes valeurs de n, $\varphi(n)\,u_n$ tende vers zéro, et que, de plus, $\psi(n)$, $\psi(n+1)$,... soient tous positifs; il est clair que le premier membre, qui est positif, tendra lui-même vers zéro, quel que soit k, et que, par suite, la série est convergente; nous avons donc le théorème suivant :

Soit $\varphi(n)$ une fonction de n telle, que $\varphi(n)\,u_n$ tende vers zéro lorsque n augmente et que de plus la différence

$$\frac{\varphi(n)\,u_n}{a} - \frac{\varphi(n+1)\,u_{n+1}}{a} - u_{n+1}$$

soit positive pour n infini : la série est convergente.

La condition

$$\frac{\varphi(n)\,u_n}{a} - \frac{\varphi(n+1)\,u_{n+1}}{a} - u_{n+1} > 0$$

peut s'écrire, si l'on suppose a positif,

$$\frac{\varphi(n)\,u_n}{u_{n+1}} - \varphi(n+1) > a;$$

elle sera toujours remplie, puisque a est arbitraire, si $\frac{\varphi(n)\,u_n}{u_{n+1}} - \varphi(n+1)$ a une limite plus grande que zéro.

244. M. Kummer a fait connaître un second théorème qui permet d'affirmer dans un grand nombre de cas qu'une série à termes positifs est divergente.

Conservons la notation du numéro précédent, et posons en outre

$$(3) \qquad \varphi(n)\,u_n - \varphi(n+1)\,u_{n+1} = u_{n+1} f(n).$$

Remplaçons successivement n par $n+1$, $n+2$, $n+3$,..., et ajoutant membre

à membre les équations obtenues, on aura, puisque $u_n \varphi(n)$ est nul pour n infini,

$$\varphi(n)\,u_n = u_{n+1} f(n) + u_{n+2} f(n+1) + u_{n+3} f(n+2) + \dots,$$

ou, en divisant par $f(n)$,

$$\frac{\varphi(n)\,u_n}{f(n)} = u_{n+1} + u_{n+2}\frac{f(n+1)}{f(n)} + u_{n+3}\frac{f(n+2)}{f(n)} + \dots$$

Si maintenant $f(n)$ tend vers zéro lorsque n augmente, les coefficients qui dans le second membre multiplient les termes de la série primitive sont tous moindres que l'unité, et, par suite,

$$\frac{\varphi(n)\,u_n}{f(n)} < u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \dots.$$

Si donc $\frac{\varphi(n)\,u_n}{f(n)}$ n'est pas nul pour n infini, la somme des termes qui suivent un terme quelconque n'a pas pour limite zéro, lorsque le rang de ce terme augmente sans limite et la série est évidemment divergente; nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Si $\varphi(n)$ est une fonction de l'indice n, telle que le produit $\varphi(n)\,u_n$ soit nul pour n infini, et que de plus des deux expressions

$$f(n) = \frac{u_n \varphi(n)}{u_{n+1}} - \varphi(n+1)$$

et

$$\frac{\varphi(n)\,u_n}{f(n)}$$

la première soit nulle pour n infini, et la seconde positive, la série est divergente.

245. Considérons comme exemple la série

$$\frac{1}{2\,l2} + \frac{1}{3\,l3} + \dots + \frac{1}{n\,ln} + \dots,$$

dont la divergence a été démontrée (**236**). Prenons $\varphi(n) = n$, nous aurons

$$\varphi(n)\,u_n = \frac{1}{l\,n}.$$

Ce produit tend vers zéro. De plus, on a

$$f(n) = \frac{(n+1)\,l(n+1)}{ln} - (n+1) = \frac{n+1}{ln}\,l\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

On voit aisément que $f(n)$ est nul pour n infini. On a enfin

$$\frac{\varphi(n)\,u_n}{f(n)} = \frac{1}{(n+1)\,l\left(1+\frac{1}{n}\right)},$$

et la limite est l'unité, la série (1) est donc divergente.

Soit encore la série

$$\frac{1}{2(l2)^2}+\frac{1}{3(l3)^2}+\ldots+\frac{1}{n(ln)^2}+\cdots;$$

prenons $\varphi(n)=n\,ln$, on aura

$$\varphi(n)u_n=\frac{1}{ln}.$$

Ce produit tend vers zéro; de plus on a

$$\frac{\varphi(n)u_n}{u_{n+1}}-\varphi(n+1)=\frac{(n+1)[l(n+1)]^2}{l.n}-(n+1)l(n+1)=\frac{(n+1)l(n+1)}{l.n}\cdot l\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

On voit aisément que pour n infini, cette expression devient égale à l'unité, et par suite la série est convergente.

Séries dont les termes sont alternativement positifs et négatifs.

246. Lorsque les termes d'une série ne sont pas tous positifs, il semble difficile de donner des règles générales qui permettent de décider de sa convergence. Nous nous bornerons à quelques remarques fort simples, mais très-importantes.

THÉORÈME I. — *Lorsque les termes d'une série sont tels, qu'en substituant à chacun d'eux un terme positif de même valeur absolue, la série devient convergente, elle l'est également quels que soient les signes de ses termes et l'ordre dans lequel on les écrit.*

On peut en effet considérer les termes positifs et les termes négatifs comme formant deux séries distinctes, convergentes toutes deux; puisque la somme des uns et des autres pris avec le même signe reste, en effet, par hypothèse, au-dessous d'une certaine limite, il en est à fortiori de même de l'une quelconque des deux qui forme, par suite, une série convergente.

Cela posé, si l'on prend dans la série un nombre de termes indéfiniment croissant, le nombre des termes positifs et celui des termes négatifs qui y figureront iront l'un et l'autre en augmentant sans limite, et la somme différera par conséquent de moins en moins de la différence des limites des deux séries dont nous avons parlé.

Cette conclusion est indépendante de l'ordre dans lequel les termes sont écrits, et il est par conséquent permis de choisir celui qu'on voudra, pourvu, bien entendu, que leurs valeurs absolues, prises avec le même signe, forment, comme on l'a supposé, une série convergente.

247. La réciproque du théorème précédent n'est pas exacte; une série peut être convergente, quoique la somme des valeurs absolues de ses termes soit infinie. Nous démontrerons seulement le théorème suivant :

THÉORÈME II. — *Lorsque les termes d'une série sont alternativement positifs et négatifs et qu'ils diminuent sans limite, chacun étant moindre que le précédent, la série est convergente.*

Soit, en effet, la série à termes réels

$$u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + \ldots + u_n - u_{n+1} + \ldots,$$

dont les termes alternativement positifs et négatifs diminuent sans limite.

Arrêtons-nous successivement au terme u_n, puis au terme u_{n+1} et posons

$$S_n = u_0 - u_1 + u_2 + \ldots + u_n,$$
$$S_{n+1} = u_0 - u_1 + u_2 + \ldots + u_n - u_{n+1}.$$

Quelque loin que l'on prolonge la série au delà de u_n et à quelque terme que l'on s'arrête, la somme sera plus grande que S_n et moindre que S_{n+1}, car la somme des termes ajoutés à S_n est de la forme

$$-(u_{n+1} - u_{n+2}) - (u_{n+3} - u_{n+4}) - (u_{n+5} - u_{n+5}) - \ldots,$$

et est par conséquent négative.

La somme des termes ajoutés à S_{n+1} est au contraire positive, car on peut les grouper comme il suit :

$$(u_{n+2} - u_{n+3}) + (u_{n+4} - u_{n+5}) + \ldots,$$

en sorte que la série prolongée autant qu'on le voudra est constamment comprise entre deux nombres S_n et S_{n+1} dont la différence u_{n+1} peut être aussi petite qu'on le désire. La convergence est par suite évidente.

248. Lorsque les termes d'une série pris en valeur absolue ne forment pas une série convergente, et que la convergence résulte par conséquent des signes qu'on leur attribue, il n'est pas permis de changer l'ordre dans lequel ils sont écrits, et l'on pourrait non-seulement altérer par là la valeur de la série, mais encore lui faire perdre sa convergence.

Dirichlet, qui a le premier appelé sur ce point l'attention des géomètres, en a donné l'exemple suivant :

Les séries

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} \cdots,$$

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6}, \cdots,$$

qui sont composées des mêmes termes affectés des mêmes signes, n'ont pas cepen-

dant la même limite; on peut prouver facilement que la première étant représentée par S, la seconde est $\frac{3}{2}$S.

On a, en effet,

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} + \ldots = \sum\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right),$$

le signe $\sum$ s'étendant à toutes les valeurs entières de n.

On a aussi, en nommant S′ la seconde somme,

$$S' = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{2n} + \ldots,$$

et par suite

$$S' = \sum \frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{2n};$$

mais la somme S peut évidemment s'écrire

$$S = \sum \frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n-2} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n};$$

donc

$$S' - S = \sum\left(\frac{1}{4n-2} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{4n}\right) = \sum \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n} = \frac{1}{2}\sum \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}S,$$

et par suite, sans connaître la valeur de S, on est assuré que S′ est égal à $\frac{3}{2}$S.

Séries imaginaires.

249. Lorsque les termes d'une série sont imaginaires, la convergence exige que les parties réelles et les coefficients de $\sqrt{-1}$, dans chaque terme, forment séparément des séries convergentes.

Il est bien souvent commode de mettre une expression imaginaire $a + b\sqrt{-1}$ sous la forme

$$\rho(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi);$$

on démontre aisément que cela est toujours possible, en imposant même à ρ la condition d'être positif. Ce coefficient, égal à $\sqrt{a^2+b^2}$, se nomme le *module* de l'expression imaginaire dont l'angle φ s'appelle l'*argument*. Une série imaginaire

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

peut, par suite, s'écrire de la manière suivante :

$$\rho_1(\cos\varphi_1 + \sqrt{-1}\sin\varphi_1) + \rho_2(\cos\varphi_2 + \sqrt{-1}\sin\varphi_2) + \ldots + \rho_n(\cos\varphi_n + \sqrt{-1}\sin\varphi_n) + \ldots,$$

et la condition nécessaire et suffisante pour qu'elle soit convergente est que les deux séries

$$\rho_1 \cos\varphi_1 + \rho_2 \cos\varphi_2 + \ldots + \rho_n \cos\varphi_n + \ldots,$$
$$\rho_1 \sin\varphi_1 + \rho_2 \sin\varphi_2 + \ldots + \rho_n \sin\varphi_n + \ldots,$$

soient convergentes toutes deux.

Cette condition sera remplie évidemment si la série

$$\rho_1 + \rho_2 + \ldots + \rho_n + \ldots,$$

est elle-même convergente; car tous les termes de cette série étant positifs, toute série dont les termes sont respectivement moindres en valeur absolue, est nécessairement convergente en même temps qu'elle. La réciproque n'est pas exacte, mais il est difficile de donner une règle générale de convergence. Nous nous bornerons à démontrer le théorème suivant, qui s'applique à une classe importante de séries imaginaires :

Si, dans la série

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots \tag{1}$$

les coefficients $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ *diminuent et tendent vers zéro, de telle sorte que chacun soit plus petit que le précédent, on peut affirmer que la série est convergente pour toute valeur de* x *dont le module est l'unité, en exceptant la seule valeur* $x = 1$ *pour laquelle il y a doute.*

Représentons par P_n la somme des $n+1$ premiers termes de la série, et posons

$$P_n = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n, \tag{2}$$

on en déduit,

$$(1-x)P_n = a_0 - a_n x^{n+1} + (a_1 - a_0)x + (a_2 - a_1)x^2 + \ldots + (a_n - a_{n-1})x^n. \tag{3}$$

Si l'on donne à x une valeur dont le module soit l'unité, c'est-à-dire de la forme

$$\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi,$$

$a_n x^{n+1}$ tend vers zéro, lorsque n augmente sans limite, à cause du facteur a_n, et la série dont le terme général est

$$(a_n - a_{n-1})x^n, \tag{4}$$

est convergente; on a, en effet,

$$x^n = \cos n\varphi + \sqrt{-1}\sin n\varphi.$$

La partie réelle et la partie imaginaire de x^n sont donc l'une et l'autre inférieures

à l'unité en valeur absolue; un terme tel que (4) a donc la partie réelle et le coefficient de $\sqrt{-1}$ dans la partie imaginaire moindres tous deux que $a_n - a_{n-1}$. Or la série à termes négatifs dont le terme général est $a_n - a_{n-1}$,

$$(a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + \ldots + (a_n - a_{n-1}) + \ldots,$$

est évidemment convergente et a pour limite $-a_0$; il en est donc, à fortiori, de même des deux séries dont les termes sont moindres en valeur absolue. Le produit de P_n par $(1 - x)$ tend donc vers une limite déterminée, et, en excluant le cas où $x = 1$, il en est de même de P_n. On peut énoncer la proposition précédente en disant que si les coefficients $a_0, a_1, \ldots, a_n$, vont en diminuant et tendent vers zéro, les séries

$$a_0 + a_1 \cos\varphi + a_2 \cos 2\varphi \ldots + a_n \cos n\varphi + \ldots, \tag{5}$$

$$a_1 \sin\varphi + a_2 \sin 2\varphi \ldots + a_n \sin n\varphi + \ldots, \tag{6}$$

sont convergentes pour toute valeur de l'angle φ, en exceptant toutefois, pour la première, l'hypothèse $\varphi = 0$.

Si l'on suppose $\varphi = \pi$, la première de ces séries devient

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots,$$

et l'on retrouve le théorème déjà démontré (**246**).

Transformation d'Euler.

250. Une série étant donnée, on peut la transformer en une autre, soit par un nouveau mode de groupement des termes, soit au contraire par la décomposition de chaque terme en un nombre fini ou infini de parties, soit enfin par l'addition de termes nouveaux dont l'ensemble se détruit. L'une des transformations les plus célèbres est celle qu'Euler a proposée pour une série ordonnée suivant les puissances d'une variable.

Soit la série

$$S = u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + \ldots + u_n x^n + \ldots. \tag{1}$$

Posons

$$x = \frac{y}{1+y}, \tag{2}$$

on aura

$$S = u_0 + u_1 \frac{y}{1+y} + u_2 \frac{y^2}{(1+y)^2} + u_3 \frac{y^3}{(1+y)^3} + \ldots \tag{3}$$

Mais on a (225)

$$\frac{y}{1+y} = y - y^2 + y^3 - y^4 + \ldots \pm y^n \mp \ldots,$$

$$\frac{y^2}{(1+y)^2} = y^2 - 2y^3 + 3y^4 - 4y^5 + \ldots \pm n y^{n+1} \mp \ldots,$$

$$\frac{y^3}{(1+y)^3} = y^3 - 3y^4 + 6y^5 + \ldots \pm \frac{n.n+1}{1.2} y^{n+2} \mp \ldots;$$

en remplaçant chaque terme de la série (3) par son développement et réunissant les coefficients de la même puissance de y, on a

$$S = u_0 + u_1 y + (u_2 - u_1) y^2 + (u_3 - 2u_2 + u_1) y^3 + (u_4 - 3u_3 + 3u_2 - u_1) y^4 + \ldots,$$

où, d'après les formules connues de la théorie des différences,

$$S = u_0 + y u_1 + y^2 \Delta u_1 + y^3 \Delta^2 u_1 + y^4 \Delta^3 u_1 + \ldots + y^n \Delta^{n-1} u_1 + \ldots,$$

et comme l'équation (2) donne

$$y = \frac{x}{1-x},$$

$$S = u_0 + u_1 \frac{x}{1-x} + \Delta u_1 \frac{x^2}{(1-x)^2} + \cdots + \Delta^{n-1} u_1 \frac{x^n}{(1-x)^n} + \ldots.$$

Si l'on suppose $x = -1$, on a $\frac{1}{1-x} = \frac{1}{2}$, la série S devient

$$S = u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + u_4 \ldots,$$

et sa transformée

$$S = u_0 - \frac{1}{2} u_1 + \frac{1}{4} \Delta u_1 - \frac{1}{8} \Delta^2 u_1 + \frac{1}{16} \Delta^3 u_1 - \ldots.$$

251. La transformation précédente est remarquable et souvent utile, comme nous le montrerons, pour le calcul numérique des séries; mais, avant d'en faire une application, remarquons bien qu'elle ne serait plus légitime si l'une quelconque des séries considérées cessait d'être convergente. On comprend difficilement, par exemple, qu'on ait songé à l'appliquer aux séries

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots,$$

$$S = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \ldots,$$

et qu'on en ait conclu pour la première la valeur $\frac{1}{2}$, et pour l'autre la valeur $\frac{1}{4}$,

croyant justifier par là l'usage des séries

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots,$$

$$\frac{1}{(1+x)^2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \dots,$$

dans le cas où x est égal à l'unité et où elles cessent d'être convergentes. Il est utile cependant d'insister un peu sur ce point. La transformation d'une série divergente, lors même qu'elle donne naissance à une série convergente, doit être considérée comme insignifiante, à moins qu'une nouvelle démonstration ne vienne lui donner un sens; cette démonstration peut quelquefois être faite, parce que la série transformée et la série primitive étant démontrées égales lorsque toutes deux sont convergentes, fournissent deux développements de la même fonction. S'il arrive ensuite que l'une d'elles devienne divergente pour une certaine hypothèse, l'autre demeurant convergente représentera encore la fonction, justifiant en apparence ceux qui prétendraient que l'autre série la représente encore après être devenue divergente, et qui se trouveraient dans le vrai pour avoir commis la double erreur d'accepter une transformation qui n'est plus légitime et une série qui, étant divergente, ne représente plus rien.

Considérons, par exemple, la série

$$2x + \frac{2^2}{2}x^2 + \frac{2^3}{3}x^3 + \frac{2^4}{4}x^4 + \dots. \tag{1}$$

En posant

$$x = \frac{y}{1+y}, \tag{2}$$

elle devient

$$2y + \frac{2}{3}y^3 + \frac{2}{5}y^5 + \frac{2}{7}y^7 + \dots + \frac{2}{2n+1}y^{2n+1} + \dots. \tag{3}$$

Ainsi qu'on s'en assure aisément, le calcul numérique des premiers termes fait apercevoir la loi, et l'on démontre (*) ensuite qu'en posant

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 2, \quad u_2 = \frac{2^2}{2}, \quad u_3 = \frac{2^3}{3}, \quad u_4 = \frac{2^4}{4}, \dots, \quad u_n = \frac{2^n}{n}, \dots$$

(*) La proposition inverse, qui est équivalente, est plus facile encore à établir. Si l'on se donne les valeurs de $\Delta u_1, \Delta^2 u_1, \dots, \Delta^n u_1 \dots$, on aura, par une formule connue de la théorie des différences,

$$u_{n+1} = u_1 + n.\Delta u_1 + \frac{n.n-1}{1.2}\Delta^2 u_1 + \dots + \frac{n.(n-1)\dots(n-p+1)}{1.2\dots p}\Delta^p u_1 + \dots + \Delta^n u_1.$$

Or, en remplaçant u_1 et ses différences par les valeurs indiquées, le second membre devient

$$2 + \frac{2}{3}\frac{n.n-1}{2} + \frac{2}{5}\frac{n.(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4} + \dots,$$

c'est-à-dire $\frac{2^{n+1}}{n+1}$, car cette expression est précisément ce que devient $\frac{(1+x)^{n+1} - (1-x)^{n+1}}{n+1}$, quand on y fait $x = 1$.

Mais on a (**225**)

$$\frac{y}{1+y} = y - y^2 + y^3 - y^4 + \ldots \pm y^n \mp \ldots,$$

$$\frac{y^2}{(1+y)^2} = y^2 - 2y^3 + 3y^4 - 4y^5 + \ldots \pm n y^{n+1} \mp \ldots,$$

$$\frac{y^3}{(1+y)^3} = y^3 - 3y^4 + 6y^5 + \ldots \pm \frac{n.n+1}{1.2} y^{n+2} \mp \ldots;$$

en remplaçant chaque terme de la série (3) par son développement et réunissant les coefficients de la même puissance de y, on a

$$S = u_0 + u_1 y + (u_2 - u_1) y^2 + (u_3 - 2u_2 + u_1) y^3 + (u_4 - 3u_3 + 3u_2 - u_1) y^4 + \ldots,$$

où, d'après les formules connues de la théorie des différences,

$$S = u_0 + y u_1 + y^2 \Delta u_1 + y^3 \Delta^2 u_1 + y^4 \Delta^3 u_1 + \ldots + y^n \Delta^{n-1} u_1 + \ldots,$$

et comme l'équation (2) donne

$$y = \frac{x}{1-x},$$

$$S = u_0 + u_1 \frac{x}{1-x} + \Delta u_1 \frac{x^2}{(1-x)^2} + \ldots + \Delta^{n-1} u_1 \frac{x^n}{(1-x)^n} + \ldots.$$

Si l'on suppose $x = -1$, on a $\frac{1}{1-x} = \frac{1}{2}$, la série S devient

$$S = u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + u_4 \ldots,$$

et sa transformée

$$S = u_0 - \frac{1}{2} u_1 + \frac{1}{4} \Delta u_1 - \frac{1}{8} \Delta^2 u_1 + \frac{1}{16} \Delta^3 u_1 - \ldots.$$

251. La transformation précédente est remarquable et souvent utile, comme nous le montrerons, pour le calcul numérique des séries; mais, avant d'en faire une application, remarquons bien qu'elle ne serait plus légitime si l'une quelconque des séries considérées cessait d'être convergente. On comprend difficilement, par exemple, qu'on ait songé à l'appliquer aux séries

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots,$$

$$S = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \ldots,$$

et qu'on en ait conclu pour la première la valeur $\frac{1}{2}$, et pour l'autre la valeur $\frac{1}{4}$,

croyant justifier par là l'usage des séries

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots,$$

$$\frac{1}{(1+x)^2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \dots,$$

dans le cas où x est égal à l'unité et où elles cessent d'être convergentes. Il est utile cependant d'insister un peu sur ce point. La transformation d'une série divergente, lors même qu'elle donne naissance à une série convergente, doit être considérée comme insignifiante, à moins qu'une nouvelle démonstration ne vienne lui donner un sens; cette démonstration peut quelquefois être faite, parce que la série transformée et la série primitive étant démontrées égales lorsque toutes deux sont convergentes, fournissent deux développements de la même fonction. S'il arrive ensuite que l'une d'elles devienne divergente pour une certaine hypothèse, l'autre demeurant convergente représentera encore la fonction, justifiant en apparence ceux qui prétendraient que l'autre série la représente encore après être devenue divergente, et qui se trouveraient dans le vrai pour avoir commis la double erreur d'accepter une transformation qui n'est plus légitime et une série qui, étant divergente, ne représente plus rien.

Considérons, par exemple, la série

$$2x + \frac{2^2}{2}x^2 + \frac{2^3}{3}x^3 + \frac{2^4}{4}x^4 + \dots. \tag{1}$$

En posant

$$x = \frac{y}{1+y}, \tag{2}$$

elle devient

$$2y + \frac{2}{3}y^3 + \frac{2}{5}y^5 + \frac{2}{7}y^7 + \dots + \frac{2}{2n+1}y^{2n+1} + \dots. \tag{3}$$

Ainsi qu'on s'en assure aisément, le calcul numérique des premiers termes fait apercevoir la loi, et l'on démontre (*) ensuite qu'en posant

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 2, \quad u_2 = \frac{2^2}{2}, \quad u_3 = \frac{2^3}{3}, \quad u_4 = \frac{2^4}{4}, \dots, \quad u_n = \frac{2^n}{n}, \dots$$

(*) La proposition inverse, qui est équivalente, est plus facile encore à établir. Si l'on se donne les valeurs de Δu_1, $\Delta^2 u_1, \dots, \Delta^n u_1 \dots$, on aura, par une formule connue de la théorie des différences,

$$u_{n+1} = u_1 + n.\Delta u_1 + \frac{n.n-1}{1.2}\Delta^2 u_1 + \dots + \frac{n.(n-1)\dots(n-p+1)}{1.2\dots p}\Delta^p u_1 + \dots + \Delta^n u_1.$$

Or, en remplaçant u_1 et ses différences par les valeurs indiquées, le second membre devient

$$2 + \frac{2}{3}\frac{n.n-1}{2} + \frac{2}{5}\frac{n.(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4} + \dots,$$

c'est-à-dire $\frac{2^{n+1}}{n+1}$, car cette expression est précisément ce que devient $\frac{(1+x)^{n+1} - (1-x)^{n+1}}{n+1}$, quand on y fait $x = 1$.

on a

$$\Delta u_1 = 0, \quad \Delta^2 u_1 = \frac{2}{3}, \quad \Delta^3 u_1 = 0, \quad \Delta^4 u_1 = \frac{2}{5}, \cdots, \quad \Delta^{2n} u_1 = \frac{2}{2n+1};$$

en supposant $x = -1$, on a $y = -\frac{1}{2}$, et la série

$$2 - \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{3} - \frac{2^4}{4} + \cdots \tag{4}$$

est par suite transformée en

$$1 + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{2}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5 + \frac{2}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^7 + \cdots \tag{5}$$

Or, la première étant divergente et la seconde convergente, il n'y a pas entre elles d'égalité possible. Cependant la série (4) est, comme nous le verrons, celle qui représente $l(1-2x)$ dans laquelle on suppose $x = -1$. Les partisans des séries divergentes doivent donc dire, *elle est égale à* 13; Or la série (5), qui est convergente, peut s'obtenir en posant $y = -\frac{1}{2}$ dans le développement de $l\left(\frac{1-y}{1+y}\right)$, qui est alors convergent, et elle représente effectivement $l3$. La transformation d'Euler conduit donc dans ce cas à ce résultat paradoxal, qu'une série divergente peut servir au calcul numérique de la fonction qu'elle devrait représenter si les formules étaient générales.

252. La manière dont nous avons obtenu la formule de transformation d'Euler ne fait nullement voir dans quels cas elle peut être avantageuse, et n'indique pas la limite de l'erreur commise lorsqu'on s'arrête à un terme déterminé de la série transformée. Nous allons revenir en conséquence sur cette formule importante, pour en donner une seconde démonstration qui n'ait pas les mêmes inconvénients.

Soit la série

$$S = u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + \ldots + u_n - u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots, \tag{1}$$

dans laquelle $u_0, u_1, \ldots, u_n$, sont des nombres positifs décroissants. Soient S la limite de cette série, et s_n la somme de ses n premiers termes. Si l'on désigne, comme d'habitude, par Δu_n la différence $u_{n+1} - u_n$, on pourra écrire la série sous les deux formes suivantes :

$$\begin{aligned} S &= s_n - \Delta u_n - \Delta u_{n+2} - \Delta u_{n+4} - \ldots, \\ S &= s_n + u_n + \Delta u_{n+1} + \Delta u_{n+3} + \Delta u_{n+5} + \ldots, \end{aligned} \tag{2}$$

la somme S, étant égale à chacune de ces deux expressions, est égale à leur demi-somme, et l'on a par conséquent

$$S = s_n + \frac{1}{2} u_n - \frac{1}{2}(\Delta u_n - \Delta u_{n+1} + \Delta u_{n+2} - \Delta u_{n+3} + \ldots). \tag{3}$$

Si les différences Δu_n, Δu_{n+1}, Δu_{n+2}, qui sont toutes négatives, vont en diminuant en valeur absolue, ce qui a lieu dans un grand nombre de cas, la série placée entre parenthèses est de même nature que la proposée, et sa valeur complète est moindre que son premier terme, en sorte qu'en prenant

$$S = s_n + \frac{1}{2} u_n, \tag{4}$$

l'erreur commise est moindre que $\frac{1}{2}\Delta u_n$. Si l'on avait adopté la valeur

$$S = s_n + u_n, \tag{5}$$

l'erreur commise eût été moindre que u_{n+1}. Δu_n étant négatif, on voit qu'il faut préférer la formule (4) à la formule (5) toutes les fois que

$$-\frac{1}{2}\Delta u_n < u_{n+1},$$

c'est-à-dire

$$u_n - u_{n+1} < 2u_{n+1},$$

$$u_n < 3u_{n+1}.$$

Cette relation aura toujours lieu pour les séries peu convergentes, dont les termes décroissent lentement.

On a trouvé

$$S = s_n + \frac{1}{2} u_n - \frac{1}{2}(\Delta u_n - \Delta u_{n+1} + \Delta u_{n+2} \ldots). \tag{6}$$

Cette équation peut s'écrire

$$S = s_n + \frac{1}{2} u_n - \frac{1}{2}\Delta u_n + \frac{1}{2}(\Delta u_{n+1} - \Delta u_{n+2} + \Delta u_{n+3} \ldots); \tag{7}$$

or, en vertu de la relation $\Delta^2 u_n = \Delta u_{n+1} - \Delta u_n$, les formules (6) et (7) peuvent s'écrire de la manière suivante :

$$S = s_n + \frac{1}{2} u_n + \frac{1}{2}(\Delta^2 u_n + \Delta^2 u_{n+2} + \Delta^2 u_{n+4} + \ldots), \tag{8}$$

$$S = s_n + \frac{1}{2} u_n - \frac{1}{2}\Delta u_n - \frac{1}{2}(\Delta^2 u_{n+1} + \Delta^2 u_{n+3} + \ldots), \tag{9}$$

et, en formant la demi-somme des deux expressions de S,

$$S = s_n + \frac{1}{2} u_n - \frac{1}{4}\Delta u_n + \frac{1}{4}(\Delta^2 u_n - \Delta^2 u_{n+1} + \Delta^2 u_{n+2} - \Delta^2 u_{n+3} \ldots).$$

Si les différences $\Delta^2 u_n$, $\Delta^2 u_{n+1}$, $\Delta^2 u_{n+2}$, ..., sont de même signe et vont en décroissant, la série entre parenthèses sera de même nature que la proposée, et, en la négligeant tout entière, l'erreur commise sera moindre que son premier terme. On pourra donc prendre

$$S = s_n + \frac{1}{2} u_n - \frac{1}{4}\Delta u_n.$$

L'erreur commise étant moindre que $\frac{1}{4}\Delta^2 u_n$, la formule

$$S = s_n + \frac{1}{2}u_n - \frac{1}{4}\Delta u_n + \frac{1}{4}(\Delta^2 u_n - \Delta^2 u_{n+1} + \Delta^2 u_{n+2} - \dots)$$

peut s'écrire

$$S = s_n + \frac{1}{2}u_n - \frac{1}{4}\Delta u_n - \frac{1}{4}(\Delta^3 u_n + \Delta^3 u_{n+2} + \dots),$$

et de même l'équation (9) peut être mise sous la forme

$$S = s_n + \frac{1}{2}u_n - \frac{1}{4}\Delta u_n + \frac{1}{4}\Delta^2 u_n + \frac{1}{4}(\Delta^3 u_{n+1} + \Delta^3 u_{n+2} + \dots),$$

et, en prenant la demi-somme de ces valeurs de S,

$$S = s_n + \frac{1}{2}u_n - \frac{1}{4}\Delta u_n + \frac{1}{8}\Delta^2 u_n - \frac{1}{4}(\Delta^3 u_n - \Delta^3 u_{n+1} + \Delta^3 u_{n+2} + \dots).$$

Si les différences $\Delta^3 u_n$, $\Delta^3 u_{n+1}, \dots$, sont de mêmes signes et décroissantes, la série entre parenthèses sera, comme les précédentes, plus petite que son premier terme, et en prenant

$$S = s_n + \frac{1}{2}u_n - \frac{1}{4}\Delta u_n + \frac{1}{8}\Delta^2 u_n,$$

l'erreur commise sera moindre que $\frac{1}{8}\Delta^3 u_n$.

Le même raisonnement peut se répéter indéfiniment, et l'on peut écrire

$$S = s_n + \frac{1}{2}u_n - \frac{1}{4}\Delta u_n + \frac{1}{8}\Delta^2 u_n - \frac{1}{16}\Delta^3 u_n + \dots - \frac{(-1)^p}{2p}\Delta^{p-1} u_n,$$

l'erreur commise étant moindre que $\frac{1}{2^p}\Delta^p u_n$, pourvu que les valeurs absolues des termes de la série aient leurs différences d'ordre inférieur à p de mêmes signes et décroissantes.

Soient, par exemple,

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots,$$

on a dans ce cas

$$u_n = \frac{1}{n}, \quad \Delta u_n = \frac{-1}{n.(n+1)}, \quad \Delta^2 u_n = \frac{1}{n.(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{2}{n.(n+1)(n+2)},$$

$$\Delta^3 u_n = \frac{2}{(n+1)(n+2)(n+3)} - \frac{2}{n.(n+1)(n+2)} = -\frac{2.3}{n.(n+1)(n+2)(n+3)},$$

$$\Delta^4 u_n = \frac{2.3.4}{n\,(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)},$$

$$\Delta^5 u_n = -\frac{2.3.4.5}{n\,(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)}.$$

Les conditions admises dans la démonstration précédente sont donc remplies; en faisant $n = 11$, on trouve

$$s_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10},$$

$$u_n = \frac{1}{11}, \quad \Delta u_n = -\frac{1}{11.12}, \quad \Delta^2 u_n = \frac{2}{11.12.13}, \quad \Delta^3 u_n = -\frac{6}{11.12.13.14},$$

$$\Delta^4 u_n = \frac{24}{11.12.13\ 14.15}, \quad \Delta^5 u_n = -\frac{120}{11.12.13.14.15.16},$$

et la formule

$$S = s_n + \frac{1}{2} u_n - \frac{1}{4} \Delta u_n + \frac{1}{8} \Delta^2 u_n - \frac{1}{16} \Delta^3 u_n + \frac{1}{32} \Delta^4 u_n - \frac{1}{64} \Delta^5 u_n$$

donne

$$\begin{array}{rr} S = & 0{,}64563492 \\ + & 4545455 \\ + & 189394 \\ + & 14569 \\ + & 1561 \\ + & 208 \\ + & 33 \\ + & 1 \\ \hline \end{array}$$

c'est-à-dire $S = 0{,}6931473$

La série représente, comme on le verra, le logarithme népérien de 2, et les sept décimales sont exactes.

Méthode de Stirling.

253. Nous devons citer encore la méthode proposée par Stirling en 1717 pour la sommation des séries, et qui consiste à transformer chaque terme de la série proposée en une série indéfinie de telle forme que les termes correspondants des séries successives puissent être facilement sommés. Il arrive souvent que par cet artifice une série est transformée en une autre qui converge bien plus rapidement et dont le calcul numérique est par suite beaucoup plus facile.

Les séries auxquelles Stirling cherche à ramener toutes les autres sont les suivantes (**222**):

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z(z+1)} + \frac{1}{(z+1)(z+2)} + \ldots,$$

$$\frac{1}{2}\,\frac{1}{z.z+1} = \frac{1}{z.(z+1)(z+2)} + \frac{1}{(z+1)(z+2)(z+3)} + \ldots,$$

$$\frac{1}{3}\,\frac{1}{z.(z+1)(z+2)} = \frac{1}{z.(z+1)(z+2)(z+3)} + \frac{1}{(z+1)(z+2)(z+3)(z+4)} + \ldots.$$

Il réussit dans un grand nombre de cas à atteindre ce but, sans faire connaître toutefois de règle générale qui puisse y conduire.

La formule suivante est une des plus remarquables et la seule que nous citerons :

$$\frac{1}{z^2+nz}=\frac{1}{z(z+1)}+\frac{1-n}{z.(z+1)(z+2)}+\frac{(2-n)(1-n)}{z.(z+1)(z+2)(z+3)}$$
$$+\frac{(3-n)(2-n)(1-n)}{z.(z+1)(z+2)(z+3)(z+4)}+\ldots,$$

la série qui forme le second membre étant indéfinie quand n n'est pas entier. La démonstration est d'ailleurs bien facile; en retranchant du premier membre le premier terme du second, puis la somme des deux premiers, celle des trois premiers, on obtient successivement :

$$\frac{1}{z.(z+n)}-\frac{1}{z.(z+1)}=\frac{1-n}{z(z+1)(z+n)},$$

$$\frac{1}{z.(z+n)}-\frac{1}{z.(z+1)}-\frac{1-n}{z.(z+1)(z+2)}=\frac{(1-n)(2-n)}{z(z+1)(z+2)(z+n)},$$

$$\frac{1}{z(z+n)}-\frac{1}{z.(z+1)}-\frac{1-n}{z.(z+1)(z+2)}-\frac{(1-n)(2-n)}{z.(z+1)(z+2)(z+3)}$$
$$=\frac{(1-n)(2-n)(3-n)}{z.(z+1)(z+2)(z+3)(z+n)};$$

et, par suite, l'erreur commise en arrêtant la somme au terme de rang p, est

$$\frac{(1-n)(2-n)\ldots(p-n)}{z.(z+1)(z+2)\ldots(z+p)(z+n)},$$

et cette erreur tend vers zéro (**242**), pourvu que $z+n$ soit positif.

254. Supposons que la série à sommer soit

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\ldots.$$

On a, en faisant $n=0$ dans la formule du paragraphe précédent,

$$\frac{1}{z^2}=\frac{1}{z.(z+1)}+\frac{1}{z.(z+1)(z+2)}+\frac{1.2}{z.(z+1)(z+2)(z+3)}+\ldots.$$

On en conclut que la série

$$\frac{1}{z^2}+\frac{1}{(z+1)^2}+\frac{1}{(z+2)^2}+\ldots$$

peut être remplacée par la somme des suivantes :

$$\frac{1}{z.(z+1)}+\frac{1}{(z+1)(z+2)}+\frac{1}{(z+2)(z+3)}+\ldots$$
$$+\frac{1}{z.(z+1)(z+2)}+\frac{1}{(z+1)(z+2)(z+3)}+\ldots$$
$$+\frac{1.2}{z.(z+1)(z+2)(z+3)}+\frac{1.2}{(z+1)(z+2)(z+3)(z+4)}+\ldots$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

et, en remplaçant la somme de chacune des séries inscrites dans une ligne horizontale, par sa valeur connue, on a enfin

$$\frac{1}{z^2}+\frac{1}{(z+1)^2}+\frac{1}{(z+2)^2}+\ldots=\frac{1}{z}+\frac{1}{2z.(z+1)}+\frac{1.2}{3.z.(z+1)(z+2)}.$$

Si l'on suppose $z=12$, la série qui forme le second membre est très-convergente, et la somme de ses 14 premiers termes donne 0,079957427; les 11 premiers termes de la série proposée ont d'ailleurs pour somme 1,558032 23479, et la somme totale est, par suite, avec une grande approximation,

$$1,644934065.$$

Nous verrons plus tard que cette somme est $\frac{\pi^2}{6}$.

Nous reviendrons dans un autre chapitre sur les développements analogues à ceux sur lesquels Stirling fait reposer sa méthode.

Méthode de M. Kummer.

255. Il existe une méthode due à M. Kummer, et fort utile souvent pour calculer avec une grande approximation et très-rapidement la limite de la somme des termes d'une série peu convergente à termes positifs.

Soit la série convergente

$$u_0+u_1+u_2+\ldots+u_n+u_{n+1}+u_{n+2}+\ldots;$$

partageons-la en deux parties :

$$S_n=u_0+u_1+\ldots+u_n,$$
$$R=u_{n+1}+u_{n+2}+u_{n+3}+\ldots.$$

S_n étant la somme d'un nombre limité de termes, on le calculera directement. Quant au reste R, nous devons nous borner à avoir sa valeur approchée.

Pour obtenir cette valeur, on détermine deux fonctions du nombre n, $\varphi(n)$ et $f(n)$, assujetties aux conditions suivantes :

1° Le produit $\varphi(n)\,u_n$ tend vers zéro lorsque n augmente;

2° $f(n)$ s'approche indéfiniment de l'unité lorsque n augmente;

3° Il existe entre les fonctions φ et f la relation

$$f(n)=\varphi(n)\frac{u_n}{u_{n+1}}-\varphi(n+1), \tag{1}$$

qui a lieu pour toutes les valeurs de n.

Faisons voir d'abord que, ces conditions étant supposées remplies, on peut en déduire une valeur approchée de R : on aura, en changeant dans l'équation (1) n en

$n+1$, $n+2$, $n+3$,..., et chassant les dénominateurs,

$$\begin{aligned}
f(n)\,u_{n+1} &= \varphi(n)\,u_n - \varphi(n+1)\,u_{n+1},\\
f(n+1)\,u_{n+2} &= \varphi(n+1)\,u_{n+1} - \varphi(n+2)\,u_{n+2},\\
f(n+2)\,u_{n+3} &= \varphi(n+2)\,u_{n+2} - \varphi(n+3)\,u_{n+3},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
f(n+k)\,u_{n+k+1} &= \varphi(n+k)\,u_{n+k} - \varphi(n+k+1)\,u_{n+k+1},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

En ajoutant toutes ces équations, on a

$$(2)\qquad f(n)\,u_{n+1} + f(n+1)\,u_{n+2} + f(n+2)\,u_{n+3} + \ldots + f(n+k)\,u_{n+k+1}\ldots = \varphi(n)\,u_n.$$

Or $f(n)$, $f(n+1)$, $f(n+2)$,..., différant par hypothèse fort peu de l'unité, le premier membre diffère fort peu de R, dont la valeur approchée est par conséquent $\varphi(n)\,u_n$.

On peut même remarquer que la formule (2) donne en général deux limites très-rapprochées entre lesquelles est compris le reste R. En effet, de l'équation

$$\varphi(n)\,u_n = f(n)\,u_{n+1} + f(n+1)\,u_{n+2} + \ldots$$

on déduit

$$(3)\qquad \frac{\varphi(n)\,u_n}{f(n)} = u_{n+1} + \frac{f(n+1)}{f(n)}\,u_{n+2} + \frac{f(n+2)}{f(n)}\,u_{n+3} + \ldots.$$

Or les fonctions $f(n)$, $f(n+1)$, $f(n+2)$,..., tendant vers l'unité, il arrivera en général qu'elles seront toutes plus grandes que l'unité et décroissantes, ou toutes moindres que l'unité et croissantes. Dans le premier cas, les fractions qui multiplient u_{n+1}, u_{n+2},..., sont plus grandes que l'unité dans l'équation (2), et moindres que l'unité dans l'équation (3) : on a donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{R} &< \varphi(n)\,u_n,\\
\mathrm{R} &> \frac{\varphi(n)\,u_n}{f(n)}.
\end{aligned}$$

Dans le second cas, $f(n)$, $f(n+1)$,..., étant moindres que l'unité, on aura, au contraire,

$$\begin{aligned}
\mathrm{R} &> \varphi(n)\,u_n,\\
\mathrm{R} &< \frac{\varphi(n)\,u_n}{f(n)},
\end{aligned}$$

et par conséquent R est compris dans les deux cas entre deux limites connues, qui sont très-rapprochées, puisque $f(n)$ diffère peu de l'unité.

Toute la difficulté se réduit donc à la détermination des fonctions φ et f, et il est clair que les conditions qui leur sont imposées laissent subsister une grande indétermination.

Choisissons pour $\varphi(n)$ une fonction algébrique de la forme

$$\varphi(n) = cn + c' + \frac{a' n^{p-1} + a'' n^{p-2} + \ldots + a^{(p)}}{n^p + b' n^{p-1} + b'' n^{p-2} + \ldots + b^{(p)}}.$$

La fonction, développée, par la division, suivant les puissances descendantes de n, donnera pour $\varphi(n)$ une série de la forme

$$\varphi(n) = cn + c' + \frac{c''}{n} + \frac{c'''}{n^2} + \frac{c^{IV}}{n^3} + \frac{c^{V}}{n^4} + \ldots. \tag{4}$$

Regardons c, c', c'',..., comme connus, l'équation (4) fera connaître $f(n)$: on a, en effet,

$$f(n) = \varphi(n)\frac{u_n}{u_{n+1}} - \varphi(n+1). \tag{5}$$

Supposons que le rapport $\frac{u_n}{u_{n+1}}$ soit exprimé par une série de la forme

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = 1 + \frac{\theta'}{n} + \frac{\theta''}{n^2} + \frac{\theta'''}{n^3} + \ldots. \tag{6}$$

On aura, en changeant n en $n+1$ dans (4),

$$\varphi(n+1) = c(n+1) + c' + \frac{c''}{n+1} + \frac{c'''}{(n+1)^2} + \frac{c^{IV}}{(n+1)^3} + \frac{c^{V}}{(n+1)^4} + \ldots,$$

mais on a (**225**)

$$\frac{1}{n+1} = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3} + \ldots\right),$$

$$\frac{1}{(n+1)^2} = \frac{1}{n^2}\left(1 - \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2} - \frac{4}{n^3} + \ldots\right),$$

$$\frac{1}{(n+1)^3} = \frac{1}{n^3}\left(1 - \frac{3}{n} + \frac{6}{n^2} - \frac{10}{n^3} + \ldots\right),$$

et, par suite,

$$\varphi(n+1) = cn + c + c' + \frac{c''}{n}\left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \ldots\right) + \frac{c'''}{n^2}\left(1 - \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2} - \ldots\right) + \frac{c^{IV}}{n^3}\left(1 - \frac{3}{n} + \frac{6}{n^2} - \ldots\right). \tag{7}$$

En ayant égard aux équations (4), (6) et (7), la formule (5) devient

$$
\begin{aligned}
f(n) = c(\theta'-1) &+ \frac{1}{n}\left[c'\theta' + c\theta''\right] + \frac{1}{n^2}\left[c''(\theta'+1) + c'\theta'' + c\theta'''\right] \\
&+ \frac{1}{n^3}\left[c'''(\theta'+2) + c''(\theta''-1) + c'\theta''' + c\theta^{\text{IV}}\right] \\
&+ \frac{1}{n^4}\left[c^{\text{IV}}(\theta'+3) + c'''(\theta''-3) + c''(\theta'''+1) + c'\theta^{\text{IV}} + c\theta^{\text{V}}\right] \\
&+ \frac{1}{n^5}\left[c^{\text{V}}(\theta'+4) + c^{\text{IV}}(\theta''-6) + c'''(\theta'''+4) + c''(\theta^{\text{IV}}-1) + c'\theta^{\text{V}} + c\theta^{\text{VI}}\right] \\
&+ \frac{1}{n^6}\left[c^{\text{VI}}(\theta'+5) + c^{\text{V}}(\theta''-10) + c^{\text{IV}}(\theta'''+10) + c'''(\theta^{\text{IV}}-5) + c''(\theta^{\text{V}}+1) + c'\theta^{\text{VI}} + c\theta^{\text{VII}}\right] \\
&+ \frac{1}{n^7}\left[c^{\text{VII}}(\theta'+6) + c^{\text{VI}}(\theta''-15) + c^{\text{V}}(\theta'''-20) + c^{\text{IV}}(\theta^{\text{IV}}-15)\right. \\
&\quad \left. + c'''(\theta^{\text{V}}+6) + c''(\theta^{\text{VI}}+1) + c'\theta^{\text{VII}} + c\theta^{\text{VIII}}\right] \\
&+ \frac{1}{n^8}\left[c^{\text{VIII}}(\theta'+7) + c^{\text{VII}}(\theta''-21) + c^{\text{VI}}(\theta'''+35) + c^{\text{V}}(\theta^{\text{IV}}-35)\right. \\
&\quad \left. + c^{\text{IV}}(\theta^{\text{V}}+21) + c'''(\theta^{\text{VI}}-7) + c''(\theta^{\text{VII}}+1) + c'\theta^{\text{VIII}} + c\theta^{\text{IX}}\right] \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

Or, pour une valeur infinie de n, on doit avoir $f(n) = 1$; il faut donc que le terme constant de la valeur de $f(n)$ soit égal à $+1$, et par suite

$$1 = c(\theta' - 1);$$

de plus, comme on connaît θ, θ', θ'',..., puisque le rapport $\frac{u_n}{u_{n+1}}$ est connu en fonction de n, on pourra déterminer c, c', c'',..., de manière à faire évanouir le plus de termes possible de l'expression $f(n)$, afin que la différence $f(n) - 1$ soit aussi petite que possible. Ayant déterminé de cette manière $2p + 1$ coefficients de la série

$$\frac{c''}{n} + \frac{c'''}{n^2} + \frac{c^{\text{IV}}}{n^3} + \ldots,$$

on formera la fraction

$$\frac{a' n^{p-1} + a'' n^{p-2} + a''' n^{p-3} + \ldots + n^{(p)}}{n^p + b' n^{p-1} + \ldots + b^{(p)}},$$

dont le développement en série donnera l'expression (4); il suffira, pour cela, d'égaler les deux expressions et d'identifier les deux membres de l'équation après avoir chassé le dénominateur et égalé à zéro les coefficients des puissances négatives de n dans le second membre, en nombre assez grand pour déterminer b'', b''',..., b^p.

256. Appliquons la méthode précédente à un exemple.

Soit la série

$$1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \ldots + \frac{1}{n^4} + \ldots;$$

on a

$$u_n = \frac{1}{n^4}, \qquad \frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{(n+1)^4}{n^4} = 1 + \frac{4}{n} + \frac{6}{n^2} + \frac{4}{n^3} + \frac{1}{n^4}.$$

Par conséquent

$$\theta' = 4, \quad \theta'' = 6, \quad \theta''' = 4, \quad \theta^{IV} = 1, \quad \theta^{V} = 0, \quad \theta^{VI} = 0, \ldots.$$

Nous formerons d'abord la série

$$\varphi(n) = cn + c' + \frac{c''}{n} + \frac{c'''}{n^2} + \frac{c^{IV}}{n^3} + \ldots;$$

c, c', c'',..., seront donnés par les équations

$$0 = 3c - 1, \qquad \text{On en déduit} \quad c = \frac{1}{3};$$

$$0 = 4c' + 6c, \qquad c' = -\frac{1}{2};$$

$$0 = 5c'' + 6c' + 4c, \qquad c'' = +\frac{1}{3},$$

$$0 = 6c''' + 5c'' + 4c' + c, \qquad c''' = 0,$$

$$0 = 7c^{IV} + 5c'' + c', \qquad c^{IV} = -\frac{1}{6},$$

$$0 = 8c^{V}, \qquad c^{V} = 0,$$

$$0 = 9c^{VI} + 14c^{IV} + c'', \qquad c^{VI} = +\frac{2}{9},$$

$$0 = 10c^{VII} - 9c^{VI} - 14c^{IV} - c'', \qquad c^{VII} = 0,$$

$$0 = 11c^{VIII} + 39c^{VI} + 21c^{IV} + c'', \qquad c^{VIII} = -\frac{1}{2},$$

$$0 = 22c^{IX} - 22c^{VIII} - 69c^{VI} - 28c^{IV} - c'', \qquad c^{IX} = 0,$$

et

$$\varphi(n) = \frac{4}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3n} - \frac{1}{6n^3} + \frac{2}{9n^5} - \frac{1}{9n^7} + \ldots.$$

Déterminons actuellement la fraction

$$\varphi(n) = \frac{n}{3} - \frac{1}{2} + \frac{a''n^2 + a^{IV}}{n^4 + b''n^2 + b^{IV}},$$

qui, réduite en série par la division, donne les premiers termes que nous venons d'écrire. On trouve par la méthode des coefficients indéterminés

$$\varphi(n) = \frac{n}{3} - \frac{1}{2} + \frac{10n^3 + 23n}{30n^4 + 84n^2 + 22}.$$

Si l'on pose $n = 10$, on a par calcul direct

$$1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{6^4}+\frac{1}{7^4}+\frac{1}{8^4}+\frac{1}{9^4}+\frac{1}{10^4}=1,08203\,65834\,93756\,5;$$

d'ailleurs

$$\frac{\varphi(10)}{10^4}=0,00028\,66502\,17341\,9;$$

donc la somme de la série est approximativement

$$S=1,08232\,32337\,11098\,4.$$

En calculant $\varphi(11)$, on trouve

$$\varphi(11)=3,19684\,58325\,175;$$

donc

$$f(10)=\varphi(10)\frac{u_{10}}{u_{11}}-\varphi(11)=1-0,00000\,00004\,147,$$

et la seconde limite, qui comprend entre elle et S la valeur de la série, sera

$$\frac{\varphi(10)}{10^4 f(10)}=1,08232\,32337\,11217\,3;$$

la moyenne arithmétique entre ces deux nombres est

$$1,18232\,32337\,11158.$$

Nous verrons plus tard que la série considérée est égale à $\frac{\pi^4}{90}$; or on a

$$\begin{aligned} \text{l.}\pi &= 0,49714\,98726\,94133\,85435\,127,\\ \text{l.}\pi^4 &= 1,98859\,94907\,76535\,41741,\\ \pi^4 &= 97,40909\,10340\,02437\,233, \end{aligned}$$

et

$$\frac{\pi^4}{90}=1,08232\,32337\,11138\,19148,$$

en sorte que la valeur trouvée a 13 chiffres exacts.

257. On peut se demander combien il faudrait calculer de termes pour avoir une approximation aussi grande. Soit x le nombre des termes, le reste négligé en prenant x termes doit être moindre que $\frac{2}{10^{14}}$. Or l'erreur est approximativement $\frac{\varphi(x)}{x^4}$, et l'on trouve que cette fraction ne devient inférieure à $\frac{2}{10^{14}}$ que pour une valeur de x supérieure à 25500.

Nous avons donc obtenu avec dix termes un résultat qui en exigerait 25500 par calcul direct.

Séries ordonnées suivant les puissances d'une variable.

258. On fait un fréquent usage de séries ordonnées suivant les puissances croissantes d'une lettre qui reste indéterminée. Soit

$$(A) \qquad a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

une telle série.

L'étude de la convergence des séries de cette forme conduit au théorème suivant, qui est remarquable et important :

Si dans la série (A) *les coefficients* a_0, a_1, ... a_n *sont des constantes données et* x *une variable pouvant recevoir toutes les valeurs réelles ou imaginaires, la série étant convergente pour une valeur* $x = x_1$ *de la variable, l'est à fortiori pour toute valeur de* x *dont le module est inférieur à celui de* x_1.

La série étant, en effet, convergente pour $x = x_1$, cela exige évidemment que le terme de rang n

$$a_n x_1^n$$

tende vers zéro lorsque n augmente. D'après cela, soit M le plus grand module des termes de la série

$$(1) \qquad a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \ldots + a_n x_1^n + \ldots .$$

Si l'on substitue à x une valeur nouvelle x_2, la série deviendra

$$(2) \qquad a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + \ldots ,$$

que l'on peut écrire

$$(3) \qquad a_0 + a_1 x_1 \left(\frac{x_2}{x_1}\right) + a_2 x_1^2 \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2 + \ldots + a_n x_1^n \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^n + \ldots .$$

Soit r le module du rapport $\frac{x_2}{x_1}$, les termes de la série (3) ont respectivement des modules moindres que ceux de la série à termes positifs

$$M + Mr + Mr^2 + Mr^3 + \ldots + Mr^n + \ldots ,$$

qui évidemment est convergente; car c'est une progression décroissante. La série (3) est donc à fortiori convergente.

La démonstration précédente, sans qu'il y ait rien à y changer, prouve le théorème suivant :

Si pour une valeur $x = x_1$ *de la lettre ordonnatrice les termes de la série*

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

ont des modules inférieurs à un nombre fixe M, *pour toute valeur de* x *dont le module est moindre que celui de* x_1, *la série est convergente.*

259. Si une série ordonnée suivant les puissances de x est divergente pour une valeur x_1 de la variable x, elle est à fortiori divergente lorsqu'on donne à x une valeur x_2 de module supérieur à celui de x_1.

Si, en effet, pour $x = x_2$ la série était convergente, elle le serait (258) pour la valeur $x = x_1$ dont le module est moindre.

Ainsi donc les valeurs de x qui rendent convergente une série de la forme considérée sont toujours celles dont le module est inférieur à une certaine limite.

Si l'on considère, par exemple, la série

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots, \tag{1}$$

elle est convergente pour toutes les valeurs de x dont le module est inférieur à l'unité et divergente pour celles dont le module est plus grand que l'unité.

En général, il y a doute pour les valeurs de x dont le module est précisément égal à la limite. Dans le cas de la progression (1), si l'on donne à x une valeur dont le module soit l'unité

$$x = \cos\varphi + \sqrt{-1}\,\sin\varphi,$$

la série devient

$$1 + \cos\varphi + \cos 2\varphi + \cos 3\varphi + \ldots + \cos n\varphi + \ldots + \sqrt{-1}\,(\sin\varphi + \sin 2\varphi + \ldots + \sin n\varphi + \ldots);$$

elle n'est pas convergente, car les termes de la partie réelle et ceux de la partie imaginaire ne tendent pas vers zéro avec n.

260. Un grand nombre de théorèmes relatifs aux expressions imaginaires s'expriment ou se démontrent avec plus de simplicité ou d'élégance à l'aide d'un mode de représentation dont nous ferons un fréquent usage. L'expression $a + b\sqrt{-1}$ est considérée comme correspondant à un point qui a sur un plan, par rapport à des axes de coordonnées rectangulaires, les coordonnées a et b. La distance de ce point à l'origine est égale au *module* de l'expression imaginaire, et l'angle qu'elle forme avec l'axe des x est *l'argument*.

La somme de deux expressions imaginaires correspondant respectivement aux points B et C est évidemment représentée par l'extrémité d'une droite menée par l'un des points, parallèle et égale au rayon vecteur qui réunit l'autre à l'origine des coordonnées. La seule inspection de la figure permet d'en conclure que le module de la somme de deux expressions imaginaires est moindre que la somme des modules, et ce théorème s'étend par suite évidemment à un nombre quelconque d'expressions imaginaires.

261. Une série ordonnée suivant les puissances croissantes d'une variable x est, d'après le paragraphe 259, convergente pour les valeurs de x qui correspondent aux points intérieurs à un certain cercle décrit de l'origine comme centre. Ce cercle se nomme *cercle de convergence :* son rayon peut être nul, et la série n'est alors jamais convergente; il peut arriver aussi qu'il soit infini, et la série n'est jamais divergente.

262. La série

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots \tag{1}$$

a le même cercle de convergence que la série

$$a_1 + 2a_2 x + \ldots + n a_n x^{n-1} + \ldots, \tag{2}$$

fournie par les dérivées de ses termes.

Soit en effet R le rayon du cercle de convergence. La série (1) est par hypothèse divergente pour toute valeur de x dont le module surpasse R, et l'on sait (259) que pour de telles valeurs les modules de ses termes croissent indéfiniment. Si donc nous attribuons à x une valeur dont le module ρ_1 surpasse R, A_n étant le module de a_n, le terme $a_n x^n$ aura pour module

$$A_n \rho_1^n,$$

qui, d'après ce qu'on a supposé, augmente sans limite avec n. Le terme correspondant de la série (2) a pour module

$$n A_n \rho_1^{n-1} = \frac{n}{\rho_1} \cdot A_n \rho_1^n, \tag{3}$$

et il est évident que $\frac{n}{\rho_1}$ augmentant lui-même indéfiniment, ce nouveau module est infini avec n, comme le précédent. La série (2) est donc divergente pour les valeurs de x qui correspondent à des points situés en dehors du cercle de convergence de la première.

Attribuons en second lieu à la variable x une valeur dont le module ρ_2 soit inférieur à R, le module du terme $a_n x^n$ sera

$$A_n \rho_2^n,$$

et la série dont ce module est le terme général est convergente et a tous ses termes positifs.

Le module du terme correspondant de la série (2) est

$$n A_n \rho_2^{n-1} = n \left(\frac{\rho_2}{R}\right)^{n-1} \cdot A_n R^{n-1}. \tag{4}$$

Or la série dont le terme général est $n\left(\frac{\rho_2}{R}\right)^{n-1}$ est évidemment convergente, car le rapport d'un terme au précédent a pour limite la fraction $\frac{\rho_2}{R}$ moindre que l'unité, et le facteur $A_n R^{n-1}$ par lequel il faut multiplier $n\left(\frac{\rho_2}{R}\right)^{n-1}$ pour obtenir l'expression (4), n'augmente pas indéfiniment. Il est clair, d'après cela, que la série dont le terme général est $nA_n\rho_2^{n-1}$ est convergente, et par conséquent la série (2) est convergente pour toutes les valeurs de la variable qui correspondent à des points intérieurs au cercle de convergence de la série (1).

Continuité des séries.

263. Lorsque les termes d'une série sont des fonctions continues d'une variable x, il semble évident au premier abord que la série, lorsqu'elle reste convergente, est elle-même une fonction continue de x, et cependant cette assertion ne serait pas toujours exacte. Si les termes d'une série convergente

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_n + \ldots$$

sont, en effet, fonctions continues de x, il est clair que, x variant infiniment peu, chaque terme variera infiniment peu; mais en est-il de même de la somme? Comme elle se compose d'un nombre infini de termes, on n'est pas en droit de l'affirmer.

Considérons, par exemple, la série

$$x(1-x) + x^2(1-x^2) + x^3(1-x^3) + \ldots; \tag{1}$$

tant que x est moindre que l'unité, cette série est convergente. On peut l'écrire

$$\begin{aligned} &x + x^2 + x^3 + \ldots, \\ &-x^2 - x^4 - x^6 - \ldots, \end{aligned}$$

et elle a évidemment pour somme

$$\frac{x}{1-x} - \frac{x^2}{1-x^2} = \frac{x}{1-x^2}.$$

Si donc x s'approche de l'unité, la série (1), toujours convergente, acquiert des valeurs de plus en plus grandes; or, pour $x = 1$, cette série est convergente encore et a pour somme zéro, puisque tous ses termes deviennent nuls.

Cet exemple, auquel nous aurons occasion d'en ajouter un grand nombre d'autres, montre quelles précautions on doit apporter dans les raisonnements relatifs aux séries.

264. Il est facile de démontrer le théorème suivant :

Lorsqu'une série

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_n + \ldots$$

dont tous les termes sont réels et fonctions d'une même variable x, est convergente pour toutes les valeurs de x comprises entre deux limites x_1 et x_2, et devient discontinue pour une valeur particulière $x = a$, de telle sorte que pour $x = a - \varepsilon$ et $x = a + \varepsilon$ la différence des valeurs qu'elle acquiert reste finie quand ε est infiniment petit, la série des dérivées

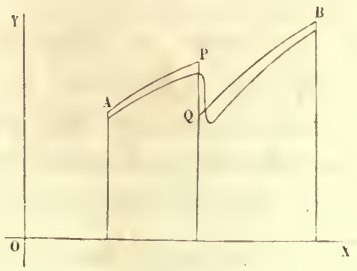
$$\frac{du_0}{dx} + \frac{du_1}{dx} + \ldots + \frac{du_n}{dx} + \ldots$$

est divergente pour $x = a$.

Si l'on considère, en effet, l'équation

$$y = u_0 + u_1 + \ldots + u_n + \ldots,$$

y est déterminé pour chaque valeur de x, et, puisqu'il y a discontinuité pour $x = a$, la courbe dont les points ont x pour abscisse et y pour ordonnée se compose de deux



branches distinctes, telles que AP et QB. Si l'on prend n termes seulement dans le second membre, la courbe dont les points ont pour ordonnées la somme de ces n termes représentera nécessairement une ligne continue qui, par sa nature, n'est coupée qu'en un point par chaque parallèle à l'axe des y. Or une telle ligne ne peut avoir pour limite la courbe composée des deux arcs AP et QB sans s'approcher en même temps de la ligne droite PQ qui les réunit; le coefficient angulaire de la tangente, c'est-à-dire

$$\frac{du_0}{dx} + \frac{du_1}{dx} + \ldots + \frac{du_n}{dx},$$

doit donc devenir infini pour $x = a$.

265. La remarque précédente, faite explicitement pour la première fois par M. Duhamel, permet de démontrer simplement un théorème dû à Abel, auquel les progrès de la science ont donné une importance capitale.

Une série de la forme

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

est continue pour toutes les valeurs réelles ou imaginaires de x qui correspondent aux points intérieurs à son cercle de convergence.

Posons, en effet,

$$x = \rho(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi), \tag{1}$$

la série devient

$$\begin{aligned} &a_0 + a_1\rho(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi) + a_2\rho^2(\cos 2\varphi + \sqrt{-1}\sin 2\varphi) + \dots \\ &+ a_n\rho^n(\cos n\varphi + \sqrt{-1}\sin n\varphi) + \dots . \end{aligned} \tag{2}$$

Cette série est convergente pour toutes les valeurs de ρ inférieures au rayon R du cercle de convergence. On peut considérer ses termes, soit comme fonctions de la variable ρ, soit comme fonctions de la variable φ, et, en appliquant le théorème précédent, on verra que la somme est une fonction continue de ρ, tant que la série

$$\begin{aligned} &a_1(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi) + 2a_2\rho(\cos 2\varphi + \sqrt{-1}\sin 2\varphi) + \dots \\ &+ na_n\rho^{n-1}(\cos n\varphi + \sqrt{-1}\sin n\varphi) + \dots \end{aligned} \tag{3}$$

ne devient pas infinie, mais cette série ne diffère de celle que forment pour la même valeur de x les dérivées des termes de (1), que par le facteur $(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)$; elle est donc convergente (**262**) pour les valeurs correspondantes aux points intérieurs au cercle de convergence de (1).

La somme de (2) est de même fonction continue de φ, tant que la série

$$\begin{aligned} &a_1\rho(-\sin\varphi + \sqrt{-1}\cos\varphi) + 2a_2\rho^2(-\sin 2\varphi + \sqrt{-1}\cos 2\varphi) + \dots \\ &+ na_n\rho^n(-\sin n\varphi + \sqrt{-1}\cos n\varphi) + \dots \end{aligned} \tag{4}$$

reste convergente; mais chaque terme de la série (4) est égal au terme correspondant de la série (3) multiplié par $\rho\sqrt{-1}$; elles sont donc convergentes en même temps, et la série (1) est fonction continue des deux variables ρ et φ pour les valeurs de x qui correspondent aux points intérieurs à son cercle de convergence.

266. Lorsque les termes d'une série convergente sont fonctions d'une variable x, et que leurs dérivées forment elles-mêmes une série convergente, la fonction représentée par la série est, d'après ce qu'on vient de dire, fonction continue de la variable; mais il ne faut pas affirmer que toutes les fois qu'une fonction est développée en série convergente, les dérivées de ses termes par rapport à la variable dont ils dépendent forment le développement en série de la dérivée de cette fonction.

Soit, par exemple, la série

$$\cos x + \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 4x}{4^2} + \dots ,$$

qui évidemment est convergente pour toute valeur réelle de x; si la proposition énoncée était exacte, non-seulement les dérivées de ses termes, mais les secondes, les troisièmes dérivées, formeraient des séries convergentes représentant les dérivées successives de la fonction représentée par la série proposée. Or les secondes dérivées forment la série

$$-\cos x - \cos 2x - \cos 3x - \ldots - \cos nx,$$

qui évidemment n'est pas convergente, puisque ses termes ne tendent pas vers zéro.

267. La remarque précédente montre clairement que le théorème suivant, quoiqu'il soit exact, ne peut être admis sans démonstration.

Si une série ordonnée suivant les puissances d'une variable x est convergente, et par conséquent continue pour les valeurs de cette variable dont le module est inférieur à un nombre donné R, les dérivées de ses termes forment pour les mêmes valeurs de la variable une série convergente dont la somme est la dérivée de la première.

La première partie de ce théorème résulte de ce qui précède. Bornons-nous donc à prouver que la série

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots \tag{1}$$

étant convergente pour les valeurs de x dont le module est moindre que R, elle a pour dérivée la série

$$a_1 + 2a_2 x + \ldots + n a_n x^{n-1} + \ldots,$$

qui, comme on l'a vu (262), est elle-même convergente.

Désignons, en effet, par $\varphi(x)$ la série (1), on aura, en y remplaçant x par $x+h$, et supposant h tellement choisi, que le module de $(x+h)$ soit moindre que R, et que par conséquent la série reste convergente,

$$\varphi(x+h) = a_0 + a_1(x+h) + a_2(x+h)^2 + \ldots + a_n(x+h)^n + \ldots. \tag{2}$$

Réunissons dans le second membre de cette équation tous les termes affectés d'une même puissance de h; il prendra la forme

$$P_1 h + P_2 h^2 + P_3 h^3 + \ldots + P_n h^n + \ldots \tag{3}$$

chacun des coefficients P_1, P_2,..., P_n,..., étant une série bien facile à former. P_1, par exemple, représente

$$a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + n a_n x^{n-1} + \ldots,$$

c'est-à-dire la série formée par les dérivées des termes de (1). P_2 est la série formée

par les secondes dérivées des mêmes termes, respectivement divisées par 2. P_3 est celle des troisièmes dérivées divisées par 1.2.3, et ainsi de suite. Toutes ces séries sont convergentes (262); mais il n'en faut pas moins démontrer qu'en changeant l'ordre des termes on n'a pas altéré la limite de leur somme, et que la série (3) représente $\varphi(x+h)$. Pour cela, considérons la somme des n premiers termes de la série (3), et retranchons-en la somme des n premiers termes du développement de $\varphi(x+h)$: la différence Δ est une série composée de tous les termes provenant des puissances de $(x+h)$ supérieures à la $n^{ième}$, et qu'il a fallu faire entrer dans les n premiers termes de la série (3). Or je dis que la somme de ces termes a pour limite zéro. Supposons en effet que, dans la série (2) on remplace à la fois x, h, et les coefficients a_0, a_1,..., a_n,... par leurs modules X, H, A_0, A_1... , A_n. La série restera convergente pourvu que X+H, moindre (260) que le module de $x+h$, soit inférieur à R. Mais, après ces diverses substitutions, on peut ordonner suivant les puissances de H, sans crainte d'altérer la somme de la série, car tous les termes que l'on intervertit sont essentiellement positifs. La différence entre la somme des n premiers termes dans les séries qui remplacent ainsi (2) et (3) aura donc pour limite zéro. Or cette différence est la somme des modules des termes qui composent la différence entre les n premiers termes de (2) et les n premiers termes de (3); cette différence tend donc à fortiori vers zéro, puisque le module d'une somme est moindre (260) que la somme des modules; la série (3) représente donc $\varphi(x+h)$, et l'on a,

$$\varphi(x+h)-\varphi(x)=P_1h+P_2h^2+\ldots+P_nh^n+\ldots.$$

Cette série étant convergente pour de petites valeurs de h, est (265) une fonction continue de cette variable, et l'on a

$$\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}=P_1+P_2h+\ldots+P_nh^n+\ldots,$$

en passant à la limite, h tendant vers zéro,

$$\varphi'(x)=P_1=a_1+2a_2x+\ldots+na_nx^{n-1}+\ldots,$$

comme on voulait le prouver.

268. D'après la démonstration précédente, si la série

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots$$

est convergente pour toutes les valeurs de x dont le module est inférieur à R, et que l'on en représente la somme par $\varphi(x)$, en donnant à x un accroissement h tel,

que le module de $x+h$ soit aussi moindre que R, on peut développer $\varphi(x+h)$ en série ordonnée suivant les puissances de h et écrire

$$\varphi(x+h)=\varphi(x)+P_1h+P_2h^2+\ldots+P_nh^n+\ldots,$$

P_1, P_2,..., P_n,..., étant les fonctions de x définies dans la démonstration précédente. De ce théorème on peut déduire le suivant, qui est important.

Si deux séries, ordonnées toutes deux suivant les puissances ascendantes d'une même variable x, sont égales pour toutes les valeurs de x dont les modules sont compris entre deux limites données ρ_1 et ρ_2, ces deux séries sont composées des mêmes termes et identiquement égales, par conséquent, pour toutes les valeurs de x.

Supposons d'abord que l'un des modules donnés, ρ_1 par exemple, soit égal à zéro. Les séries

$$\begin{aligned} &a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots,\\ &b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_nx^n+\ldots, \end{aligned} \tag{1}$$

étant égales pour toutes les valeurs de x dont le module est inférieur à ρ_2, si l'on fait $x=0$, elles doivent prendre même valeur. On a donc

$$a_0=b_0.$$

Supprimons ce terme commun dans les deux séries, et divisons-les ensuite l'une et l'autre par x; nous obtiendrons deux séries nouvelles

$$\begin{aligned} &a_1+a_2x+\ldots+a_nx^{n-1}+\ldots,\\ &b_1+b_2x+\ldots+b_nx^{n-1}+\ldots, \end{aligned} \tag{2}$$

qui sont évidemment convergentes et égales pour les valeurs de x dont le module est moindre que ρ_2, excepté toutefois peut-être pour le cas où $x=0$, car alors la division de tous les termes par x ne serait plus permise; mais, quoique la démonstration soit en défaut, la conclusion ne peut l'être, car les séries (2) étant fonctions continues de x ne peuvent être égales pour des valeurs aussi petites que l'on voudra de cette variable sans l'être aussi pour $x=0$. On a donc

$$a_1=b_1.$$

La même démonstration pourra être continuée indéfiniment et prouvera que les coefficients a_2, a_3,..., a_n sont respectivement égaux à b_2, b_3,..., b_n.

Supposons actuellement que les séries soient égales pour les valeurs de x dont le module est compris entre ρ_1 et ρ_2.

Adoptons la convention indiquée (260), d'après laquelle chaque expression imaginaire est représentée par un point d'un plan. Les deux séries ont, par hypothèse, même somme lorsque la valeur de x correspond aux points compris entre deux circonférences concentriques de rayons ρ_1 et ρ_2. Soit x l'une quelconque de ces valeurs correspondant à un point M, compris entre les deux circonférences. Si l'on change x en $x + h$ dans les séries, elles resteront convergentes et pourront, comme on l'a dit, être mises sous la forme

$$\begin{aligned} &P_0 + P_1 h + P_2 h^2 + \ldots + P_n h^n + \ldots, \\ &Q_0 + Q_1 h + Q_2 h^2 + \ldots + Q_n h^n + \ldots, \end{aligned} \tag{3}$$

pourvu que le module de $x + h$ ne dépasse pas la limite ρ_2; car on est sûr que, pour des valeurs du module qui remplissent cette condition, les deux séries restent convergentes. Les séries (3) étant équivalentes aux séries proposées, sont égales entre elles pour toutes les valeurs de h, telles que $x + h$ corresponde à un point compris entre les deux cercles.

Ce résultat signifie que les séries (3) sont équivalentes aux proposées pour les valeurs de x correspondantes aux points du cercle décrit de M comme centre et tangent à la circonférence de rayon ρ_2, et par suite égales entre elles pour tous les points de ce cercle situés dans la couronne comprise entre les deux circonférences. Mais, lorsque deux séries ordonnées suivant les puissances d'une lettre h sont égales pour toutes les valeurs de h dont le module est inférieur à une certaine limite, elles sont identiques. Les séries (3), et par suite les séries proposées, sont donc égales pour les valeurs de x qui correspondent à l'intérieur du petit cercle dont le centre est en M. La manière dont ce cercle a été défini permet de disposer du centre et du rayon de manière à comprendre dans son intérieur un point quelconque d'une couronne comprise entre le cercle de rayon ρ_2 et le cercle de rayon $\rho_1 - (\rho_2 - \rho_1) = 2\rho_2 - \rho_1$, et dont l'épaisseur, c'est-à-dire la différence des rayons des cercles limites, est double de la différence primitive $\rho_2 - \rho_1$. Des considérations semblables prouveront l'égalité des deux séries pour les valeurs de x correspondantes à l'intérieur d'une couronne deux fois plus large encore, et il est clair qu'on arrivera ainsi à prouver qu'elle s'étend jusqu'au centre des circonférences données; et les séries, égales pour $x = 0$ et pour les très-petites valeurs de cette variable, sont par conséquent identiques.

Multiplication de deux séries.

269. Nous expliquerons d'abord comment on peut multiplier deux séries convergentes à termes réels et positifs.

Soient les séries

$$S = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n, \tag{1}$$

$$S' = v_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_n, \tag{2}$$

Je dis que la série

$$u_0 v_0 + (u_0 v_1 + u_1 v_0) + (u_0 v_2 + u_1 v_1 + u_0 v_2) + \ldots + (u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \ldots + u_n v_0) + \ldots \tag{3}$$

est convergente et a pour limite le produit SS'.

Soient, en effet, S_n et S'_n les sommes des n premiers termes des séries (1) et (2), et S''_n celle des n premiers termes de la série (3). Si m est le plus grand nombre entier contenu dans $\frac{n-1}{2}$, le produit

$$u_0 v_0 + (u_0 v_1 + u_1 v_0) + \ldots + (u_0 v_n + \ldots + u_n v_0)$$

est évidemment compris entre

$$(u_0 + u_1 + \ldots + u_n)(v_0 + v_1 + \ldots + v_n),$$

qui comprend tous les mêmes termes et d'autres avec, et

$$(u_0 + u_1 + \ldots u_m)(v_0 + v_1 + \ldots + v_m),$$

dont tous les termes au contraire sont compris parmi ceux de (3), on a donc, puisque par hypothèse tous les termes sont positifs,

$$S''_{n+1} < S_{n+1} S'_{n+1},$$

$$S''_{n+1} > S_{m+1} S'_{m+1}.$$

Or si n croît indéfiniment, il en est de même de m; par suite S_{n+1} et S_{m+1} tendent vers S, S'_{n+1} et S'_{m+1} vers S', en sorte que S''_{n+1} est compris entre deux produits qui tendent l'un et l'autre vers SS' : il a donc pour limite SS'.

270. Considérons actuellement deux séries quelconques

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_n + \ldots, \tag{1}$$

$$v_0 + v_1 + \ldots + v_n + \ldots, \tag{2}$$

dont les termes soient positifs ou négatifs, réels ou imaginaires, mais tels, que leurs *modules* forment deux séries convergentes. Je dis que le théorème précédent leur est applicable.

Soient toujours S_n et S'_n les sommes des n premiers termes des deux séries, et

désignons en outre par S''_n la somme des n premiers termes de la série que l'on en déduit; on trouvera

$$S_n S'_n - S''_n = u_{n-1} v_{n-1} + (u_{n-1} v_{n-2} + u_{n-2} v_{n-2}) + \dots$$

De plus le théorème étant démontré lorsque tous les termes sont réels et positifs, dans cette hypothèse la différence $S_n S'_n - S''_n$, et par suite la somme

$$u_{n-1} v_{n-1} + (u_{n-1} v_{n-2} + u_{n-2} v_{n-1}) + \dots, \tag{3}$$

converge vers zéro.

Désignons actuellement par ρ, ρ_1, ρ_2, ρ', ρ'_1, ρ'_2,..., les modules des différents termes des séries (1) et (2). Les séries formées par ces modules étant par hypothèse convergentes, il résulte de ce qui précède que la somme

$$\rho_{n-1} \rho'_{n-1} + (\rho_{n-1} \rho'_{n-2} + \rho_{n-2} \rho'_{n-1}) + \dots \tag{4}$$

converge vers zéro pour des valeurs croissantes de n, et comme cette somme est supérieure au module de l'expression (3), ce dernier module, et par suite la différence $S_n S'_n - S''_n$, converge aussi vers zéro.

271. Le théorème précédent suppose non-seulement que les séries proposées soient convergentes, mais encore que les modules des différents termes forment des séries convergentes. On peut montrer par un exemple que s'il en est autrement, la proposition est quelquefois en défaut.

Considérons les deux séries égales et convergentes

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \dots,$$

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \dots,$$

et formons leur produit, qui est le carré de l'une d'elles, en nous conformant à la règle donnée, nous aurons

$$1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}}\right).$$

Or cette série est divergente, car le terme général

$$\pm\left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{2(n-1)}} + \frac{1}{\sqrt{3(n-2)}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

est supérieur à n fois le plus petit de ses termes, c'est-à-dire à

$$\frac{n}{\sqrt{\frac{n}{2}(n+1)}}$$

si n est pair, et à

$$\frac{n}{\left[\left(\frac{n+1}{2}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}} = \frac{2n}{n+1}$$

si n est impair. Le terme est donc toujours supérieur à l'unité, et la série n'est pas convergente.

EXERCICES.

1. On a

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \ldots + \frac{2}{n.(n+1)} + \ldots,$$

$$\frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \ldots + \frac{1.2.3}{n.n+1.n+2} + \ldots,$$

$$\frac{4}{3} = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{15} + \ldots + \frac{1.2.3.4}{n.(n+1)(n+2)(n+3)} + \ldots$$

2. On a

$$1 = \frac{1}{1.2} + \frac{2}{1.2.3} + \frac{3}{1.2.3.4} + \ldots + \frac{n-1}{1.2.3..\ n} + \ldots.$$

3. Démontrer la formule

$$\frac{1}{z^3} = \frac{1}{z.(z+1)(z+2)} + \frac{3}{z.(z+1)(z+2)(z+3)} + \ldots + \frac{A_n}{z.(z+1)(z+2)\ldots(z+n)},$$

A_n étant le coefficient de z^2 dans le produit $z.(z+1)(z+2)\ldots(z+n)$.

4. Connaissant la somme de la série

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots,$$

trouver

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n^2} + \ldots.$$

5. On a

$$\frac{5}{36} = \frac{1}{1.2.3.4.5} + \frac{4}{3.4.5.6} + \frac{9}{4.5.6.7} + \ldots + \frac{n^2}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} + \ldots,$$

la démonstration de cette formule repose sur l'identité

$$\frac{(n-1)^2}{n.(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{1}{n.(n+1)} - \frac{7}{n.(n+1)(n+2)} + \frac{16}{n.(n+1)(n+2)(n+3)}.$$

CHAPITRE II.

THÉORÈME DE TAYLOR.

Démonstration de Taylor.

272. Le théorème de Taylor permet de développer une fonction quelconque d'une variable en série ordonnée suivant les puissances de cette variable ou de l'accroissement qu'on lui attribue à partir d'une valeur arbitrairement fixée. La généralité de la formule est restreinte, il est vrai, par des conditions de convergence qui sont indispensables et que cependant les géomètres n'ont étudiées que longtemps après la découverte du théorème. Cette condition essentielle, à laquelle Taylor n'avait aucun égard, rend inacceptable pour nous la démonstration qui l'a conduit à sa mémorable découverte, et que nous commencerons cependant par faire connaître.

Soit $\varphi(x)$ une fonction de la variable x; changeons-y successivement x en $x+\Delta x$, $x+2\Delta x$, $x+3\Delta x, \ldots$, $x+n\Delta x$, et considérons la suite

$$\varphi(x), \quad \varphi(x+\Delta x), \quad \varphi(x+2\Delta x), \ldots, \quad \varphi(x+n\Delta x),$$

que nous écrirons, pour abréger,

$$y, \quad y_1, \quad y_2, \ldots, \quad y_n.$$

Posons, comme nous l'avons fait (**134**),

$$\begin{array}{lll} y_1 - y = \Delta y, & y_2 - y_1 = \Delta y_1, \ldots, & y_n - y_{n-1} = \Delta y_{n-1}, \\ \Delta y_1 - \Delta y = \Delta^2 y, & \Delta y_2 - \Delta y_1 = \Delta^2 y_1, \ldots, & \Delta y_{n-1} - \Delta y_{n-2} = \Delta^2 y_{n-2}, \\ \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y = \Delta^3 y, & \Delta^2 y_2 - \Delta^2 y_1 = \Delta^3 y_1, \ldots, & \Delta^2 y_{n-2} - \Delta^2 y_{n-3} = \Delta^3 y_{n-3}, \\ \ldots\ldots\ldots & & \\ \Delta^{n-1} y_1 - \Delta^{n-1} y = \Delta^n y. & & \end{array}$$

y_n peut s'exprimer, comme on sait, en fonction de y, Δy, $\Delta^2 y, \ldots$, $\Delta^n y$, et l'on a identiquement

$$y_n = y + n\Delta y + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 y + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\Delta^3 y + \ldots + \Delta^n y. \tag{1}$$

Cette formule est bien facile à vérifier quand on suppose $n=2$, $n=3, \ldots$, et l'on

peut prouver très-aisément que si elle est vraie pour une valeur de n, elle l'est, par cela même, pour la valeur immédiatement supérieure.

Cela posé, si dans l'identité (1) on suppose $n\Delta x = h$, et que l'on remplace n par la valeur $\frac{h}{\Delta x}$, y_n deviendra $\varphi(x+h)$, et l'on aura

$$(2)\quad \varphi(x+h) = y + h\frac{\Delta y}{\Delta x} + \frac{h.(h-\Delta x)}{1.2}\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} + \frac{h.(h-\Delta x)(h-2\Delta x)}{1.2.3}\frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3} + \dots,$$

et si, laissant h constant, on fait croître n indéfiniment, Δx devient infiniment petit, et l'équation, dont le second membre se prolonge alors indéfiniment, devient

$$(3)\quad \varphi(x+h) = \varphi(x) + h\,\varphi'(x) + \frac{h^2}{1.2}\varphi''(x) + \frac{h^3}{1.2.3}\varphi'''(x) + \dots.$$

Cette démonstration n'est pas rigoureuse, et c'est pour cela que nous nous bornons à en indiquer rapidement le principe : lorsqu'on suppose, en effet, que n augmente indéfiniment, il existe toujours dans le second membre de l'équation (2) un nombre de plus en plus grand de termes qui n'ont pas pour limites les termes correspondants de l'équation (3). Le terme général est, en effet,

$$\frac{h.(h-\Delta x)(h-2\Delta x)\dots[h-(p-1)\Delta x]}{1.2.3\dots p}\frac{\Delta^p y}{\Delta x^p},$$

en lui assignant pour limite

$$\frac{h^p}{1.2.3\dots p}\frac{d^p y}{dx^p}.$$

On suppose implicitement que $(p-1)\Delta x$ tende vers zéro, c'est-à-dire que p ne soit pas comparable à n; or le nombre des termes pour lesquels cette condition n'est pas remplie augmente indéfiniment avec n.

La démonstration de Taylor peut cependant être complétée et conduire à une preuve rigoureuse du théorème; mais il est beaucoup plus simple d'adopter une marche toute différente, et qui conduit immédiatement à une expression de l'erreur commise lorsque l'on arrête la série après l'un quelconque de ses termes.

Expression du reste de la série.

273. Démontrons d'abord un lemme fort simple dont nous avons à faire usage.

Lorsqu'une fonction continue $\varphi(x)$ est nulle pour deux valeurs a et b de la variable dont elle dépend, la dérivée $\varphi'(x)$ de cette fonction, si elle est elle-même continue, devient nulle pour une valeur de x comprise entre a et b.

Si, en effet, la dérivée $\varphi'(x)$ ne s'annulait pas, elle aurait toujours le même signe

entre les limites a et b, la fonction $\varphi(x)$ serait, par conséquent, constamment croissante ou constamment décroissante lorsque x varierait de la valeur a à la valeur b, et ne pourrait pas, par conséquent, être nulle aux deux limites.

Cela posé, considérons la formule

$$(1) \qquad \varphi(X)=\varphi(x)+\frac{X-x}{1}\varphi'(x)+\frac{(X-x)^2}{1.2}\varphi''(x)+\ldots+\frac{(X-x)^n}{1.2.3\ldots n}\varphi^n(x)+R,$$

dans laquelle X et x désignent deux nombres donnés quelconques.

Cherchons à déterminer l'expression du nombre R qui rend cette formule exacte; pour cela, posons

$$R=\frac{(X-x)^{n+1}}{1.2\ldots n(n+1)}P,$$

P étant un nombre inconnu qu'il s'agit de déterminer. Si l'on remplace x par une lettre variable z susceptible de prendre toutes les valeurs, la différence des deux membres de (1) deviendra

$$\varphi(X)-\varphi(z)-(X-z)\varphi'(z)-\frac{(X-z)^2}{1.2}\varphi''(z)-\ldots-\frac{(X-z)^n}{1.2.3\ldots n}\varphi^n(z)-\frac{(X-z)^{n+1}}{1.2.3\ldots n+1}P,$$

et cette différence est nulle par hypothèse quand on suppose $z=x$; elle est évidemment nulle aussi, d'après sa forme même, pour $z=X$, et, par conséquent, la dérivée par rapport à z est nulle pour une certaine valeur de z comprise entre x et X. Or cette dérivée, si l'on supprime les termes qui se détruisent, se réduit à

$$\frac{-(X-z)^n}{1.2\ldots n}\varphi^{n+1}(z)+\frac{(X-z)^n}{1.2\ldots n}P.$$

La valeur de z pour laquelle elle s'annule, étant comprise entre x et X, peut être représentée par $x+\theta(X-x)$, θ étant moindre que l'unité. On a donc

$$P=\varphi^{n+1}[x+\theta(X-x)],$$

et, par suite,

$$R=\frac{(X-x)^{n+1}}{1.2.3\ldots(n+1)}\varphi^{n+1}[x+\theta(X-x)].$$

Si l'on pose $X-x=h$, et que l'on remplace R par cette valeur dans l'équation (1), on a enfin

$$\varphi(x+h)=\varphi(x)+h\varphi'(x)+\frac{h^2}{1.2}\varphi''(x)+\ldots+\frac{h^n}{1.2\ldots n}\varphi^n(x)+\frac{h^{n+1}}{1.2.3\ldots(n+1)}\varphi^{n+1}(x+\theta h).$$

Dans cette formule, n est arbitraire, si on lui attribue une valeur indéfiniment croissante, le second membre, abstraction faite du dernier terme, devient la série

trouvée par Taylor, qui est exacte, par conséquent, toutes les fois que le dernier terme

$$\frac{h^{n+1}}{1.2.3\ldots n+1}\varphi^{n+1}(x+\theta h)$$

tend vers zéro lorsque n augmente.

Le reste renfermant dans son expression un nombre indéterminé θ, il sera quelquefois difficile de décider s'il tend ou non vers zéro. On peut remarquer toutefois que le facteur $\frac{h^{n+1}}{1.2.3\ldots(n+1)}$ a toujours une limite nulle, car, en y changeant n en $n+1$, il se multiplie par $\frac{h}{n+2}$, qui, quel que soit h, tend vers zéro. Quant à l'autre facteur, $\varphi^{n+1}(x+\theta h)$, il est en général fort compliqué, et la présence du nombre indéterminé θ en rend souvent l'étude difficile; nous y reviendrons dans plusieurs cas particuliers.

Seconde forme du reste.

274. L'expression que nous venons de trouver pour le reste est due à Lagrange; on peut, en modifiant légèrement la démonstration, lui donner une forme différente et quelquefois préférable.

Si dans l'équation

$$(1)\qquad \varphi(X)=\varphi(x)+(X-x)\varphi'(x)+\frac{(X-x)^2}{1.2}\varphi''(x)+\ldots+\frac{(X-x)^n}{1.2\ldots n}\varphi^n(x)+R$$

on pose

$$R=(X-x)P,$$

P étant un nombre inconnu tel que l'équation devienne exacte, il est évident que la différence

$$\varphi(X)-\varphi(z)-(X-z)\varphi'(z)-\frac{(X-z)^2}{1.2}\varphi''(z)-\ldots-\frac{(X-z)^n}{1.2.3\ldots n}\varphi^n(z)-(X-z)P$$

est nulle quand on suppose $z=x$, et aussi quand $z=X$; la dérivée par rapport à z de cette expression, c'est-à-dire

$$\frac{-(X-z)^n}{1.2.3\ldots n}\varphi^{n+1}(z)+P,$$

est donc nulle pour une valeur de z comprise entre X et x, c'est-à-dire pour

$$z=x+\theta(X-x),$$

θ étant un nombre convenablement choisi entre zéro et l'unité, et l'on a, par conséquent,

$$P=\frac{(X-x)^n(1-\theta)^n}{1.2\dots n}\varphi^{n+1}[x+\theta(X-x)],$$

et, par suite,

$$R=\frac{(X-x)^{n+1}}{1.2.3\dots n}(1-\theta)^n\varphi^{n+1}[x+\theta(X-x)]; \tag{2}$$

en posant $X-x=h$, l'équation (1) devient alors

$$\varphi(x+h)=\varphi(x)+h\varphi'(x)+\frac{h^2}{1.2}\varphi''(x)+\dots+\frac{h^n}{1.2.3\dots n}\varphi^n(x)+\frac{h^{n+1}(1-\theta)^n}{1.2.3\dots n}\varphi^{n+1}(x+\theta h).$$

Cette seconde forme du reste, donnée par Cauchy, est quelquefois plus avantageuse que la précédente.

Troisième forme du reste.

275. En suivant la même marche que dans les deux démonstrations précédentes, après avoir posé

$$\varphi(X)=\varphi(x)+(X-x)\varphi'(x)+\frac{(X-x)^2}{1.2}\varphi''(x)+\dots+\frac{(X-x)^n}{1.2.3\dots n}\varphi^n(x)+R, \tag{1}$$

posons

$$R=\frac{(X-x)^{p+1}}{p+1}P,$$

P étant un nombre inconnu. La fonction de z,

$$\varphi(X)-\varphi(z)-(X-z)\varphi'(z)-\frac{(X-z)^2}{1.2}\varphi''(z)-\dots-\frac{(X-z)^n}{1.2.3\dots n}\varphi^n(z)-\frac{(X-z)^{p+1}}{p+1}P,$$

évidemment nulle quand $z=X$, l'est aussi quand $z=x$, et la dérivée de cette expression par rapport à z, c'est-à-dire

$$\frac{-(X-z)^n}{1.2.3\dots n}\varphi^{n+1}(z)+(X-z)^pP,$$

est nulle, par conséquent, pour une valeur de z comprise entre x et X, c'est-à-dire pour

$$z=x+\theta(X-x),$$

θ étant un nombre plus petit que l'unité. On en conclut

$$P=\frac{(X-x)^{n-p}(1-\theta)^{n-p}}{1.2.3\dots n}\varphi^{n+1}[x+\theta(X-x)],$$

et par conséquent

$$(2) \qquad R = \frac{(X-x)^{n+1}(1-\theta)^{n-p}}{1.2.3\ldots n(p+1)}\varphi^{n+1}[x+\theta(X-x)].$$

Si l'on pose $X - x = h$, la formule (1) devient

$$\varphi(x+h)=\varphi(x)+h\varphi'(x)+\frac{h^2}{1.2}\varphi''(x)+\ldots+\frac{h^n}{1.2\ldots n}\varphi^n(x)+\frac{h^{n+1}(1-\theta)^{n+p}}{1.2\ldots n.(p+1)}\varphi^{n+1}(x+\theta h).$$

Cette troisième forme du reste a été trouvée par M. Schlomilch et par M. Roche.

Accroissement infiniment petit d'une fonction.

276. Lorsque, dans le développement de $\varphi(x+h)$, on suppose h infiniment petit, les termes successifs du développement deviennent des infiniment petits dont l'ordre va en augmentant, et quel que soit celui auquel on s'arrête, l'erreur commise est un infiniment petit d'ordre supérieur au dernier des termes conservés. Cette proposition importante se déduit aisément de la considération de l'une quelconque des formes trouvées pour le reste. Si l'on pose, en effet,

$$\varphi(x+h)=\varphi(x)+h\varphi'(x)+\frac{h^2}{1.2}\varphi''(x)+\ldots+\frac{h^n}{1.2.3\ldots n}\varphi^n(x),$$

l'erreur commise est (273)

$$\frac{h^{n+1}}{1.2.3\ldots(n+1)}\varphi^{n+1}(x+\theta h),$$

c'est-à-dire un infiniment petit d'ordre $n+1$, lorsque h est infiniment petit du premier ordre, et la proposition ne peut être en défaut que dans le cas exceptionnel où l'on a $\varphi^{n+1}(x)=\infty$. Si l'on représente h par dx et $\varphi(x)$ par y, la formule de Taylor peut s'écrire de la manière suivante :

$$\varphi(x+h)=y+dy+\frac{1}{2}d^2y+\frac{1}{6}d^3y+\ldots+\frac{1}{1.2.3\ldots n}d^ny+\ldots;$$

elle est souvent employée sous cette forme, et l'on doit se rappeler que, dx étant infiniment petit, l'erreur commise lorsqu'on arrête le développement est un infiniment petit d'ordre supérieur à celui du dernier terme conservé.

Remarque sur la série de Taylor.

277. La formule de Taylor ainsi bornée au cas d'un accroissement infiniment petit de la variable équivaut à une série de théorèmes, tous dignes de remarque, et

qui au fond n'expriment rien autre chose que la continuité de la fonction et de ses dérivées :

1° Quelle que soit la fonction $\varphi(x)$, la différence $\varphi(x+h)-\varphi(x)$, où h est infiniment petit, peut être considérée comme proportionnelle à h et mise sous la forme $h\varphi'(x)$, l'erreur commise étant infiniment petite par rapport à la différence même que l'on évalue.

2° L'excès de la différence $\varphi(x+h)-\varphi(x)$ sur la valeur approchée $h\varphi'(x)$ peut être considéré comme proportionnel à h^2, et la différence $\varphi(x+h)-\varphi(x)-h\varphi'(x)$ être mise sous la forme $\frac{h^2}{1.2}\varphi''(x)$, l'erreur commise étant infiniment petite par rapport à la quantité même que l'on évalue.

3° L'erreur commise dans cette nouvelle approximation peut être considérée comme proportionnelle à h^3, et la différence

$$\varphi(x+h)-\varphi(x)-h\varphi'(x)-\frac{h^2}{1.2}\varphi''(x),$$

mise sous la forme $\frac{h^3}{1.2.3}\varphi'''(x)$, l'erreur commise étant infiniment petite par rapport à la quantité évaluée.

Ainsi de suite indéfiniment.

La fonction étant entièrement arbitraire, on peut évidemment la choisir de manière à mettre les théorèmes précédents en défaut pour une valeur désignée de x; mais cela ne peut avoir lieu que pour des valeurs singulières de la variable, et dans ce cas l'une des dérivées devient infinie.

La démonstration directe des propositions précédentes est facile. Posons d'abord

$$\varphi(x+h)-\varphi(x)=h\varphi'(x)+\mathrm{F}(x,h), \tag{1}$$

$\mathrm{F}(x,h)$ étant (276), pour une valeur infiniment petite de h, infiniment petit par rapport à $h\varphi'(x)$. Prenons les dérivées par rapport à h des deux membres de cette équation, nous aurons

$$\varphi'(x+h)-\varphi'(x)=\frac{d\mathrm{F}(x,h)}{dh}.$$

Mais, en vertu du principe démontré pour une fonction quelconque (45), $\varphi'(x+h)-\varphi'(x)$ peut être réduit à $h\varphi''(x)$ quand on néglige une partie infiniment petite de sa valeur.

Si donc on construit la droite dont l'ordonnée est $h\varphi''(x)$, h étant l'abscisse, la fonction $\mathrm{F}(x,h)$ est l'aire comprise entre l'axe des X et une courbe dont l'ordonnée diffère de celle de cette droite d'une portion infiniment petite de sa valeur, et par conséquent, $\mathrm{F}(x,h)$ est égal à $\frac{h^2}{2}\varphi''(x)$, en négligeant une portion infini-

ment petite de sa valeur. Si l'on pose

$$\varphi(x+h)-\varphi(x)-h\varphi'(x)-\frac{h^2}{1.2}\varphi''(x)=F_1(x,h),$$

on trouve, en prenant les dérivées par rapport à h,

$$\varphi'(x+h)-\varphi'(x)-h\varphi''(x)=\frac{dF_1(x,h)}{dx},$$

et par suite il résulte du théorème général précédemment démontré, appliqué à la fonction $\varphi'(x)$, que $\frac{dF_1(x,h)}{dx}$ se réduit à $\frac{h^2}{2}\varphi'''(x)$, quand on néglige une partie infiniment petite de sa valeur, et l'on en conclura de même que la fonction $F_1(x,h)$, qui est nulle pour $h=0$, diffère de $\frac{h^3}{1.2.3}\varphi'''(x)$, d'une portion infiniment petite de sa valeur.

Le mode de raisonnement peut se continuer indéfiniment, et montre que les termes de la série de Taylor forment une série d'approximations d'ordre de plus en plus élevé vers la valeur de $\varphi(x+h)$, l'erreur commise après l'addition de chacun d'eux étant infiniment petit par rapport au terme lui-même.

Formule de Maclaurin.

278. Si dans la formule

$$\varphi(x+h)=\varphi(x)+h\varphi'(x)+\frac{h^2}{1.2}\varphi''(x)+\ldots+\frac{h^n}{1.2\ldots n}\varphi^n(x)+\frac{h^{n+1}}{1.2.3\ldots(n+1)}\varphi^{n+1}(x+\theta h)$$

on suppose $x=0$, puis que l'on remplace la lettre h par la lettre x, on aura

$$\varphi(x)=\varphi(0)+x\varphi'(0)+\frac{x^2}{1.2}\varphi''(0)+\ldots+\frac{x^n}{1.2.3\ldots n}\varphi^n(0)+\frac{x^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)}\varphi^{n+1}(\theta x),$$

et la série indéfinie ordonnée suivant les puissances de x, que l'on obtient en faisant croître n indéfiniment, a pour limite $\varphi(x)$, toutes les fois que le reste tend vers zéro.

Cette série est désignée sous le nom de *série de Maclaurin*, quoiqu'elle ne soit qu'un cas particulier de celle de Taylor, et que Maclaurin, en la faisant connaître dans son *Traité des Fluxions*, ajoute immédiatement : *This theorem was given by Taylor.*

279. Il est aisé de voir que le seul développement possible d'une fonction en série ordonnée suivant les puissances de la variable est celui qui résulte du théorème de

Maclaurin. Soit, en effet,

$$\varphi(x) = A + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_n x^n + \ldots$$

un développement qui, comme on sait (**258**), est convergent pour les valeurs de x inférieures à une certaine limite, et dont on obtient les dérivées successives en prenant celles (**267**) de ses différents termes. D'après cela, si l'on forme $\varphi'(x)$, $\varphi''(x), \ldots, \varphi^n(x)$, et que l'on y suppose ensuite $x = 0$, on aura évidemment

$$A = \varphi(0), \quad A_1 = \varphi'(0), \quad 2A_2 = \varphi''(0), \quad 2.3.A_3 = \varphi'''(0), \ldots, \quad 1.2.3\ldots n A_n = \varphi^n(0),$$

et les coefficients sont, par conséquent, ceux de la série de Maclaurin.

Quelques développements en série.

280. Le théorème de Taylor est applicable à toutes les fonctions, et le nombre des séries que l'on en peut déduire est illimité. Nous nous bornerons à l'appliquer ici à la démonstration des développements les plus célèbres et les plus souvent employés.

Développement de a^x. — La formule

$$\varphi(x) = \varphi(0) + x\,\varphi'(0) + \frac{x^2}{1.2}\varphi''(0) + \ldots + \frac{x^n}{1.2\ldots n}\varphi^n(0) + \frac{x^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)}\varphi^{n+1}(\theta x)$$

donne

$$a^x = 1 + x\,la + \frac{x^2}{1.2}(la)^2 + \ldots + \frac{x^n}{1.2\ldots n}(la)^n + \frac{x^{n+1}(la)^{n+1}}{1.2.3\ldots(n+1)}a^{\theta x}.$$

Quelle que soit la valeur de x, le reste

$$\frac{x^{n+1}(la)^{n+1}}{1.2.3\ldots(n+1)}a^{\theta x}$$

tend vers zéro lorsque n augmente. On peut, en effet, l'écrire de la manière suivante :

$$a^{\theta x}\cdot\frac{x\,la}{1}\cdot\frac{x\,la}{2}\cdots\frac{x\,la}{n}\cdot\frac{x\,la}{n+1}.$$

Il est clair qu'à partir de celui d'un certain rang, tous les facteurs de ce produit sont aussi petits que l'on veut; leur produit converge, par conséquent, vers zéro, et l'on a pour toute valeur de x

$$a^x = 1 + x\,la + \frac{x^2}{1.2}(la)^2 + \ldots + \frac{x^n}{1.2.3\ldots n}(la)^n + \ldots.$$

Si l'on suppose $a = e$, la formule devient

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots + \frac{x^n}{1.2.3\ldots n} + \ldots.$$

En bornant le développement à son premier terme, on a

$$a^x = 1 + x \operatorname{l} a a^{\theta x}.$$

Si l'on pose $a = \frac{1}{z}$, $x = \frac{1}{n}$, on déduit de là, pour le logarithme d'un nombre $\frac{1}{z}$, une expression qui sera utilisée plus tard,

$$\operatorname{l} \frac{1}{z} = n \left[\left(\frac{1}{z} \right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right] z^{\theta}.$$

281. *Développement de* $\operatorname{l}(1+x)$. — La formule de Maclaurin donne immédiatement

$$\operatorname{l}(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} (1+\theta x)^{-n}.$$

Si l'on suppose x plus grand que l'unité en valeur absolue, la série à laquelle le second membre se réduit quand n est infini, n'est pas convergente, car le rapport d'un terme au précédent a pour limite x, et cette limite étant plus grande que l'unité, les termes vont en croissant. C'est donc seulement pour des valeurs de x comprises entre -1 et $+1$ qu'il faut chercher si le reste tend vers zéro.

Si x est positif et moindre que l'unité, le reste

$$\frac{x^n}{n} (1+\theta x)^{-n}$$

tend évidemment vers zéro. Car on peut l'écrire

$$\frac{1}{n} \left(\frac{x}{1+\theta x} \right)^n,$$

et la fraction $\frac{x}{1+\theta x}$ étant moindre que $\frac{1}{2}$, sa puissance $n^{ième}$ tend vers zéro, et il en est, à fortiori, de même du produit de cette puissance par $\frac{1}{n}$. On a donc, pour les valeurs de x comprises entre o et 1,

$$\operatorname{l}(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots,$$

cette série étant applicable au cas extrême où l'on a $x = 1$, car dans ce cas le reste

tend vers zéro, à cause du facteur $\frac{1}{n}$, qui est multiplié par une quantité évidemment moindre que l'unité.

Si x est négatif et qu'on le représente par $-x'$, on ne voit pas immédiatement quelle est, pour des valeurs croissantes de n, la limite du reste

$$\frac{x'^n}{n(1-\theta x')^n},$$

et l'emploi de la seconde forme du reste est ici très-utile.

Cette seconde forme donne (274) dans le cas actuel, pour l'expression du reste de la série,

$$\left(\frac{x'-\theta x'}{1-\theta x'}\right)^{n+1} x'.$$

Or, la fraction $\frac{x'-\theta x'}{1-\theta x'}$ est moindre que l'unité et en diffère, quel que soit θ, d'une quantité finie. Sa puissance $(n-1)^{ième}$ tend donc vers zéro, et, par conséquent, le reste a aussi pour limite zéro, en sorte que la série de Taylor est dans ce cas convergente et représente $l(1-x')$.

On a donc enfin

$$l(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\dots$$

pour toutes les valeurs de x comprises entre -1 et $+1$. Nous avons fait remarquer que cette formule est applicable au cas extrême où l'on a $x=+1$; elle l'est également au cas où l'on a $x=-1$, car alors le premier membre est égal à $-\infty$, et le second se change en une série divergente,

$$-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\dots\right).$$

282. La série qui représente $l(1+x)$ peut évidemment s'écrire de la manière suivante :

$$(1)\qquad l(1+x)=x(1-x)+\frac{x^2}{2}(1-x^2)+\frac{x^3}{3}(1-x^3)+\dots+\frac{x^n}{n}(1-x^n)+\dots.$$

En réduisant, en effet, les termes semblables dont le nombre est au plus égal à deux, on vérifie l'identité de cette formule avec la précédente. Si l'on suppose cependant $x=1$, la formule (1) n'est plus exacte, car elle donnerait $l2=0$. Cette anomalie tient à ce que pour la valeur $x=1$ le développement de $l(1+x)$ n'est pas convergent indépendamment des signes de ses termes, et que l'on n'a pas, dans ce cas, le droit d'intervertir l'ordre des termes positifs et négatifs.

283. *Développement de* $(1+x)^m$. — En appliquant la formule générale, on trouve

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+2)}{1.2.3\ldots n-1}x^{n-1} + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots n}x^n(1+\theta x)^{m-n}. \quad (1)$$

Pour que la série indéfinie

$$1 + mx + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+2)}{1.2.3\ldots n-1}x^{n-1} + \ldots$$

soit convergente, il faut que x ne surpasse pas l'unité en valeur absolue; le rapport d'un terme au précédent est, en effet,

$$\frac{m-n+1}{n}x,$$

et il a pour limite $-x$, lorsque n augmente indéfiniment. Il ne peut donc y avoir convergence que pour les valeurs de x comprises entre -1 et $+1$, et c'est dans ce cas seulement qu'il y a lieu d'examiner si le reste tend vers zéro.

Ce reste

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots n}x^n(1+\theta x)^{m-n}$$

tend vers zéro si x est positif; on peut, en effet, l'écrire

$$\left[\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n}x^n\right]\left[\frac{1}{(1+\theta x)^{n-m}}\right]. \quad (2)$$

Or le second facteur est moindre que l'unité, et le premier tend vers zéro; car si n augmente d'une unité, il se multiplie par

$$\frac{m-n}{n+1}x,$$

qui diffère peu de $-x$ lorsque n est grand. n augmentant indéfiniment, le produit placé dans la première parenthèse de l'expression (2) se multipliera successivement par un nombre aussi considérable qu'on le voudra de facteurs peu différents de $-x$, et dont le produit tend évidemment vers zéro.

On a donc, pour des valeurs positives de x inférieures à l'unité,

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n}x^n + \ldots.$$

Si x est négatif, le raisonnement précédent n'est plus applicable, et il faut

recourir à la seconde forme du reste, qui est, dans le cas actuel,

$$\frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{1.2\dots(n-1)}\,x^n(1-\theta)^{n-1}(1+\theta x)^{m-n}.$$

Le facteur

$$\frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{1.2\dots(n-1)}\,x^n$$

tend vers zéro, d'après ce qui a été dit; l'autre facteur

$$(1-\theta)^{n-1}(1+\theta x)^{m-n}$$

devient, en remplaçant x, qui est négatif, par $-x'$,

$$(1-\theta x')^{m-1}\left(\frac{1-\theta}{1-\theta x'}\right)^{n-1}.$$

Or la fraction $\frac{1-\theta}{1-\theta x'}$ est moindre que l'unité, de même que la différence $1-\theta x'$; cette expression est donc moindre que l'unité, et son produit par l'autre facteur, qui tend vers zéro, a nécessairement pour limite zéro. On a donc enfin, pour toutes les valeurs de x comprises entre -1 et $+1$,

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \dots + \frac{m.(m-1)\dots(m-n+1)}{1.2\dots n}x^n + \dots.$$

On déduira sans peine du développement précédent celui de $(x+h)^m$, car on a

$$(x+h)^m = h^m\left(1+\frac{h}{x}\right)^m,$$

et pourvu que x soit plus grand que h,

$$(x+h)^m = x^m + mhx^{m-1} + \frac{m.(m-1)}{1.2}h^2x^{m-2} + \dots + \frac{m.(m-1)\dots(m+n+1)}{1.2\dots n}h^n x^{m-n} + \dots.$$

284. La série que nous venons d'obtenir est trop célèbre et trop fréquemment employée pour que nous laissions de côté le cas où l'on a $x = \pm 1$, et auquel les raisonnements précédents ne sont pas applicables.

La série $(1+x)^m$ devient dans le cas de $x = 1$,

$$(1)\quad 1 + m + \frac{m.(m-1)}{1.2} + \frac{m.(m-1)(m-2)}{1.2.3} + \dots + \frac{m.(m-1)\dots(m-n+1)}{1.2\dots n} + \dots,$$

et, dans le cas de $x = -1$,

$$(2)\quad 1 - m + \frac{m.(m-1)}{1.2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} + \dots \pm \frac{m.(m-1)\dots(m-n+1)}{1.2\dots n} \mp \dots.$$

Cherchons d'abord si les termes de ces séries tendent vers zéro; car c'est là une condition indispensable de convergence. Le rapport d'un terme au précédent est, en valeur absolue,

$$\frac{n-m}{n+1}.$$

Si m est compris entre -1 et $-\infty$, chaque terme surpasse donc le précédent en valeur absolue, et la convergence est impossible. Dans le cas extrême où $m=-1$, tous les termes des séries (1) et (2) ont même valeur absolue, et il ne peut pas non plus y avoir convergence.

Considérons donc le cas où m est compris entre -1 et $+\infty$.

Le rapport $\frac{m-n}{n+1}$ étant négatif, la série (1) a ses termes alternativement positifs et négatifs, et puisqu'ils vont en diminuant, il y a convergence.

La règle de Gauss (242), appliquée à la série (2), montre qu'elle est convergente lorsque m est positif et divergente dans le cas contraire.

En résumé : la série qui donne $(1+1)^m$, c'est-à-dire

$$1+m+\frac{m.(m-1)}{1.2}+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}+\dots,$$

est divergente lorsque m est compris entre -1 et $-\infty$, et dans ce cas les termes ne tendent pas vers zéro. Lorsque m est compris entre -1 et $+\infty$, les termes tendent vers zéro et sont alternativement positifs et négatifs, la série est convergente.

Dans le cas où $m=-1$, tous les termes sont égaux en valeur absolue, et l'on ne peut pas dire qu'il y ait convergence.

Si l'on suppose $x=-1$, la série devient

$$1-m+\frac{m.(m-1)}{1.2}-\frac{m.(m-1)(m-2)}{1.2.3}+\dots;$$

elle est convergente pour les valeurs positives de m et divergente pour les valeurs négatives. Il résulte d'ailleurs de ce qui a été dit (265) que la série représente dans le premier cas $(1-1)^m$, et lorsque m est négatif, cette expression devenant infinie, la série divergente peut être considérée comme donnant aussi un résultat acceptable.

285. La formule

$$(1)\qquad (1+x)^m=1+mx+\frac{m.(m-1)}{1.2}x^2+\frac{m.(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^3+\dots.$$

dont nous venons de discuter les conditions de convergence et d'exactitude, est importante par ses nombreuses applications et tient de plus une place importante dans l'histoire de la science : c'est la première qu'ait connue Newton, et quoiqu'il ne l'ait publiée que plus tard, elle a précédé la découverte de la série de Mercator et de celle de Brounker.

Cette formule est encore remarquable par la facilité avec laquelle on en déduit d'autres séries très-connues et très-importantes.

On peut mettre l'équation (1) sous la forme

$$\frac{(1+x)^m-1}{m} = x + \frac{m-1}{1.2}x^2 + \frac{(m-1)(m-2)}{2.3}x^3 + \dots.$$

Si l'on fait tendre m vers zéro, le premier membre, qui peut s'écrire

$$\frac{(1+x)^m-(1+x)^0}{m-0},$$

a évidemment pour limite la dérivée de $(1+x)^m$ par rapport à m, pour la valeur particulière $m=0$, c'est-à-dire $l(1+x)$. En faisant $m=0$ dans le second membre, on aura donc le développement de $l(1+x)$,

$$l(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots.$$

286. La même formule donne

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^6 + \dots,$$

et l'on en déduit que la fonction $\arcsin x$ et la série

$$x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{x^7}{7} + \dots$$

ont même dérivée, et comme elles s'annulent toutes deux pour $x=0$, on peut écrire

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} + \dots.$$

287. Mentionnons encore, sans entrer dans plus de détails, la possibilité de déduire de la formule du binôme le développement de l'exponentielle e^x, en la considérant comme la limite de $\left(1+\frac{x}{m}\right)^m$, lorsque m augmente indéfiniment.

288. Comme dernière application de la formule du binôme, nous formerons le développement de la fonction $(1-2\alpha x+\alpha^2)^{-\frac{1}{2}}$ en série ordonnée suivant les puissances de α. On a évidemment

$$(1-2\alpha x+\alpha^2)^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}\alpha(2x-\alpha)+\frac{1.3}{2.4}\alpha^2(2x-\alpha)^2+\frac{1.3.5}{2.4.6}\alpha^3(2x-\alpha)^3+\ldots$$
$$+\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\alpha^n(2x-\alpha)^n+\ldots,$$

en développant les diverses puissances de $(2x-\alpha)$, et ordonnant par rapport aux puissances de α, on voit aisément que le coefficient de α^n est

$$X_n=\frac{1.3.5\ldots 2n-1}{1.2.3\ldots n}\left[x^n-\frac{n\ n-1}{2(2n-1)}x^{n-2}+\frac{n.(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4(2n-1)(2n-3)}x^{n-4}-\ldots\right.$$
$$\left.\pm\frac{n.(n-1)\ldots(n-2m+1)}{2.4\ldots 2m(2n-1)(2n-3)(2n-2m+1)}x^{n-2m}\mp\ldots\right].$$

Or on a, comme on le démontre aisément,

$$\frac{1.3.5\ldots 2n-1}{1.2.3\ldots n}=\frac{2n\ (2n-1)(2n-2)\ldots(n+1)}{2^n.1.2.3\ldots n},$$

et par suite le produit $1.2.3\ldots n.2^n.X_n$ a pour terme général

$$\pm\frac{2n.(2n-1)\ldots(n-2m+1)}{2.4\ldots 2m.(2n-1)(2n-3)\ldots(2n-2m+1)}x^{n-2m},$$

c'est-à-dire, en supprimant les facteurs communs aux deux termes du coefficient,

$$\pm\frac{n.(n-1)\ldots(n-m+1)}{1.2.3\ldots m}(2n-2m)(2n-2m-1)\ldots(n-2m+1)x^{n-2m},$$

ou enfin

$$\pm\frac{n.(n-1)\ldots(n-m+1)}{1.2.3\ldots m}\frac{d^n(x^{2n-2m})}{dx^n},$$

et par conséquent le produit $1.2.3\ldots n\,2^n.X^n$ est la $n^{ième}$ dérivée par rapport à x du polynôme,

$$x^{2n}-nx^{2n-2}+\frac{n.n-1}{1.2}x^{2n-4}-\ldots=(x^2-1)^n,$$

on a donc enfin

$$X_n=\frac{1}{2^n.1.2.3\ldots n}\frac{d^n.(x^2-1)^n}{dx^n},$$

et

$$(1-2\alpha x+\alpha^2)^{-\frac{1}{2}}=1+X_1\alpha+X_2\alpha^2+\ldots+X_n\alpha^n+\ldots.$$

Cette formule est célèbre et nous la retrouverons de plusieurs manières.

289. *Développement de* $\sin x$. — La formule de Maclaurin donne immédiatement

$$\sin x=x-\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^5}{1.2.3.4.5}-\ldots-\frac{x^{4n-1}}{1.2.3\ldots(4n-1)}+\frac{x^{4n+1}\sin\theta x}{1.2.3\ldots(4n+1)}.$$

Pour toute valeur de x, le terme complémentaire tend vers zéro, en sorte que l'on a toujours

$$\sin x=x-\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^5}{1.2.3.4.5}-\frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7}+\ldots.$$

290. *Développement de* $\cos x$. — La formule de Maclaurin donne immédiatement

$$\cos x=1-\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{1.2.3.4}-\ldots+\frac{x^{4n}\cos\theta x}{1.2.3\ldots4n},$$

et l'on voit, comme dans le cas précédent, que le terme complémentaire tend vers zéro lorsque n augmente, en sorte que l'on a, pour toute valeur de x,

$$\cos x=1-\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{1.2.3.4}-\frac{x^6}{1.2.3.4.5.6}+\ldots.$$

291. *Développement de* $\cos mx$ *en série ordonnée suivant les puissances de* $\sin x$. — La formule de Maclaurin permettant de développer une fonction suivant les puissances de la variable, permet par cela même de la développer suivant les puissances d'une autre fonction arbitrairement choisie, car rien n'empêche de prendre cette seconde fonction comme variable.

Si, par exemple, on veut développer $\cos mx$ en série ordonnée suivant les puissances de $\sin x$, on posera $\sin x=y$, et $\cos mx$ deviendra $\cos m.(\text{arc}\sin y)$. Or on a trouvé (**151**) pour $x=0$,

$$\frac{d^{2n+2}\cos m\,\text{arc}\sin x}{dx^{2n}}=(-1)^{n+1}m^2.(m^2-4)(m^2-16)\ldots(m^2-4n^2)\cos mk\pi,$$

$$\frac{d^{2n+1}\cos m\,\text{arc}\sin x}{dx^{2n+1}}=\mp(-1)^n(m^2-1)(m^2-9)-[m^2-(2n-1)^2]\sin mk\pi,$$

k désignant un nombre entier arbitraire, et le signe — de la seconde formule cor-

respondant au cas où ce nombre est pair; la formule de Maclaurin donne par conséquent

$$\cos m(\arcsin y) = \cos mk\pi \left[1 - \frac{m^2}{1.2} y^2 + \frac{m^2(m^2-4)}{1.2.3.4} y^4 - \frac{m^2(m^2-4)(m^2-16)}{1.2.3.4.5.6} y^6 + \dots \right]$$
$$\mp m \sin mk\pi \left[y - \frac{(m^2-1)}{1.2.3} y^3 + \frac{(m^2-1)(m^2-9)}{1.2.3.4.5} y^5 - \dots \right],$$

le signe — devant être pris lorsque k est pair.

Si l'on remplace y par sa valeur, la formule précédente devient

$$\cos mx = \cos mk\pi \left[1 - \frac{m^2}{1.2} \sin^2 x + \frac{m^2(m^2-4)}{1.2.3.4} \sin^4 x - \frac{m^2(m^2-4)(m^2-16)}{1.2.3.4.5.6} \sin^6 x + \dots \right]$$
$$\mp m \sin mk\pi \left[\sin x - \frac{m^2-1}{1.2.3} \sin^3 x + \frac{(m^2-1)(m^2-9)}{1.2.3.4.5} \sin^5 x - \dots \right].$$

Il ne faut pas s'étonner de voir le second membre contenir un nombre indéterminé k. On sait en effet que, $\sin x$ étant donné, $\cos mx$ n'est pas déterminé, et peut avoir un nombre infini de valeurs si m est incommensurable, le développement de cette fonction, pour être général, doit donc être comme elle indéterminé.

Si l'on choisit une valeur de x, pour déterminer le nombre entier k, qui lui correspond et qui rend la formule précédente exacte, on se reportera à ce qui a été dit (151). $\cos mk\pi$ est la valeur que prend $\cos mx$ lorsque $\sin x$ est nul, et par suite l'hypothèse $\sin x = 0$ répond à $x = k\pi$. Si $\sin x$ croît à partir de zéro jusqu'à l'unité, x variera de $k\pi$ à $k\pi + \frac{\pi}{2}$ si k est pair, et de $k\pi$ à $k\pi - \frac{\pi}{2}$ si k est impair.

Lorsque x désigne le plus petit des arcs correspondant au sinus donné, on a $k = 0$ et

$$\cos mx = 1 - \frac{m^2}{1.2} \sin^2 x + \frac{m^2(m^2-4)}{1.2.3.4} \sin^4 x - \frac{m^2(m^2-4)(m^2-16)}{1.2.3.4.5.6} \sin^6 x + \dots,$$

c'est la formule donnée par Euler et Lagrange, qui ne répond, comme on voit, qu'à un cas particulier.

292. Lorsque m est entier, on a $\sin mk\pi = 0$ et $\cos mk\pi = \pm 1$. Si de plus m est pair, la série se réduit à un nombre limité de termes. On a, par exemple, en faisant $m = 2$, $m = 4$, $m = 6$,

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x,$$
$$\cos 4x = 1 - 8\sin^2 x + 8\sin^4 x,$$
$$\cos 6x = 1 - 18\sin^2 x + 48\sin^4 x - 32\sin^6 x.$$

293. *Développement de* $\sin mx$ *suivant les puissances de* $\sin x$. — Si l'on pose

$\sin x = y$, la fonction $\sin mx$ devient $\sin(m \operatorname{arc}\sin y)$: or on a trouvé (153), pour $y = 0$,

$$\frac{d^{2n+2} \sin m \operatorname{arc}\sin y}{dy^{2n+2}} = (-1)^n m^2 . (m^2-4) \ldots (m^2 - 4n^2) \sin mk\pi,$$

$$\frac{d^{2n+1} \sin m \operatorname{arc}\sin y}{dy^{2n+1}} = \pm (-1)^n (m^2-1)(m^2-9) \ldots [m^2 - (2n-1)^2] m \cos mk\pi,$$

et par suite le théorème de Maclaurin donne, en remplaçant y par $\sin x$,

$$\sin mx = \sin mk\pi \left[1 - \frac{m^2}{1.2} \sin^2 x + \frac{m^2(m^2-4)}{1.2.3.4} \sin^4 x - \frac{m^2(m^2-4)(m^2-16)}{1.2.3.4.5.6} \sin^6 x + \ldots \right]$$
$$\pm m \cos mk\pi \left[\sin x - \frac{(m^2-1)\sin^3 x}{1.2.3} + \frac{(m^2-1)(m^2-9)}{1.2.3.4.5} \sin^5 x - \ldots \right],$$

k est un nombre entier qui reste arbitraire tant que l'arc x n'est donné que par son sinus. Dans le second terme, il faut prendre le signe + si k est pair, et le signe — si k est impair.

La formule suppose, pour $\sin x = 0$, $\sin mx = \sin mk\pi$; lorsque $\sin x$ augmente à partir de zéro, l'angle x, d'abord égal à $k\pi$, augmente jusqu'à $\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi$ si k est pair et diminue jusqu'à $\left(k - \frac{1}{2}\right)\pi$ si k est impair. Dans le premier cas il faut prendre le signe + du second terme, et dans le second on prendra le signe —.

Lorsque x est le plus petit arc qui correspond au sinus donné, on a

$$\sin mx = m \sin x - \frac{m(m^2-1)}{1.2.3} \sin^3 x + \frac{m(m^2-1)(m^2-9)}{1.2.3.4.5} \sin^5 x + \ldots :$$

c'est la formule donnée par Euler et reproduite par Lagrange.

Lorsque m est entier, $\sin mk\pi$ se réduit à zéro, et si de plus m est impair, les termes deviennent nuls à partir d'un certain rang et la série se réduit à un nombre limité de termes. On trouve par exemple

$$\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x,$$
$$\sin 5x = 5 \sin x - 20 \sin^3 x + 16 \sin^5 x,$$
$$\sin 7x = 7 \sin x - 56 \sin^3 x + 112 \sin^5 x - 64 \sin^7 x,$$
$$\sin 9x = 9 \sin x - 120 \sin^3 x + 432 \sin^5 x - 576 \sin^7 x + 256 \sin^9 x,$$
$$\sin 11x = 11 \sin x - 220 \sin^3 x + 1232 \sin^5 x - 2816 \sin^7 x + 2816 \sin^9 x - 1024 \sin^{11} x.$$

294. Si l'on divise par m les deux membres de la formule

$$\sin mx = m \left[\sin x - \frac{m^2-1}{1.2.3} \sin^3 x + \frac{(m^2-1)(m^2-9)}{1.2.3.4.5} \sin^5 x - \ldots \right],$$

et que l'on suppose ensuite $m=0$, le premier membre $\frac{\sin mx}{m}$ deviendra égal à x, et l'on aura

$$x=\sin x+\frac{1}{1.2.3}\sin^3 x+\frac{(1.3)^2}{1.2.3.4.5}\sin^5 x+\ldots,$$

formule très-célèbre et que nous retrouverons d'une manière plus directe.

295. Les formules

$$\sin mx=m\left[\sin x-\frac{m^2-1}{1.2.3}\sin^3 x+\frac{(m^2-1)(m^2-9)}{1.2.3.4.5}\sin^5 x-\ldots\right],$$

(1)

$$\cos mx=1-\frac{m^2}{1.2}\sin^2 x+\frac{m^2(m^2-4)}{1.2.3.4}\sin^4 x-\ldots,$$

peuvent aussi servir à retrouver les développements de $\sin z$ et $\cos z$ suivant les puissances de z. Posons en effet $mx=z$ et supposons ensuite que m augmente indéfiniment, tandis que x tend vers zéro, le rapport $\frac{\sin x}{x}$ ayant pour limite l'unité, on pourra remplacer $\sin x$ par x, c'est-à-dire par $\frac{z}{m}$; d'ailleurs

$$\lim\frac{m(m^2-1)}{m^3}=1,$$

$$\lim\frac{m(m^2-1)(m^2-9)}{m^5}=1,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

et par suite les équations (1) deviendront, à la limite,

$$\sin z=z-\frac{z^3}{1.2.3}+\frac{z^5}{1.2.3.4.5}-\ldots,$$

$$\cos z=1-\frac{z^2}{2}+\frac{z^4}{1.2.3.4}-\ldots.$$

296. *Développement de* $\cos mx$ *suivant les puissances de* $\cos x$. — En ayant égard aux valeurs obtenues (**154**) pour les dérivées de $\cos m(\text{arc}\cos x)$, on trouve par l'application directe du théorème de Maclaurin,

$$\cos mx=\cos(2k+1)\frac{m\pi}{2}\left(1-\frac{m^2}{1.2}\cos^2 x+\frac{m^2(m^2-4)}{1.2.3.4}\cos^4 x-\ldots\right)$$

$$\pm m\sin(2k+1)\frac{m\pi}{2}\left[\cos x-\frac{m^2-1}{1.2.3}\cos^3 x+\frac{(m^2-1)(m^2-9)}{1.2.3.4.5}\cos^5 x-\ldots\right],$$

k étant un nombre entier arbitraire, et le signe $+$ correspondant au cas où k est

pair, et le signe — au cas où k est impair. La formule (1) suppose que pour $\cos x = 0$ on a $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$. Si $\cos x$ varie de 0 à 1, x varie de $(2k+1)\frac{\pi}{2}$ à $k\pi$ lorsque k est pair, et de $(2k+1)\frac{\pi}{2}$ à $(k+1)\pi$ lorsque k est impair.

Si l'on veut que x représente le plus petit arc dont le cosinus est $\cos x$, on a $k = 0$ et

$$\cos mx = \cos\frac{m\pi}{2}\left(1 - \frac{m^2}{2}\cos^2 x + \frac{m^2(m^2-4)}{1.2.3.4}\cos^4 x - \dots\right)$$
$$+ m\sin\frac{m\pi}{2}\left(\cos x - \frac{m^2-1}{1.2.3}\cos^3 x + \dots\right).$$

Si l'on fait $m = 2$, $m = 3$, $m = 4$, on trouve

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1,$$
$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x,$$
$$\cos 4x = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1,$$
$$\cos 5x = 16\cos^5 x - 20\cos^3 x + 5\cos x,$$
$$\cos 6x = 32\cos^6 x - 48\cos^4 x + 18\cos^2 x - 1.$$

En général, $\cos mx$ se compose d'un nombre fini de termes toutes les fois que m est entier. Les termes sont de degré pair ou impair, suivant que m est lui-même pair ou impair.

297. *Développement de* $\sin mx$ *suivant les puissances de* $\cos x$. — En ayant égard aux valeurs obtenues (155), pour les dérivées de $\sin(m \arccos x)$, quand on suppose $x = 0$, on trouve

$$\sin mx = \sin(2k+1)\frac{m\pi}{2}\left(1 - \frac{m^2}{1.2}\cos^2 x + \frac{m^2(m^2-4)}{1.2.3.4}\cos^4 x - \dots\right)$$
$$\mp m\cos(2k+1)\frac{m\pi}{2}\left[\cos x - \frac{m^2-1}{1.2.3}\cos^3 x + \frac{(m^2-1)(m^2-9)}{1.2.3.4.5}\cos^5 x - \dots\right],$$

k étant un nombre entier arbitraire, et le signe — du second terme correspondant au cas où k est pair. La formule suppose que pour $\cos x = 0$ on ait $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, et lorsque $\cos x$ varie de 0 à $+1$, x varie de $(2k+1)\frac{\pi}{2}$ à $k\pi$ si k est pair, et de $(2k+1)\frac{\pi}{2}$ à $(k+1)\pi$ si k est impair. Pour aucune valeur de m cette série ne se réduit à un nombre limité de termes.

298. *Remarque relative aux quatre séries précédentes.* — Considérons les quatre

séries qui viennent d'être obtenues :

$$\cos mx = \cos mk\pi \left[1 - \frac{m^2}{1.2}\sin^2 x + \frac{m^2(m^2-4)}{1.2.3.4}\sin^4 x - \frac{m^2(m^2-4)(m^2-16)}{1.2.3.4.5.6}\sin^6 x + \dots\right]$$
$$\mp m \sin mk\pi \left[\sin x - \frac{m^2-1}{1.2.3}\sin^3 x + \frac{(m^2-1)(m^2-9)}{1.2.3.4.5}\sin^5 x - \dots\right],$$

$$\sin mx = \sin mk\pi \left[1 - \frac{m^2}{1.2}\sin^2 x + \frac{m^2(m^2-4)}{1.2.3.4}\sin^4 x - \frac{m^2(m^2-4)(m^2-16)}{1.2.3.4.5.6}\sin^6 x + \dots\right]$$
$$\pm m \cos mk\pi \left[\sin x - \frac{m^2-1}{1.2.3}\sin^3 x + \frac{(m^2-1)(m^2-9)}{1.2.3.4.5}\sin^5 x - \dots\right],$$

$$\cos mx = \cos(2k+1)\frac{m\pi}{2}\left(1 - \frac{m^2}{1.2}\cos^2 x + \frac{m^2(m^2-4)}{1.2.3.4}\cos^4 x - \dots\right)$$
$$\pm m \sin(2k+1)\frac{m\pi}{2}\left[\cos x - \frac{m^2-1}{1.2.3}\cos^3 x + \frac{(m^2-1)(m^2-9)}{1.2.3.4.5}\cos^5 x - \dots\right],$$

$$\sin mx = \sin(2k+1)\frac{m\pi}{2}\left(1 - \frac{m^2}{1.2}\cos^2 x + \frac{m^2(m^2-4)}{1.2.3.4}\cos^4 x - \dots\right)$$
$$\mp m \cos(2k+1)\frac{m\pi}{2}\left[\cos x - \frac{m^2-1}{1.2.3}\cos^3 x + \frac{(m^2-1)(m^2-9)}{1.2.3.4.5}\cos^5 x - \dots\right],$$

la forme même de ces séries donne lieu à une vérification qu'il est bon de faire remarquer. D'après les explications qui ont été données relativement au sens qu'il faut attribuer au premier membre pour une valeur donnée de k, si l'on nomme α le plus petit arc, positif ou négatif, ayant pour sinus $\sin x$, on a

$$\cos m\alpha = 1 - m^2\sin^2 x + \frac{m^2(m^2-4)}{1.2.3.4}\sin^4 x - \dots$$
$$\sin m\alpha = m\left[\sin x - \frac{(m^2-1)}{1.2.3}\sin^3 x + \frac{(m^2-1)(m^2-9)}{1.2.3.4.5}\sin^5 x - \dots\right];$$

on a de même, en nommant α' le plus petit arc qui ait pour sinus $\cos x$,

$$\cos m\alpha' = 1 - \frac{m^2}{1.2}\cos^2 x + \frac{m^2(m^2-4)}{1.2.3.4}\cos^4 x - \dots,$$
$$\sin m\alpha' = m\left(\cos x - \frac{m^2-1}{1.2.3}\cos^3 x + \dots\right).$$

Les quatre formules deviennent, d'après cela,

$$\cos mx = \cos mk\pi \cos m\alpha \pm \sin mk\pi \sin m\alpha = \cos(mk\pi \pm m\alpha),$$
$$\sin mx = \sin mk\pi \cos m\alpha \pm \cos mk\pi \sin m\alpha = \sin(mk\pi \pm m\alpha),$$
$$\cos mx = \cos(2k+1)\frac{m\pi}{2}\cos m\alpha' \pm \sin(2k+1)\frac{m\pi}{2}\sin m\alpha' = \cos\left[(2k+1)\frac{m\pi}{2} \mp m\alpha'\right],$$
$$\sin mx = \sin(2k+1)\frac{m\pi}{2}\cos m\alpha' \mp \cos(2k+1)\frac{m\pi}{2}\sin m\alpha' = \sin\left[(2k+1)\frac{m\pi}{2} \mp m\alpha'\right],$$

les signes supérieurs correspondant au cas où le nombre entier k est pair, et les signes inférieurs au cas où il est impair. Or l'exactitude de ces dernières formules est évidente; α étant en effet le plus petit arc dont le sinus est $\sin x$, l'arc x a pour expression $k\pi \pm \alpha$, le signe + correspondant au cas où k est pair, et le signe — au cas où k est impair. De même, α' étant le plus petit arc dont le sinus est $\cos x$, $(2k+1)\frac{\pi}{2} \mp \alpha'$, est la valeur générale de l'arc dont le cosinus est $\cos x$, les formules précédentes peuvent donc être écrites à priori, et font voir que les formules particulières d'Euler comprenaient implicitement le développement général donné plus tard par Poinsot.

299. *Développement de* $\frac{\sin mx}{\cos^m x}$ *suivant les puissances de* $\operatorname{tang} x$. — En posant $\operatorname{tang} x = y$, la fonction $\frac{\sin mx}{\cos^m x}$ devient $\sin(m \operatorname{arc\,tang} y)(1+y^2)^{\frac{m}{2}}$. Or on a (156) pour $x = 0$,

$$\frac{d^{2n} \sin(m \operatorname{arc\,tang} x)(1+x^2)^{\frac{m}{2}}}{dx^{2n}} = 0,$$

$$\frac{d^{2n+1} \sin(m \operatorname{arc\,tang} x)(1+x^2)^{\frac{m}{2}}}{dx^{2n+1}} = (-1)^n m.(m-1)(m-2)\dots(m-2n+1)(m-2n),$$

et, par conséquent, le théorème de Maclaurin donne

$$\sin(m \operatorname{arc\,tang} y)(1+y^2)^{\frac{m}{2}} = my - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}y^3 + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1.2.3.4.5}y^5 - \dots,$$

c'est-à-dire

$$\sin mx = \cos^m x \left[m \operatorname{tang} x - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} \operatorname{tang}^3 x + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1.2.3.4.5} \operatorname{tang}^5 x - \dots \right].$$

Dans cette formule x désigne le plus petit arc dont la tangente est tang x.

On trouverait de même, à l'aide des dérivées calculées (157),

$$\cos mx = \cos^m x \left[1 - \frac{m(m-1)}{1.2} \operatorname{tang}^2 x + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4} \operatorname{tang}^4 x - \dots \right].$$

Les formules générales relatives au cas où x est l'un quelconque des arcs qui ont pour tangente tang x, peuvent se déduire de celles-ci. Si en effet α est le plus petit

arc ayant tang x pour tangente, les autres sont de la forme $k\pi + \alpha$, et par conséquent les valeurs générales de sin mx et de cos mx sont,

$$\sin mx = \sin m\alpha \cos mk\pi + \sin mk\pi \cos m\alpha,$$
$$\cos mx = \cos m\alpha \cos mk\pi - \sin m\alpha \sin mk\pi.$$

300. *Développement de* arc tang x. — Nous avons trouvé (146) que pour $x = 0$ on a généralement :

$$\frac{d^{2n} \operatorname{arc\,tang} x}{dx^{2n}} = 0,$$
$$\frac{d^{2n+1} \operatorname{arc\,tang} x}{dx^{2n+1}} = (1.2.3 \ldots 2n)(-1)^n;$$

on en conclut, d'après la formule de Maclaurin,

$$\operatorname{arc\,tang} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots, \tag{1}$$

et comme on a trouvé aussi (144), en posant arc tang $x = u$, $\frac{\pi}{2} - u = y$,

$$\frac{d^{n+1} \operatorname{arc\,tang} x}{dx^{n+1}} = \frac{(1.2.3 \ldots n)(-1)^n}{(1+x^2)^{\frac{n+1}{2}}} \sin(n+1)y = 1.2.3 \ldots n(-1)^n \sin(n+1)y \sin^{n+1} y,$$

le terme complémentaire est

$$\frac{x^n}{(1+\theta^2 x^2)^{\frac{n+1}{2}}} \sin(n+1)\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tang} \theta x\right).$$

Or, pour des valeurs de x comprises entre -1 et $+1$, $\frac{x^n}{(1+\theta^2 x^2)^{\frac{n+1}{2}}}$ tend vers zéro lorsque n augmente, et par suite la série (1) s'applique à toutes les valeurs de la variable, comprise entre ces limites.

301. *Développement de* arc tang $(x+h)$. — En appliquant la formule de Taylor et faisant usage de l'expression de la dérivée qui vient d'être rappelée au paragraphe précédent, on trouve

$$(1)\ \operatorname{arc\,tang}(x+h) = \operatorname{arc\,tang} x + h\sin^2 y - \frac{h^2}{2}\sin^2 y \sin 2y + \frac{h^3}{3}\sin^3 y \sin 3y - \frac{h^4}{4}\sin^4 y \sin 4y + \ldots.$$

Cette formule donne plusieurs conséquences remarquables. Si l'on y fait $h = -x$, on obtient

$$0 = \operatorname{arc\,tang} x - x\sin^2 y - \frac{x^2}{2}\sin^2 y \sin 2y - \frac{x^3}{3}\sin^3 y \sin 3y - \ldots;$$

mais de l'équation $\operatorname{arc\,tang} x = \frac{\pi}{2} - y$, on déduit

$$x = \cot y, \quad \text{et par suite} \quad h = -\cot y,$$

et l'équation précédente devient

$$(2) \qquad \frac{\pi}{2} - y = \sin y \cos y + \frac{\cos^2 y \sin 2y}{2} + \frac{\cos^3 y \sin 3y}{3} + \frac{\cos^4 y \sin 4y}{4} + \dots$$

Si dans la même formule (1) on fait $h = -x - \frac{1}{x} = -\operatorname{tang} u - \cot u = -\frac{1}{\sin y \cos y}$, on aura

$$\operatorname{arc\,tang}(x+h) = \operatorname{arc\,tang} -\frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2} + \operatorname{arc\,tang} x = -y,$$

et par suite la formule (1) devient

$$-y = \frac{\pi}{2} - y - \frac{\sin y}{\cos y} - \frac{1}{2}\frac{\sin 2y}{\cos^2 y} - \frac{1}{3}\frac{\sin 3y}{\cos^3 y} + \dots,$$

on en déduit

$$\frac{\pi}{2} = \frac{\sin y}{\cos y} + \frac{1}{2}\frac{\sin 2y}{\cos^2 y} + \frac{1}{3}\frac{\sin 3y}{\cos^3 y} + \dots.$$

Si l'on suppose enfin

$$h = -\sqrt{1+x^2} = -\frac{1}{\cos u} = -\frac{1}{\sin y},$$

on aura

$$\operatorname{arc\,tang}(x+h) = \operatorname{arc\,tang}\left(x - \sqrt{1+x^2}\right) = \operatorname{arc\,tang}\left[\sqrt{1+x^2}\cdot(\sin u - 1)\right]$$

$$= \operatorname{arc\,tang}\frac{\sin u - 1}{\cos u} = -\operatorname{arc\,tang}\frac{1-\cos y}{\sin y} = -\operatorname{arc\,tang}.\operatorname{tang}\frac{1}{2}y = -\frac{1}{2}y,$$

et, par suite,

$$-\frac{y}{2} = \frac{\pi}{2} - y - \sin y - \frac{1}{2}\sin 2y - \frac{1}{3}\sin 3y - \dots,$$

d'où

$$\frac{\pi - y}{2} = \sin y + \frac{1}{2}\sin 2y + \frac{1}{3}\sin 3y + \dots.$$

Nous avons cru devoir faire connaître ces diverses séries, à cause de leur célébrité et pour donner un premier exemple des transformations que l'on peut faire subir aux résultats immédiatement fournis par les formules de Taylor; mais nous retrouverons la plupart d'entre elles par d'autres procédés qui nous permettront de décider dans quels cas elles sont applicables.

302. *Développement de* $\operatorname{arc\,sin} x$. — On a trouvé (147) que, pour $x = 0$, on a

$$\frac{d^{2n} \operatorname{arc\,sin} x}{dx^{2n}} = 0,$$

$$\frac{d^{2n+1} \operatorname{arc\,sin} x}{dx^{2n+1}} = (1.3.5\ldots 2n-1)^2;$$

on en conclut

$$\operatorname{arc\,sin} x = x + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5.(1.3)^2}{1.2.3.4.5} + \frac{x^7.(1.3.5)^2}{1.2.3.4.5.6.7} + \ldots.$$

Cette série, dont l'identité avec celle qui a été donnée (294) est évidente, est convergente pour les valeurs de x moindres que l'unité. Nous ne discuterons pas ici la valeur du reste, parce qu'un autre procédé nous permettra de démontrer que cette série représente effectivement $\operatorname{arc\,sin} x$.

303. *Développement de* $(\operatorname{arc\,sin} x)^2$. — On a trouvé (148)

$$\frac{d^{2n}.(\operatorname{arc\,sin} x)^2}{dx^{2n}} = 2.2^2.4^2\ldots(2n-2)^2,$$

$$\frac{d^{2n+1}.(\operatorname{arc\,sin} x)^2}{dx^{2n+1}} = 0;$$

on en conclut

$$(\operatorname{arc\,sin} x)^2 = x^2 + \frac{2}{3}\frac{x^4}{2} + \frac{2.4}{3.5}\frac{x^6}{3} + \frac{2.4.6}{3.5.7}\frac{x^8}{4} + \ldots.$$

Il est bien entendu que dans cette formule, comme dans la précédente, $\operatorname{arc\,sin} x$ désigne le plus petit arc dont le sinus est x, celui qui s'annule pour $x = 0$ et reste compris entre $\frac{-\pi}{2}$ et $\frac{+\pi}{2}$.

304. *Développement de* $x \cot x$. — D'après les valeurs trouvées pour les dérivées de $x \cot x$, quand on y suppose $x = 0$, le développement de $x \cot x$ est

$$x \cot x = 1 - \frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{45} - \frac{2x^6}{945} - \frac{x^8}{4725} - \frac{2x^{10}}{93555} - \ldots.$$

La loi des coefficients résulte des formules (147) qui permettent de les calculer successivement; mais leur expression se rattache, par une loi que nous ferons connaître, à une suite de nombres fort importants qui sont connus sous le nom de *nombres de Bernoulli*.

305. *Développement de* $\frac{x}{e^x - 1}$. En se servant des résultats donnés (150), on

trouve immédiatement

$$\frac{x}{e^x-1}=1-\frac{x}{2}+\frac{1}{6}\frac{x^2}{1.2}-\frac{1}{30}\frac{x^4}{1.2.3.4}+\frac{1}{42}\frac{x^6}{1.2.3\,4.5.6}-\dots.$$

Les coefficients de $\frac{x^2}{1.2}$, $-\frac{x^4}{1.2.3.4}$, $\frac{x^6}{1.2.3.4.5.6}$,..., sont nommés les *nombres de Bernoulli;* nous les étudierons dans un chapitre spécial. En les désignant par B_1, B_2, B_3,..., on a

$$\frac{x}{e^x-1}=1-\frac{x}{2}+\frac{B_1}{1.2}x^2-\frac{B_2}{1.2.3.4}x^4+\frac{B_3}{1.2.3.4.5.6}x^6-\dots.$$

Nous nous bornerons à remarquer que le développement de $\frac{x}{e^x-1}$ permet d'effectuer celui de $\frac{x}{e^x+1}$ et celui de $\frac{e^x-1}{e^x+1}$: on a en effet

$$\frac{x}{e^x+1}=\frac{x}{e^x-1}-\frac{2x}{e^{2x}-1},$$

et, par conséquent,

$$\frac{x}{e^x+1}=1-\frac{x}{2}+B_1\frac{x^2}{2}-B_2\frac{x^4}{1.2.3.4}+B_3\frac{x^6}{1.2.3.4.5.6}-\dots$$

$$-1+x-B_1\frac{(2x)^2}{1.2}+B_2\frac{(2x)^4}{1.2.3.4}-\dots,$$

c'est-à-dire

$$\frac{x}{e^x+1}=\frac{x}{2}-\frac{B_1x^2}{2}(2^2-1)+\frac{B_2x^4}{1.2.3.4}(2^4-1)-B_3x^6\frac{2^6-1}{1.2.3.4.5.6}+\dots.$$

On a aussi

$$\frac{e^x-1}{e^x+1}=1-\frac{2}{x}\cdot\frac{x}{e^x+1}=\frac{x}{1}-\frac{x^3}{24}+\frac{x^5}{240}-\frac{17.x^7}{40320}+\dots.$$

306. Le développement de $x\cot x$ permet de développer sans calculs nouveaux plusieurs autres fonctions liées à celle-là par des relations simples.

On a

$$\operatorname{tang}x=\cot x-2\cot 2x,$$

$$\operatorname{cosec}x=\operatorname{tang}\frac{x}{2}+\cot x;$$

par conséquent, si l'on pose

$$x\cot x=1-A_2x^2-A_4x^4-A_6x^6-A_8x^8-\dots.$$

On en déduira

$$\operatorname{tang} x = A_2(2^2-1)x + A_4(2^4-1)x^3 + A_6(2^6-1)x^5 + \dots,$$

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{x} + A_2(2-1)\frac{x}{2} + A_4(2^3-1)\frac{x^3}{8} + A_6(2^5-1)\frac{x^5}{32} + \dots$$

On a enfin

$$\frac{d\,l\sin x}{dx} = \cot x.$$

La fonction $l\frac{\sin x}{x}$ étant paire et nulle pour $x = 0$, on peut poser

$$l\frac{\sin x}{x} = C_2 x^2 + C_4 x^4 + C_6 x^6 + \dots;$$

on aura, en prenant les dérivées des deux membres,

$$\cot x - \frac{1}{x} = 2C_2 x + 4C_4 x^3 + 6C_6 x^5 + \dots,$$

et en remplaçant $\cot x$ par la série qui le représente, on en déduit

$$C_2 = -\frac{A_2}{2}, \quad C_4 = -\frac{A_4}{4}, \quad C_6 = -\frac{A_6}{6}, \dots,$$

et, par conséquent,

$$l\frac{\sin x}{x} = -\frac{A_2}{2}x^2 - \frac{A_4}{4}x^4 - \frac{A_6}{6}x^6 - \dots.$$

Si l'on remet des nombres à la place des coefficients A_2, A_4, A_6, ..., on trouve

$$l\frac{\sin x}{x} = -\frac{1}{3}\frac{x^2}{2} - \frac{1}{45}\frac{x^4}{4} - \frac{2}{945}\frac{x^6}{6} - \frac{1}{4725}\frac{x^8}{8} - \frac{2}{93555}\frac{x^{10}}{10} - \dots.$$

Quelques applications du théorème de Taylor.

307. L'application du théorème de Taylor au développement d'une fonction exige le calcul des dérivées de cette fonction; mais il arrive quelquefois que des considérations particulières permettant de faire directement le développement, le théorème de Taylor donne au contraire le moyen de calculer des dérivées d'ordre élevé dont la formation directe serait plus difficile. L'exemple suivant, emprunté au géomètre anglais Murphy, est très-remarquable.

Considérons l'expression

$$x^{n+\alpha} = x^n e^{\alpha lx} = x^n\left[1 + \alpha lx + \frac{\alpha^2(lx)^2}{1\,2} + \dots + \frac{\alpha^n(lx)^n}{1.2\,\dots n} + \dots\right].$$

Le coefficient de α^n est dans le développement, $\frac{x^n(\mathrm{l}x)^n}{1.2\ldots n}$, et par suite dans le développement de $\frac{d^n x^{n+\alpha}}{dx^n}$. Le coefficient de α^n est évidemment

$$\frac{1}{1.2\ldots n}\frac{d^n.x^n(\mathrm{l}x)^n}{dx^n};$$

or on a

$$\frac{d^n x^{n+\alpha}}{dx^n} = x^\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n);$$

mais cette expression est égale au produit de la série

$$x^\alpha = e^{\alpha \mathrm{l}x} = 1+\alpha\mathrm{l}x+\frac{\alpha^2}{1.2}(\mathrm{l}x)^2+\frac{\alpha^3}{1.2.3}(\mathrm{l}x)^3+\ldots+\frac{\alpha^n}{1.2\ldots n}(\mathrm{l}x)^n+\ldots,$$

par le polynôme

$$(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n) = \alpha^n+S_1\alpha^{n-1}+S_2\alpha^{n-2}+\ldots+S_n,$$

où S_p est la somme des produits p à p des n premiers nombres entiers. En formant le produit par la méthode ordinaire de multiplication, on voit que le coefficient de α^n est

$$1+S_1\mathrm{l}x+\frac{S_2}{1.2}(\mathrm{l}x)^2+\ldots+\frac{S_n}{1.2\ldots n}(\mathrm{l}x)^n.$$

Telle est donc la valeur de $\frac{d^n x^n(\mathrm{l}x)^n}{dx^n}$, et il serait beaucoup moins simple de l'obtenir directement.

308. Nous ferons connaître enfin une formule élégante à laquelle conduit le théorème de Taylor pour exprimer la dérivée d'ordre quelconque d'une fonction de fonction. Soit $y=\varphi(u)$ une telle fonction, u étant une fonction donnée de x; si l'on attribue à x un accroissement h, l'accroissement correspondant de y est représenté, d'après la formule de Taylor, par

$$\Delta y = \frac{dy}{dx}h+\frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1.2}+\ldots+\frac{d^ny}{dx^n}\frac{h^n}{1.2\ldots n}+\ldots.$$

Soit k l'accroissement correspondant de u, l'accroissement de y, c'est-à-dire de $\varphi(u)$, est représenté aussi par

$$\Delta y = \frac{d\varphi}{du}k+\frac{d^2\varphi}{du^2}\frac{k^2}{1.2}+\ldots+\frac{d^n\varphi}{du^n}\frac{k^n}{1.2\ldots n}+\ldots.$$

On a d'ailleurs, en appliquant toujours le même théorème,

$$k = \frac{du}{dx}h+\frac{d^2u}{dx^2}\frac{h^2}{1.2}+\ldots+\frac{d^nu}{dx^n}\frac{h^n}{1.2\ldots n}+\ldots$$

En remplaçant k par cette valeur dans la série précédente, et égalant les deux valeurs trouvées pour Δy, on a

$$\sum \frac{d^n y}{dx^n}\frac{h^n}{1.2\ldots n} = \sum \frac{d^p \varphi}{du^p}\cdot\frac{\left(\frac{du}{dx}h + \frac{d^2u}{dx^2}\frac{h^2}{1.2}+\ldots\right)^p}{1.2\ldots p}.$$

Si, dans le second membre, on développe la puissance $p^{ième}$ d'après la formule connue pour la puissance d'un polynôme, on a enfin, en égalant les coefficients de h^n dans les deux membres,

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \sum 1.2.3\ldots n\,\frac{d^p \varphi(u)}{du^p}\cdot\frac{\left(\frac{du}{dx}\right)^{h_1}}{1.2\ldots h_1}\cdot\frac{\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)^{h_2}}{1.2\ldots h_2}\cdots\frac{\left(\frac{d^m u}{dx^m}\right)^{h_m}}{1.2.3\ldots h_m},$$

$h_1, h_2, \ldots, h_m$ devant prendre toutes les valeurs telles que

$$h_1 + 2h_2 + \ldots + mh_m = n,$$

et p étant égal à $h_1 + h_2 + \ldots + h_m$.

Si, dans cette formule, on suppose $u = x^2$, on aura $\frac{du}{dx} = 2x$, $\frac{d^2u}{dx^2} = 2$, et les dérivées suivantes étant nulles devront avoir pour exposant zéro; la formule se réduit alors à

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \sum 1.2.3\ldots n.\varphi^p(x^2)\,\frac{(2x)^{h_1}}{1.2.3\ldots h_1}\cdot\frac{1}{1.2.3\ldots h_2}.$$

Dans cette sommation h_2 est arbitraire, h_1 est égal à $n - 2h_2$, et p à $h_1 + h_2$, c'est-à-dire à $n - h_2$, la sommation devra s'étendre à toutes les valeurs de h_2 inférieures à $\frac{n}{2}$.

EXERCICES.

Si l'on pose, comme le fait Gauss dans un de ses Mémoires,

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x) = 1 + \frac{\alpha.\beta}{1.\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1).\beta.(\beta+1)}{1.2.\gamma.\gamma+1}.x^2 + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1.2.3.\gamma.(\gamma+1)(\gamma+2)}x^3 + \ldots,$$

on a

1. $\sin nx = n\sin x\cos x F\left(\frac{1}{2}n+1, -\frac{1}{2}n+1, \frac{3}{2}, \sin^2 x\right)$.

2. $\sin nx = n\sin x\cos^{n-1}x F\left(-\frac{1}{2}n+1, -\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\operatorname{tang}^2 x\right)$.

3. $\sin nx = n\sin x\cos^{-n-1}x F\left(\frac{1}{2}n+1, \frac{1}{2}n+\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\operatorname{tang}^2 x\right)$.

4. $\frac{x}{\cos x} = \sin x F\left(1, 1, \frac{3}{2}, \sin^2 x\right)$.

CHAPITRE III.

QUELQUES DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIE.

Série de Bernoulli.

309. Jacques Bernoulli a fait connaître, dès l'origine des nouveaux calculs, une série applicable, comme celle de Taylor, au développement d'une fonction quelconque, et qui peut d'ailleurs très-facilement s'en déduire. Si dans la formule

$$F(x+h)=F(x)+hF'(x)+\frac{h^2}{1\cdot 2}F''(x)+\dots,$$

on pose $h=-x$, on en déduit, en faisant passer dans le premier membre tous les termes autres que $F(x)$,

$$(1)\qquad F(x)=F(0)+xF'(x)-\frac{x^2}{1\cdot 2}F''(x)+\dots.$$

Les coefficients des diverses puissances de x étant ici des fonctions de la variable x elle-même, cette série est d'une forme très-différente, et en général beaucoup moins utile que la série de Taylor.

Nous nous bornerons à indiquer une application.

Soit

$$F(x)=(x+a)^n,$$

la formule de Bernoulli donne

$$(2)\qquad (x+a)^n=a^n+nx.(x+a)^{n-1}-\frac{n.n-1}{1\cdot 2}x^2(x+a)^{n-2}-\dots.$$

Cette série peut d'ailleurs s'obtenir à l'aide du binôme de Newton : on a en effet

$$(3)\qquad a^n=(a+x-x)^n=(a+x)^n-nx(a+x)^{n-1}+\frac{n.(n-1)x^2}{1\cdot 2}(a+x)^{n-2},$$

et l'identité des formules est évidente.

310. On a choisi l'exemple précédent, parce que la formule trouvée donne un moyen assez commode de calculer très-exactement la valeur numérique de certaines racines. En divisant l'équation (3) du paragraphe précédent par $(a+x)^n a^n$,

on en déduit en effet

$$(a+x)^{-n} = \frac{1}{a^n}\left[1 - \frac{nx}{a+x} + \frac{n.n-1}{1.2}\frac{x^2}{(a+x)^2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}\frac{x^3}{(a+x)^3} + \cdots\right].$$

Cette série peut être employée avec avantage pour le calcul des racines irrationnelles d'ordre quelconque.

On décompose le nombre $(a+x)$, ou son multiple par une puissance de même ordre, en deux parties très-inégales, dont l'une a est la $n^{ième}$ puissance d'un nombre entier.

Par exemple, si l'on veut calculer $\sqrt{2}$, on prendra

$$50 = 5^2.2 = 49 + 1 = 7^2 + 1,$$

d'où

$$5\sqrt{2} = \sqrt{49+1}.$$

Posons en conséquence

$$a = 49, \quad x = 1, \quad n = -\frac{1}{2},$$

nous aurons

$$5\sqrt{2} = 7\left(1 + \frac{1}{2.50} + \frac{1.3}{2.4.50^2} + \frac{1.3.5}{2.4.6.50^3} + \cdots\right)$$

et

$$\sqrt{2} = \frac{7}{5}\left(1 + \frac{1}{10^2} + \frac{1.3}{2.10^4} + \frac{1.3.5}{2.3.10^6} + \cdots\right),$$

série très-convergente et dont le calcul numérique est facile.

En effet, on a, en convertissant les termes entre parenthèses en fractions décimales,

$$\sqrt{2} = 1,41421\ 35623\ 73095\ 04880,$$

résultat dont les vingt décimales sont exactes.

Si l'on veut déduire de la même formule la racine cubique de 3, on remarque que l'on a

$$2\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{27-3},$$

et par suite, en posant $a = 27$, $x = 3$, $n = -\frac{1}{3}$,

$$2\sqrt[3]{3} = 3.\left(1 - \frac{1.3}{3.24} + \frac{1.4.3^2}{3.6.24^2} - \frac{1.4.7.3^3}{3.6.9.24^3} + \cdots\right)$$

et

$$\sqrt[3]{3} = \frac{3}{2}.\left(1 - \frac{1}{24} + \frac{4}{24.48} - \frac{4.7}{24.48.72} + \cdots\right).$$

On pourrait encore obtenir des séries plus convergentes, par exemple,

$$9\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{2187} = \sqrt[3]{13^3 - 10},$$

$$\sqrt[3]{3} = \frac{13}{9}\cdot\left(1 - \frac{10}{3.2187} + \frac{4.10^2}{3.6.2187^2} - \frac{4.7.10^3}{3.6.9.2187^3} + \cdots\right),$$

série extrêmement convergente, le rapport d'un terme au précédent étant $< \frac{1}{200}$.

Le calcul numérique de ces termes donne

$$\frac{9}{13}\sqrt[3]{3} = 0,99848\,04717\,513$$

on a donc

$$\sqrt[3]{3} = 1,44224\,95703\,074 \quad \text{exact à 13 décimales.}$$

Formule de Lagrange.

311. Soit z une fonction de a et de x définie par l'équation

$$z = a + x\varphi(z). \tag{1}$$

z est développable en série ordonnée suivant les puissances de x, et la formule de Maclaurin peut fournir, comme pour toute autre fonction, les termes successifs du développement. Le problème n'a donc rien qui le distingue essentiellement de ceux que nous avons déjà résolus, mais il est remarquable par l'élégance du résultat auquel il conduit et que l'on peut obtenir par plusieurs méthodes. Remarquons d'abord que, u désignant une fonction quelconque des deux variables x et a, on a, quelle que soit la fonction désignée par le signe F,

$$\frac{d}{da}\left[\mathrm{F}(u)\frac{du}{dx}\right] = \frac{d}{dx}\left[\mathrm{F}(u)\frac{du}{da}\right]; \tag{2}$$

en effectuant les différentiations indiquées, on trouve, en effet, que chaque membre se réduit à

$$\mathrm{F}'(u)\frac{du}{dx}\frac{du}{da} + \mathrm{F}(u)\frac{d^2u}{da\,dx}.$$

On pourrait encore démontrer la formule (2) en remarquant que $\mathrm{F}(u)\frac{du}{dx}$ et $\mathrm{F}(u)\frac{du}{da}$ sont respectivement les dérivées par rapport à x et par rapport à a d'une même fonction $\varphi(u)$ telle que $\varphi'(u) = \mathrm{F}(u)$, et l'équation (2) équivaut alors à

$$\frac{d^2\varphi}{dx\,da} = \frac{d^2\varphi}{da\,dx}.$$

Cela posé, reprenons l'équation

$$z = a + x\varphi(z), \tag{1}$$

en désignant par u une fonction quelconque de z.

On a, en vertu du théorème de Maclaurin,

$$u = a + x\left(\frac{du}{dx}\right)_0 + \frac{x^2}{1.2}\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)_0 + \cdots \frac{x^n}{1.2\ldots n}\left(\frac{d^nu}{dx^n}\right)_0 + \cdots,$$

$\left(\frac{du}{dx}\right)_0$, $\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)_0 \cdots$, $\left(\frac{d^nu}{dx^n}\right)_0$, indiquant les valeurs que prennent les dérivées de u par rapport à x, lorsqu'on y remplace, après la différentiation, x par zéro. Ces dérivées doivent se déduire de l'équation (1) qui définit la fonction z, et la méthode générale, applicable à toutes les fonctions implicites, permet de les calculer successivement; mais l'emploi de la formule (2) simplifie notablement les calculs en permettant, comme on va le voir, de remplacer les différentiations par rapport à x par des différentiations par rapport à a: l'avantage de cette transformation est évident, car lorsqu'on différentie par rapport à a, x est traité comme une constante, et il est indifférent de le supposer nul avant ou après les opérations. Or l'hypothèse $x = 0$ donne $z = a$, et les différentiations indiquées portent alors sur des fonctions explicites et données de la variable a.

On déduit de l'équation (1)

$$\frac{dz}{dx} = \varphi(z) + x\varphi'(z)\frac{dz}{dx},$$

et par conséquent

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\varphi(z)}{1 - x\varphi'(z)}. \tag{3}$$

On déduit de la même équation (1)

$$\frac{dz}{da} = 1 + x\varphi'(z)\frac{dz}{da};$$

par conséquent,

$$\frac{dz}{da} = \frac{1}{1 - x\varphi'(z)}. \tag{4}$$

La comparaison des formules (3) et (4) donne

$$\frac{dz}{dx} = \varphi(z)\frac{dz}{da}. \tag{5}$$

En désignant par u une fonction quelconque de z, on aura

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dz}\frac{dz}{dx},$$

$$\frac{du}{da} = \frac{du}{dz}\frac{dz}{da},$$

et par conséquent l'équation (5) entraîne

$$\frac{du}{dx} = \varphi(z)\frac{du}{da}. \tag{6}$$

Calculons maintenant $\frac{d^2u}{dx^2}$, $\frac{d^3u}{dx^3}\cdots$, en cherchant toujours, comme nous l'avons annoncé, à remplacer les différentiations par rapport à x par des différentiations par rapport à a. On a

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{du}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left[\varphi(z)\frac{du}{da}\right],$$

et, en vertu de l'équation (2),

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{d}{da}\left[\varphi(z)\frac{du}{dx}\right]. \tag{7}$$

Si l'on représente u, qui est une fonction de z, par $f(z)$, on a

$$\frac{du}{dx} = f'(z)\frac{dz}{dx},$$

et l'équation (7) devient

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{d}{da}\left[\varphi(z)f'(z)\frac{dz}{dx}\right] = \frac{d}{da}\left[\varphi(z)^2 f'(z)\frac{dz}{da}\right] = \frac{d}{da}\left[\varphi(z)^2\frac{du}{da}\right],$$

on en déduit

$$\frac{d^3u}{dx^3} = \frac{d}{dx}\cdot\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{d}{dx}\cdot\frac{d}{da}\left[\varphi(z)^2\frac{du}{da}\right] = \frac{d}{da}\cdot\frac{d}{dx}\left[\varphi(z)^2\frac{du}{da}\right],$$

et, en vertu de l'équation (2),

$$\frac{d^3u}{dx^3} = \frac{d^2}{da^2}\left[\varphi(z)^2\frac{du}{dx}\right] = \frac{d^2}{da^2}\left[\varphi(z)^2 f'(z)\frac{dz}{dx}\right] = \frac{d^2}{da^2}\left[\varphi(z)^3 f'(z)\frac{dz}{da}\right] = \frac{d^2}{da^2}\left[\varphi(z)^3\frac{du}{da}\right].$$

La loi générale s'aperçoit aisément, et l'on est conduit à écrire

$$\frac{d^nu}{dx^n} = \frac{d^{n-1}}{da^{n-1}}\left[\varphi(z)^n\frac{du}{da}\right]. \tag{8}$$

Pour démontrer cette formule, supposons que l'on ait déjà trouvé

$$\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}} = \frac{d^{n-2}}{da^{n-2}}\left[\varphi(z)^{n-1}\frac{du}{da}\right],$$

on en conclut

$$\frac{d^nu}{dx^n} = \frac{d^{n-1}}{da^{n-2}dx}\left[\varphi(z)^{n-1}\frac{du}{da}\right] = \frac{d^{n-2}}{da^{n-2}}\cdot\frac{d}{dx}\left[\varphi(z)^{n-1}\frac{du}{da}\right],$$

et, en appliquant successivement les formules (2) et (6),

$$\frac{d^n u}{dx^n} = \frac{d^{n-1}}{da^{n-1}}\left[\varphi(z)^n \frac{du}{da}\right].$$

Pour calculer les dérivées $\frac{du}{dx}$, $\frac{d^2u}{dx^2}\cdots$, $\frac{d^n u}{dx^n}$ lorsque l'on suppose $x=0$, il suffit d'introduire cette hypothèse dans les valeurs que l'on vient de trouver, et comme toutes les différentiations sont prises par rapport à la lettre a indépendante de x, il est permis de faire $x=0$ avant d'effectuer les opérations; on aura alors $z=a$, $\frac{du}{da}=f'(a)$, et la formule (8) donne

$$\left(\frac{d^n u}{dx^n}\right)_0 = \frac{d^{n-1}}{da^{n-1}}[\varphi(a)^n f'(a)]:$$

le développement de u, c'est-à-dire de $f(z)$, est par conséquent

$$f(z)=f(a)+x\varphi(a)f'(a)+\frac{x^2}{1.2}\frac{d}{da}[\varphi(a)^2 f'(a)]+\frac{x^3}{1.2.3}\frac{d^2}{da^2}[\varphi(a)^3 f'(a)]+\ldots.$$

Cette formule très-élégante, qui a été donnée pour la première fois par Lagrange, est connue sous le nom de *Formule de Lagrange*.

312. Laplace, à qui est due l'ingénieuse démonstration que nous venons d'exposer, a présenté le théorème de Lagrange sous une forme plus générale, mais la formule qu'il a fait connaître se déduit si facilement de la précédente, qu'il semble inutile de la désigner par un nom différent. Supposons que l'équation (1) du paragraphe précédent soit remplacée par

$$z = \mathrm{F}[a+x\varphi(z)], \tag{1}$$

et cherchons à développer une fonction $f(z)$ en série ordonnée suivant les puissances de x; posons

$$a+x\varphi(z)=t, \tag{2}$$

on aura

$$z=\mathrm{F}(t),$$

et par conséquent, en vertu de l'équation (2),

$$t=a+x\varphi[\mathrm{F}(t)]. \tag{3}$$

Le problème revient alors à développer $f[\mathrm{F}(t)]$ en série ordonnée suivant les puissances de x, ce qui est une application immédiate de la formule de Lagrange; on a ainsi

$$f(z)=f[\mathrm{F}(a)]+x\varphi[\mathrm{F}(a)]\frac{df[\mathrm{F}(a)]}{da}+\frac{x^2}{1.2}\frac{d}{da}\left\{\{\varphi[\mathrm{F}(a)]\}^2\frac{df[\mathrm{F}(a)]}{da}\right\}+\ldots.$$

313. L'équation

$$z = a + x\varphi(z) \tag{1}$$

a, en général, plusieurs racines. Quelle est celle à laquelle se rapportent les formules précédentes? Cette question est délicate, et plusieurs géomètres célèbres l'ont traitée sans se trouver entièrement d'accord. Ce n'est pas en ce moment que nous pouvons la résoudre complétement : nous nous bornerons, dans ce chapitre, aux indications suivantes.

La série

$$f(z) = f(a) + x\varphi(a)f'(a) + \frac{x^2}{1.2}\cdot\frac{d}{da}[\varphi(a)^2 f'(a)] + \ldots, \tag{2}$$

représente évidemment, pour $x = 0$, la fonction $f(a)$ qui correspond à la racine $z = a$, et comme cette série est une fonction continue de x, si pour chaque valeur de cette variable on partage les racines de l'équation en deux groupes, dont l'un comprenne celles qui sont plus grandes que a et l'autre celles qui sont moindres, la racine à laquelle se rapporte le développement est évidemment, pour de petites valeurs de x, la plus rapprochée de a parmi celles qui appartiennent au même groupe qu'elle, et toute la difficulté consiste à savoir si cette racine est plus grande ou plus petite que a. Or on

$$z - a = x\varphi(z),$$

et en supposant x infiniment petit, z diffère infiniment peu de a, et $z - a$ est de même signe que $x\varphi(a)$. Si donc $\varphi(a)$ est positif, $z - a$ est de même signe que x, et le contraire a lieu si $\varphi(a)$ est négatif.

La même règle s'applique lorsque x prend des valeurs croissantes. La racine variant d'une manière continue, restera toujours dans le groupe où elle se trouve placée d'abord, car $\varphi(a)$ n'étant pas nul, z ne peut devenir égal à a pour aucune valeur de x autre que zéro. La série représentera donc une racine connue jusqu'à ce que l'une des deux circonstances suivantes se présente.

La série (2) cesse d'être convergente.

x acquiert une valeur telle, que les deux racines les plus voisines de a parmi celles de même groupe qu'elle deviennent égales entre elles.

Dans le premier cas, la série ne représente plus rien, et lorsque le second s'est présenté, x continuant à croître, la continuité ne suffit plus pour indiquer celle des racines qui succède à a par une variation continue. En général, d'ailleurs, les deux racines deviennent imaginaires après avoir été égales, et ne peuvent, ni l'une ni l'autre, être représentées par la série (2), qui, comme nous le verrons dans un autre chapitre, devient alors divergente.

Seconde démonstration de la formule de Lagrange.

314. La démonstration de la formule de Lagrange que nous venons de donner, est celle de Laplace. Quoique directe et élégante, elle exige des tranformations successives qui la rendent moins simple que celle que nous allons faire connaître et qui est due à Jacobi.

Lorsqu'une fonction $\varphi(x)$ devient infinie pour $x=0$, elle n'est pas développable par la formule de Maclaurin, mais elle peut, en général, être développée en série ordonnée suivant les puissances positives et négatives de la variable et de la forme

$$A+A_1x+A_2x^2+\ldots+A_nx^n+\ldots$$
$$+\frac{B_1}{x}+\frac{B_2}{x^2}+\ldots+\frac{B_n}{x^n}+\ldots.$$

Lorsque cela a lieu, la dérivée $\varphi'(x)$ est représentée par la dérivée de la série précédente, c'est-à-dire par

$$A_1+2A_2x+\ldots+nA_nx^{n-1}+\ldots$$
$$-\frac{B_1}{x^2}-\frac{2B_2}{x^3}-\ldots-\frac{nB_n}{x^{n+1}}-\ldots,$$

et ce développement n'a pas de terme en $\frac{1}{x}$.

Ainsi donc : *Si une fonction est développable en série ordonnée suivant les puissances positives ou négatives de la variable, la dérivée de cette fonction est développable en série de même forme dans laquelle manque le terme en* $\frac{1}{x}$.

Cela posé, considérons l'équation

$$z=a+x\varphi(z). \tag{1}$$

Soit

$$f(z)=f(a)+A_1x+A_2x^2+\ldots+A_nx^n+\ldots, \tag{2}$$

A_1, A_2,... A_n, étant des fonctions de a indépendantes de x; prenons les dérivées des deux membres par rapport à z, en considérant a comme une constante, et divisons par x^n les deux membres de l'équation obtenue, nous aurons

$$\frac{f'(z)}{x^n}=\frac{A_1}{x^n}\frac{dx}{dz}+\frac{2A_2}{x^{n-1}}\frac{dx}{dz}+\ldots+\frac{nA_n}{x}\frac{dx}{dz}+(n+1)A_{n+1}\frac{dx}{dz}+\ldots,$$

ou, en remplaçant dans le premier membre x par sa valeur déduite de l'équation (1),

$$\frac{f'(z)\varphi(z)^n}{(z-a)^n}=\frac{A_1}{x^n}\frac{dx}{dz}+\frac{2A_2}{x^{n-1}}\frac{dx}{dz}+\ldots+\frac{nA_n}{x}\frac{dx}{dz}+(n+1)A_{n+1}\frac{dx}{dz}+\ldots. \tag{3}$$

Développons actuellement les deux membres en séries ordonnées suivant les puissances positives ou négatives de $z-a$, et égalons les coefficients de $\frac{1}{z-a}$ dans les deux développements. Si l'on pose

$$f'(z)\varphi(z)^n = \mathrm{F}(z),$$

on a

$$\mathrm{F}(z) = \mathrm{F}(a+z-a) = \mathrm{F}(a) + (z-a)\,\mathrm{F}'(a) + \frac{(z-a)^2}{1.2}\,\mathrm{F}''(a) + \ldots$$

Pour obtenir le développement du premier membre de l'équation (3), il faut diviser chaque terme de cette série par $(z-a)^n$, le coefficient du terme en $\frac{1}{z-a}$ est donc

$$\frac{1}{1.2.3\ldots n-1}\cdot\mathrm{F}^{n-1}(a) = \frac{1}{1.2.3\ldots n-1}\cdot\frac{d^{n-1}}{da^{n-1}}[f'(a)\varphi(a)^n].$$

Si l'on développe les divers termes du second membre de l'équation (3), on voit, d'après ce qui précède, qu'un seul d'entre eux, $\frac{n\,\mathrm{A}_n}{x}\frac{dx}{dz}$, donnera un terme en $\frac{1}{z-a}$. Considérons en effet le terme général

$$\mu\,\mathrm{A}_\mu \frac{\frac{dx}{dz}}{x^{n-\mu+1}} = \frac{\mu\,\mathrm{A}_\mu}{\mu-n}\,\frac{d}{dz}\,x^{\mu-n},$$

où μ désigne un nombre entier quelconque différent de n. $x^{\mu-n}$ est en général développable suivant les puissances positives ou négatives de $z-a$, car si μ surpasse n, cette expression est nulle pour $z=a$, et si $\mu-n$ est négatif, le produit

$$x^{\mu-n}(z-a)^{n-\mu} = \left(\frac{z-a}{x}\right)^{n-\mu}$$

a pour $z=a$ une limite finie égale, en vertu de l'équation (1), à $\varphi(a)^{n-\mu}$, et ce produit est en général développable suivant les puissances de $(z-a)$. En divisant tous les termes par $(z-a)^{n-\mu}$, on aura le développement de $x^{\mu-n}$, qui renfermera des puissances positives et négatives de $(z-a)$: la dérivée par rapport à z ne contiendra donc aucun terme en $\frac{1}{z-a}$.

Quant au terme

$$\frac{n\,\mathrm{A}_n\frac{dx}{dz}}{x},$$

on a

$$\frac{n\,\mathrm{A}_n\frac{dx}{dz}}{x} = n\,\mathrm{A}_n\frac{d\,\mathrm{l}.x}{dz}.$$

Le raisonnement précédent n'est donc plus applicable. On a, en vertu de l'équation (1),

$$x = \frac{z-a}{\varphi(z)},$$

$$\mathrm{l}.x = \mathrm{l}(z-a) - \mathrm{l}[\varphi(z)],$$

$$\frac{d\mathrm{l}.x}{dz} = \frac{1}{z-a} - \frac{d\mathrm{l}.\varphi(z)}{dz};$$

$\mathrm{l}.\varphi(z)$ a, pour $z=a$, une valeur finie. On doit donc, en général, le considérer comme développable en série ordonnée suivant les puissances de $z-a$, et la dérivée $\frac{d\mathrm{l}.\varphi(z)}{dz}$ ne contiendra, par suite, dans son développement aucun terme en $\frac{1}{z-a}$; le développement de $\frac{d\mathrm{l}.x}{dz}$ ne contiendra donc qu'un seul terme de cette espèce, et le coefficient de ce terme est l'unité.

En égalant les coefficients de $\frac{1}{z-a}$ dans les développements des deux membres de l'équation (3), on obtient d'après cela

$$n\,\Lambda_n = \frac{1}{1.2.3\ldots n-1}\,\frac{d^{n-1}.[\varphi(a)^n f'(a)]}{da^{n-1}},$$

et par conséquent

$$\Lambda_n = \frac{1}{1.2.3\ldots n}\,\frac{d^{n-1}.[\varphi(a)^n f'(a)]}{da^{n-1}},$$

ce qui démontre le théorème de Lagrange.

L'absence de rigueur est trop évidente dans la démonstration précédente pour qu'il soit nécessaire d'insister sur ce point. Nous ne pouvions pas cependant passer sous silence ces considérations aussi élégantes qu'ingénieuses qui, comme le remarque expressément Jacobi, tiennent de fort près à la *Théorie des résidus*, de Cauchy, qui sera exposée dans un autre chapitre.

Applications de la formule de Lagrange.

315. Soit l'équation

$$z = a + \frac{x}{2}(z^2-1). \tag{1}$$

La formule de Lagrange donne

$$z = a + \frac{x}{2}(a^2-1) + \left(\frac{x}{2}\right)^2 \frac{1}{1.2}\frac{d.(a^2-1)^2}{da} + \ldots + \frac{x^n}{1.2\ldots n}\frac{1}{2^n}\frac{d^{n-1}(a^2-1)^n}{da^{n-1}} + \ldots; \tag{2}$$

on déduit de l'équation (1),

$$z = \frac{1}{x} \pm \frac{1}{x}\sqrt{1-2ax+x^2},$$

et il faut adopter le signe —, puisque $x=0$ doit donner $z=a$.

On a donc

$$\frac{dz}{da} = (1 - 2ax + x^2)^{-\frac{1}{2}};$$

et en différentiant l'équation (2) par rapport à a,

$$(1 - 2ax + x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{x}{2}\frac{d(a^2-1)}{da} + \left(\frac{x}{2}\right)^2 \frac{1}{1.2}\frac{d^2(a^2-1)^2}{da^2} + \ldots + \frac{x^n}{1.2\ldots n}\frac{1}{2^n}\frac{d^n(a^2-1)^n}{da^n} + \ldots$$

développement célèbre et déjà obtenu (283).

316. Considérons pour seconde application l'équation

$$z = a + \frac{x}{z}. \tag{1}$$

Appliquons la formule de Lagrange au développement de z^{-k}, nous aurons

$$z^{-k} = a^{-k} - x.ka^{-k-2} + \frac{x^2}{1.2}.k(k+3)a^{-k-4} - \frac{x^3}{1.2.3}.k(k+4)(k+5)a^{-k-6}$$
$$+ \frac{x^4}{1.2.3.4}.k(k+5)(k+6)(k+7)x^{-k-8} - \ldots.$$

Si l'on fait $a = 2$, l'équation (1) donne

$$z = 1 \pm \sqrt{1+x},$$

et comme la racine qui, pour $x = 0$, se réduit à 2, correspond au signe + du radical, on en conclut en multipliant les deux membres par 2^k,

$$\left(\frac{2}{1+\sqrt{1+x}}\right)^k = 1 - \frac{k}{1}\left(\frac{x}{4}\right) + \frac{k.k+3}{1.2}\left(\frac{x}{4}\right)^2 - \frac{k.(k+4)(k+5)}{1.2.3}\left(\frac{x}{4}\right)^3 + \ldots,$$

série remarquable, que l'on pourrait déduire directement de la formule de Maclaurin.

317. Soit à résoudre l'équation du second degré

$$a - bx + cx^2 = 0.$$

Pour développer une des racines suivant les puissances du coefficient c, mettons-la sous la forme

$$x = \frac{a}{b} + \frac{cx^2}{b}.$$

La série de Lagrange est alors applicable et donne

$$x = \frac{a}{b} + \frac{a^2c}{b^3} + \frac{4a^3c^2}{2b^5} + \frac{5.6.a^4c^3}{2.3b^7} + \ldots;$$

c'est précisément la formule que l'on obtient dans les éléments d'algèbre, lorsque,

supposant c très-petit, on veut déterminer x par la méthode des approximations successives. On trouverait de même

$$1x = 1\cdot\frac{a}{b} + \frac{ac}{b^2} + \frac{3a^2c^2}{2b^4} + \frac{5.4a^3c^3}{2.3b^6} + \dots,$$

$$\frac{x^2}{2} = \frac{a^2}{2b^2} + \frac{a^3c}{b^4} + \frac{5a^4c^2}{2b^6} + \frac{7.6.a^5c^3}{2.3b^8} + \dots.$$

318. Considérons l'équation plus générale

$$x^{m+1} + ax - b = 0,$$

que l'on peut écrire

$$x = \frac{b}{a} - \frac{x^{m+1}}{a}.$$

La formule de Lagrange permet de développer x suivant les puissances de $\frac{1}{a}$. En posant pour simplifier l'écriture $\frac{b}{a} = \alpha$, on a

$$x = \alpha - \frac{1}{a}(\alpha)^{m+1} + \frac{1}{a^2}\frac{1}{1.2}\cdot\frac{d}{d\alpha}(\alpha^{2m+2}) - \frac{1}{a^3}\cdot\frac{1}{1.2.3}\cdot\frac{d^2}{d\alpha^2}(\alpha^{3m+3}) + \dots,$$

c'est-à-dire, en effectuant les opérations et en remplaçant α par sa valeur,

$$x = \frac{b}{a} - \frac{b^{m+1}}{a^{m+2}} + \frac{b^{2m+1}}{a^{2m+3}}\cdot\frac{2m+2}{1.2} - \frac{b^{3m+1}}{a^{3m+4}}\cdot\frac{(3m+2)(3m+3)}{1.2.3} + \dots.$$

Appliquons cette formule à l'équation

$$x^5 + 4x + 2 = 0.$$

Il faut poser $a = 4$, $b = -2$; on a

$$x = -\frac{1}{2} + \frac{2^5}{4^6} - \frac{2^9}{4^{11}}\cdot 5 + \frac{2^{13}}{4^{16}}\cdot 35 - \dots.$$

Ces quatre premiers termes donnent

$$x = 0,4928,$$

résultat exact à un dix-millième près.

319. Considérons enfin l'équation générale de degré n,

$$a_0 = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n,$$

posons

$$\varphi(x) = \frac{1}{a_1 + a_2x + \dots + a_nx^{n-1}},$$

l'équation deviendra

$$a_0 = \frac{x}{\varphi(x)},$$

c'est-à-dire

$$x = a_0 \varphi(x).$$

On pourra donc développer x par la formule de Lagrange, en série ordonnée suivant les puissances de a_0, le coefficient de $\frac{a_0^m}{1.2\dots m}$ étant égal à

$$\frac{d^{m-1}[\varphi(x)]^m}{dx^{m-1}} = \frac{d^{m-1}\left[\frac{1}{a_1 + a_2 x + \dots + a_n x^{n-1}}\right]^m}{dx^{m-1}},$$

dans lequel il faut, après la différentiation, remplacer x par zéro.

Pour calculer cette expression, le plus simple sera de développer en série l'expression

$$(a_1 + a_2 x + \dots + a_n x^{n-1})^{-m},$$

et de chercher le coefficient de x^{m-1}. Ce coefficient, multiplié par $1.2.3\dots(m-1)$, est égal à la dérivée cherchée. Nous indiquerons, dans ce chapitre même, le moyen de le calculer par la méthode des coefficients indéterminés.

320. Nous donnerons enfin, pour dernière application de la formule de Lagrange, l'expression obtenue par M. Cayley pour le développement d'une fonction $\frac{1}{\varphi(z)}$, lorsque l'on sait développer toutes les puissances entières et positives de $\varphi(z)$.

Si l'on a

$$z = a + x\varphi(z), \tag{1}$$

la formule de Lagrange donne

$$F(z) = F(a) + \frac{x}{1} F'(a)\varphi(a) + \frac{x^2}{1.2}\frac{d}{da} F'(a)\varphi(a)^2 + \frac{x^3}{1.2.3}\frac{d^2}{da^2} F'(a)\varphi(a)^3 + \dots. \tag{2}$$

Différentions les deux membres par rapport à a, en remarquant que $\frac{dz}{da}$, déduit de l'équation (1), est égal à

$$\frac{1}{1 - x\varphi'(z)},$$

nous aurons

$$\frac{F'(z)}{1 - x\varphi'(z)} = F'(a) + x\frac{d}{da} F'(a)\varphi(a) + \frac{x^2}{1.2}\frac{d^2}{da^2} F'(a)\varphi(a)^2 + \dots,$$

ou, en remplaçant x par sa valeur $\frac{z-a}{\varphi(z)}$,

$$\frac{F'(z)}{1 - (z-a)\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}} = F'(a) + \frac{(z-a)}{\varphi(z)}\frac{d}{da} F'(a)\varphi(a) + \frac{(z-a)^2}{1.2\,\varphi(z)^2}\frac{d^2}{da^2} F'(a)\varphi(a)^2 + \dots.$$

Dans cette équation la fonction F est arbitraire, et il en est par conséquent de même de la dérivée F′. Posons $F'(z) = \frac{z}{\varphi(z)}$, on obtient

$$\frac{z}{\varphi(z) - (z-a)\varphi'(z)} = \frac{a}{\varphi(a)} + \frac{(z-a)}{\varphi(z)}\frac{d}{da}a + \frac{1}{1.2}\left[\frac{(z-a)}{\varphi(z)}\right]^2 \frac{d^2}{da^2} a\varphi(a) + \dots.$$

Faisons dans cette formule $z = 0$, et soit $\varphi(0) = A$, elle devient

$$0 = \frac{a}{\varphi(a)} - \frac{a}{A} + \frac{1}{1.2}\frac{a^2}{A^2}\cdot\frac{d^2}{da^2} a\varphi(a) - \frac{a^3}{1.2.3}\frac{a^3}{A^3}\frac{d^3}{da^3} a\varphi(a)^2 + \frac{a^4}{1.2.3.4}\frac{d^4}{da^4} a\varphi(a)^3 - \dots,$$

et par conséquent

$$\frac{1}{\varphi(a)} = \frac{1}{A} - \frac{a}{1.2}\cdot\frac{1}{A^2}\cdot\frac{d^2}{da^2}\cdot a\varphi(a) + \frac{a^2}{1.2.3}\cdot\frac{1}{A^3}\frac{d^3}{da^3}\cdot a\varphi(a)^2 - \frac{a^4}{1.2.3.4}\frac{d^4}{da^4}\cdot a\varphi(a)^3 + \dots.$$

Série de Burmann.

321. Burmann a fait connaître une formule très-générale qui comprend comme cas particulier la série de Lagrange, mais qui est elle-même très-facile à en déduire; il a résolu le problème suivant :

Développer une fonction $f(z)$ en série ordonnée suivant les puissances d'une fonction donnée $F(z)$.

Pour résoudre ce problème, remarquons qu'étant donnée l'équation

$$z = a + x\varphi(z), \tag{1}$$

la formule de Lagrange permet de développer une fonction quelconque $f(z)$ en série ordonnée suivant les puissances de x, c'est-à-dire de $\frac{z-a}{\varphi(z)}$. Si donc on pose

$$\frac{z-a}{\varphi(z)} = F(z). \tag{2}$$

Cette équation déterminera $\varphi(z)$, et la formule de Lagrange résoudra le problème que s'est proposé Burmann.

322. Proposons-nous, comme application, de développer e^{az} en série ordonnée suivant les puissances de ze^{bz}; l'équation qui détermine $\varphi(z)$ est ici

$$\frac{z-a}{\varphi(z)} = ze^{bz}. \tag{1}$$

Si l'on pose $a = 0$, $\varphi(z) = e^{-bz}$, cette équation est satisfaite et l'équation (1) du paragraphe précédent devient

$$z = xe^{-bz},$$

la formule de Lagrange donne par conséquent pour le développement de e^{az} suivant les puissances de x,

$$(2) \qquad e^{az} = 1 + ax + a.(a-2b)\frac{x^2}{1.2} + \frac{a.(a-3b)^2}{1.2.3}x^3 + \dots,$$

c'est-à-dire, en remplaçant x par sa valeur,

$$(3) \qquad e^{az} = 1 + aze^{bz} + a.(a-2b)\frac{z^2e^{2bz}}{1.2} + a.(a-3b)^2\frac{z^3e^{3bz}}{1.2.3} + \dots.$$

Série d'Abel.

323. La série que nous venons d'obtenir permet de démontrer une formule très-générale et fort remarquable due à Abel. Considérons une fonction quelconque $\varphi(z)$, à laquelle nous n'imposerons que la seule condition d'être développable en série ordonnée suivant les puissances de e^z :

$$(1) \qquad \varphi(z) = A_0 + A_1e^z + A_2e^{2z} + A_3e^{3z} + \dots$$

La formule (3) du paragraphe précédent donne, si l'on y suppose successivement $z=0$, $z=1$, $z=2$, $z=3\dots$,

$$1 = 1,$$

$$e^a = 1 + ae^b + a(a-2b)\frac{e^{2b}}{2} + a.(a-3b)^2\frac{e^{3b}}{1.2.3} + \dots,$$

$$e^{2a} = 1 + 2ae^{2b} + a(a-2b)\frac{2^2.e^{4b}}{2} + a.(a-3b)^2\frac{2^3e^{6b}}{1.2.3} + \dots,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$e^{na} = 1 + nae^{nb} + a(a-2b)n^2e^{2nb} + a.(a-3b)^2\frac{n^3e^{3nb}}{1.2.3} + \dots.$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Multiplions la première de ces équations par A_0, la seconde par A_1e^x, la troisième par $A_2e^{2x}\dots$, on aura, en ayant égard à l'équation (1) et à celles qui s'en déduisent en changeant x en $x+b$, $x+2b\dots$,

$$\varphi(x+a) = \varphi(x) + a\varphi'(x+b) + \frac{a(a-2b)}{1.2}\varphi''(x+2b) + \dots + \frac{a(a-nb)^{n-1}}{1.2.3\dots n}\varphi^n(x+nb) + \dots.$$

Si l'on suppose, par exemple, $\varphi(x) = x^m$, on en déduit

$$(x+a)^m = x^m + ma(x+b)^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2}a(a-2b)(x+2b)^{m-2} + \dots.$$

Méthode des coefficients indéterminés.

324. La méthode des coefficients indéterminés a fait découvrir un grand nombre de séries importantes; elle est d'un usage très-rapide, mais on ne doit

pas oublier qu'elle n'est rigoureuse qu'autant qu'un raisonnement préalable a légitimé la forme de développement adoptée. Sans cela les résultats obtenus ne peuvent pas être regardés comme certains.

Les démonstrations données dans le chapitre précédent autorisent à regarder une fonction quelconque comme développable suivant les puissances d'un petit accroissement attribué à la variable. Lagrange s'est efforcé, dans un ouvrage célèbre, d'établir à priori cette possibilité, mais les géomètres s'accordent à ne pas regarder son raisonnement comme concluant.

325. La formule de Taylor se déduit très-aisément de la méthode des coefficients indéterminés, dès que l'on a admis la forme du développement. Soit en effet

$$\varphi(x+h) = A + Bh + Ch^2 + Dh^3 + \dots,$$

les coefficients A, B, C... étant des fonctions inconnues de x. Si l'on fait $h = 0$, on en déduit

$$\varphi(x) = A;$$

en prenant ensuite les dérivées successives par rapport à h, et faisant dans chacune d'elles $h = 0$, on trouve

$$\varphi'(x) = B, \quad \varphi''(x) = 2C, \quad \varphi'''(x) = 2.3.D,$$

et ainsi de suite, de sorte que la série ne peut être autre que

$$\varphi(x+h) = \varphi(x) + h\varphi'(x) + \frac{h^2}{1.2}\varphi''(x) + \dots + \frac{h^n}{1.2.3\dots n}\varphi^n(x) + \dots.$$

326. Il est quelquefois commode de chercher les coefficients d'un développement à l'aide d'une propriété connue de la fonction que l'on veut développer et sans recourir, comme dans l'exemple précédent, à l'emploi des dérivées, qui revient à appliquer le théorème de Taylor.

Nous en donnerons quelques exemples.

Développement de $x \cot x$. — Posons

$$x\cot x = A + A_1x^2 + A_2x^4 + A_3x^6 + \dots;$$

on a

$$x\cot x = \frac{x\cos x}{\sin x} = x\,\frac{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \dots}{x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \dots},$$

on doit donc avoir

$$x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{2.3.4} - \frac{x^7}{2.3.4.5.6} + \dots = (A + A_1x^2 + A_2x^4 + \dots)\left(x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \dots\right).$$

En effectuant le produit indiqué dans le second membre et égalant les coefficients

des mêmes puissances de x, on trouve

$$1 = A, \quad -\frac{1}{2} = A_1 - \frac{A}{1.2.3}, \quad \frac{1}{1.2.3.4} = A_2 - \frac{A_1}{1.2.3} + \frac{A}{1.2\,3.4.5}, \ldots,$$

on en déduit

$$A = 1, \quad A_1 = -\frac{1}{3}, \quad A_2 = -\frac{1}{45}, \quad A_3 = -\frac{2}{945}, \ldots,$$

ainsi qu'on l'a déjà trouvé (304).

327. *Développement du produit* $(1+xz)(1+x^2z)(1+x^3z)(1+x^4z)\ldots(1+x^nz)\ldots$.
Désignons ce produit par P et posons

$$P = 1 + A_1 z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + \ldots.$$

Si, dans le produit P, on change x en xz, il devient évidemment $\frac{P}{1+xz}$; on doit donc avoir

$$1 + A_1 xz + A_2 x^2 z^2 + A_3 x^3 z^3 + \ldots = \frac{1 + A_1 z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + \ldots}{1+xz};$$

en chassant le dénominateur et égalant les coefficients des mêmes puissances de z dans les deux membres, on a

$$x + A_1 x = A_1, \quad A_1 x^2 + A_2 x^2 = A_2, \quad A_2 x^3 + A_3 x^3 = A_3, \ldots,$$

on en déduit

$$A_1 = \frac{x}{1-x}, \quad A_2 = \frac{x^3}{(1-x)(1-x^2)}, \quad A_3 = \frac{x^6}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)},$$

$$A_4 = \frac{x^{10}}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)},$$

et l'on a par conséquent

$$(1+xz)(1+x^2z)(1+x^3z)\ldots(1+x^nz)\ldots = 1 + \frac{x}{1-x}z + \frac{x^3}{(1-x)(1-x^2)}z^2 + \ldots$$

$$+ \frac{x^{n\frac{(n+1)}{2}}}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^n)}z^n + \ldots.$$

328. *Développement du produit* $(1+xz)(1+x^3z)(1+x^5z)\ldots$.
Désignons ce produit par Q et posons

$$Q = 1 + B_1 z + B_2 z^2 + B_3 z^3 + \ldots.$$

Si dans le produit Q on change z en $x^2 z$, il devient $\frac{Q}{1+xz}$; on doit donc avoir

$$1 + B_1 x^2 z + B_2 x^4 z^2 + B_3 x^6 z^3 + \ldots = \frac{1 + B_1 z + B_2 z^2 + B_3 z^3 + \ldots}{1 + xz}.$$

En chassant les dénominateurs et égalant les coefficients des mêmes puissances de z dans les deux membres, il vient

$$x + B_1 x^2 = B_1, \quad B_1 x^3 + B_2 x^4 = B_2, \quad B_2 x^5 + B_3 x^6 = B_3, \ldots,$$

on en déduit

$$B_1 = \frac{x}{1-x^2}, \quad B_2 = \frac{x^4}{(1-x^2)(1-x^4)}, \quad B_3 = \frac{x^9}{(1-x^2)(1-x^4)(1-x^6)},$$

et par conséquent

$$(1+xz)(1+x^3z)(1+x^5z)\ldots = 1 + \frac{x}{1-x^2} z + \frac{x^4}{(1-x^2)(1-x^4)} z^2 + \frac{x^9}{(1-x^2)(1-x^4)(1-x^6)} z^3 + \ldots.$$

329. *Développement du produit* $(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)\ldots$.

Si l'on désigne ce produit par R et qu'on y change x en x^2, il devient évidemment $\frac{R}{1+x}$. Si donc on pose

$$R = 1 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 \ldots,$$

on doit avoir

$$1 + C_1 x^2 + C_2 x^4 + C_3 x^6 + \ldots = \frac{1 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \ldots}{1+x},$$

et en chassant le dénominateur pour égaler les coefficients des mêmes puissances de x, on trouve

$$1 = C_1, \quad C_1 = C_2, \quad C_1 = C_3, \quad C_2 = C_4, \ldots,$$

le développement est par conséquent

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)\ldots = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots. \tag{1}$$

On peut d'ailleurs arriver au même résultat en remarquant que le second membre représente $\frac{1}{1-x}$, et que l'on a identiquement

$$\frac{1}{1-x} = \frac{1+x}{1-x^2} = \frac{(1+x)(1+x^2)}{1-x^4} = \frac{(1+x)(1+x^2)(1+x^4)}{1-x^8} = \ldots,$$

ce qui, en supposant x plus petit que 1, donne évidemment pour limite la formule (1).

330. Nous rapprocherons des résultats précédents une formule très-remarquable due à Euler, et qui exprime sous forme de série ordonnée suivant les puissances de x, le produit infini

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)\dots(1-x^n)\dots.$$

Si l'on désigne ce produit par S, on a évidemment

$$S = 1 - x - x^2(1-x) - x^3(1-x)(1-x^2) - x^4(1-x)(1-x^2)(1-x^3) - \dots.$$

Désignons par $-A$ l'ensemble des termes qui suivent les deux premiers, c'est-à-dire posons

$$S = 1 - x - A,$$
$$A = x^2(1-x) + x^3(1-x)(1-x^2) + x^4(1-x)(1-x^2)(1-x^3) + \dots,$$

que l'on peut écrire, en effectuant dans chaque terme la multiplication par $(1-x)$,

$$A = x^2 + x^3(1-x^2) + x^4(1-x^2)(1-x^3) + \dots$$
$$- x^3 - x^4(1-x^2) - x^5(1-x^2)(1-x^3) + \dots,$$

et, en réunissant les termes qui contiennent actuellement en multiplicateur la même puissance de x,

$$A = x^2 - x^5 - x^7(1-x^2) - x^9(1-x^2)(1-x^3) - x^{11}(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)\dots.$$

Posons

$$A = x^2 - x^5 - B,$$

et par suite

$$B = x^7(1-x^2) + x^9(1-x^2)(1-x^3) + x^{11}(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4) + \dots,$$

que l'on peut écrire, en effectuant dans chaque terme la multiplication par $1-x^2$,

$$B = x^7 + x^9(1-x^3) + x^{11}(1-x^3)(1-x^4) + \dots$$
$$- x^9 - x^{11}(1-x^3) - x^{13}(1-x^3)(1-x^4) - \dots,$$

et, en réunissant les termes qui contiennent actuellement en multiplicateur la même puissance de x,

$$B = x^7 - x^{12} - x^{15}(1-x^3) - x^{18}(1-x^3)(1-x^4) - x^{21}(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5) - \dots.$$

Posons

$$B = x^7 - x^{12} - C,$$

et par suite

$$C = x^{15}(1-x^3) + x^{18}(1-x^3)(1-x^4) + x^{21}(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5) + \dots,$$

que l'on peut écrire, en effectuant la multiplication dans chaque terme par $1-x^3$,

$$C = x^{15} + x^{18}(1-x^4) + x^{21}(1-x^4)(1-x^5) + \dots$$
$$- x^{18} - x^{21}(1-x^4) - x^{24}(1-x^4)(1-x^5)\dots,$$

et en réunissant les termes qui contiennent actuellement en facteur la même puissance de x,

$$C = x^{15} - x^{22} - x^{26}(1 - x^4) - x^{30}(1 - x^4)(1 - x^5) - \dots.$$

Si l'on pose

$$C = x^{15} - x^{22} - D,$$

on pourra transformer D comme on a transformé A, B et C, et en extraire deux termes

$$-x^{26} + x^{35},$$

et en continuant ainsi indéfiniment, on trouve

$$S = 1 - x - x^2 + x^5 - x^7 + x^{12} - x^{15} + x^{22} - x^{26} + x^{35} - x^{40} + x^{51} - \dots.$$

Les coefficients sont alternativement $+1$ et -1; quant aux exposants, pour en trouver la loi, il faut les considérer d'abord de deux en deux, c'est-à-dire porter son attention sur les premiers termes des groupes de deux, successivement extraits de produit; or on voit que dans la suite

$$2, \quad 7, \quad 15, \quad 26, \quad 40, \dots,$$

les différences sont

$$5, \quad 8, \quad 11, \quad 14, \dots,$$

progression par différence dont la raison est 3; il est facile d'en conclure que les exposants sont contenus dans la formule

$$\frac{3n^2 + n}{2}.$$

On verra de même que les exposants

$$1, \quad 5, \quad 12, \quad 22, \quad 35, \quad 51, \dots,$$

sont contenus dans la formule

$$\frac{3n^2 - n}{2},$$

et la formule cherchée est enfin

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)\dots = 1 - x - x^2 + x^5 - x^7 + x^{12} - \dots + x^{\frac{3n^2-n}{2}} - x^{\frac{3n^2+n}{2}} + \dots,$$

et, cette loi une fois connue, on vérifie bien aisément que les termes successivement fournis par le mode de raisonnement employé y sont constamment conformes.

331. *Puissance $n^{ième}$ d'une série.* — Soit

$$(1) \qquad a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_p x^p + \ldots$$

une série convergente. La méthode des coefficients indéterminés offre le moyen le plus rapide de calculer les coefficients de la série qui en représente la puissance $n^{ième}$.

Posons en effet

$$(2) \qquad (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \ldots + a_p x^p + \ldots)^n = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots,$$

on en déduit, en prenant les dérivées des deux membres,

$$(3) \quad n(a_0 + a_1 x + \ldots + a_p x^p \ldots)^{n-1}(a_1 + 2a_2 x \ldots + pa^p x^{p-1} + \ldots) = A_1 + 2A_2 x + 3A_3 x^2 + \ldots.$$

En divisant membre à membre les équations (2) et (3), et chassant les dénominateurs, il vient

$$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots)(A_1 + 2A_2 x + \ldots pA_p x^{p-1} + \ldots)$$
$$= n(a_1 + 2a_2 x \ldots + pa_p x^{p-1} + \ldots)(A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_p x^p + \ldots).$$

En effectuant les multiplications indiquées et égalant dans les deux membres les coefficients des mêmes puissances de x, on obtient les équations suivantes :

$$A_1 a_0 = nA_0 a_1, \qquad A_1 a_1 + 2A_2 a_0 = 2nA_0 a_2 + nA_1 a_1,$$
$$A_1 a_2 + 2A_2 a_1 + 3A_3 a_0 = 3na_3 A_0 + 2na_2 A_1 + na_1 A_2,$$
$$A_1 a_3 + 2A_2 a_2 + 3A_3 a_1 + 4A_4 a_0 = 4na_4 A_0 + 3na_3 A_1 + 2na_2 A_2 + na_1 A_3,$$

on en déduit

$$A_1 = \frac{nA_0 a_1}{a_0}, \qquad A_2 = \frac{na_2 A_0}{a_0} + \frac{(n-1)}{2a_0} A_1 a_1 = \frac{na_2 A_0}{a_0} + \frac{n(n-1)}{2a_0^2} A_0 a_1^2,$$

$$A_3 = \frac{na_3 A_0}{a_0} + \frac{(2n-1)}{3a_0} a_2 A_1 + \frac{(n-2)}{3a_0} a_1 A_2.$$

On pourra continuer les calculs aussi loin que l'on voudra et rattacher ainsi tous les coefficients les uns aux autres, en les faisant dépendre du premier A_0, qui reste seul inconnu. Or on voit en faisant $x = 0$ que l'on a $A_0 = a^n$. Le problème est donc résolu.

Si l'on se donne, par exemple,

$$\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40} x^5 + \ldots,$$

on en déduit

$$(\arcsin x)^2 = x^2 + \frac{x^4}{3} + \frac{8x^6}{45} + \frac{4x^8}{35} + \ldots,$$

ce qui s'accorde avec le résultat trouvé (303), mais la loi des coefficients serait difficile à obtenir de cette manière.

332. Nous devons donner ici un élégant théorème énoncé par Eisenstein et démontré de la manière suivante par M. Sylvester.

Lorsqu'on a formé les puissances entières et positives d'une série ordonnée suivant les puissances croissantes d'une variable x, on peut en déduire facilement le développement d'une puissance quelconque.

Soit

$$u = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_n x^n + \ldots, \tag{1}$$

on a

$$u^m = [A_0 + (u - A_0)]^m = A_0^m + m A_0^{m-1}(u - A_0) + \frac{m(m-1)}{1.2} A_0^{m-2}(u - A_0)^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots n} A_0^{m-n}(u - A_0)^n + \ldots; \tag{2}$$

la différence $(u - A_0)$ contient x en facteur, par conséquent $(u - A_0)^q$ ne contiendra, toutes réductions faites, que des puissances de x à exposant au moins égal à q. Si donc on veut chercher, dans le développement de u^m, le coefficient de x^n, on pourra négliger tous les termes de l'équation (2) dans lesquels l'exposant de $u - A_0$ est supérieur à un nombre arbitraire n' égal à n ou plus grand que n, et si l'on désigne par $B_{m,n}$, le coefficient de x^n dans le développement de u^m, on aura

$$B_{m,n} = m A_0^{m-1} B_{(1,n)} + \frac{m(m-1)}{1.2} A_0^{m-2}(B_{2,n} - 2A_0 B_{(1,n)}) + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n'+1)}{1.2.3\ldots n'} A_0^{m-n'}[B_{(n',n)} - n' A_0 B_{(n'-1,n)} \ldots \pm n' A_0^{n'-1} B_{(1,n)}], \tag{3}$$

et n', dans cette formule, est assujetti à la seule condition de n'être pas inférieur à n. Le plus simple sera de supposer $n' = n$.

En adoptant cette supposition et réunissant dans le second membre les termes semblables, l'équation (3) prend la forme

$$\begin{aligned} B_{(m,n)} = {} & m B_{(1,n)} A_0^{m-1}\left[1 - (m-1) + \frac{(m-1)(m-2)}{1.2} \ldots \pm \frac{(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots(n-1)}\right] \\ & + \frac{m(m-1)}{1.2} B_{(2,n)} A_0^{m-2}\left[1 - (m-2) + \frac{(m-2)(m-3)}{1.2} \ldots \pm \frac{(m-2)(m-3)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots(n-2)}\right] \\ & + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2} (B_{3,n}) A_0^{m-3}\left[1 - (m-3) + \frac{(m-3)(m-4)}{1.2} \ldots \pm \frac{(m-3)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n-3}\right] \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n} A_0^{m-n} B_{(n,n)}, \end{aligned}$$

ou, en sommant les coefficients placés entre parenthèses,

$$B_{(m,n)} = mB_{(1,n)}A_0^{m-1}\left[\frac{(2-m)(3-m)\ldots(n-m)}{1.2\ldots n-1}\right]$$

$$+\frac{m(m-1)}{1.2}B_{(2,n)}A_0^{m-2}\left[\frac{(3-m)(4-m)\ldots(n-m)}{1.2\ldots(n-2)}\right]\ldots+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n}A_0^{m-n}B_{(n,n)}.$$

Si dans cette formule on fait $m=-1$, on obtient le coefficient de x^n dans le développement de $\frac{1}{u}$ et l'on vérifiera aisément qu'il coïncide avec celui qui résulte de la formule (320) déduite par M. Cayley du théorème de Lagrange.

333. *Formule de Stirling.*—Nous déduirons encore de la méthode des coefficients indéterminés quelques développements célèbres qui seront utilisés dans la suite, après avoir été démontrés d'une manière plus rigoureuse.

La formule de Stirling, que nous allons faire connaître, est de la forme suivante:

$$\varphi(x+h)-\varphi(x)=h\varphi'(x)+A_1h[\varphi'(x+h)-\varphi'(x)]$$
$$+A_2h^2[\varphi''(x+h)-\varphi''(x)]+A_3h^3[\varphi'''(x+h)-\varphi'''(x)]+\ldots.$$

Pour que les deux membres soient identiques, il faut et il suffit qu'en les développant suivant les puissances de h, on obtienne de part et d'autre les mêmes coefficients. Cette condition fournit les équations

$$\frac{1}{1.2}-A_1=0,\quad \frac{1}{1.2.3}-\frac{A_1}{1.2}-A_2=0,\quad \frac{1}{1.2.3.4}-\frac{A_1}{1.2.3}-\frac{A_2}{1.2}-A_3=0,\ldots;$$

ces équations donnent

$$A_1=\frac{1}{2},\quad A_2=-\frac{1}{12},\quad A_3=0,\quad A_4=\frac{1}{720},\ldots;$$

Pour déterminer l'expression du terme général, remarquons que les équations qui déterminent A_0, A_1, A_2,..., sont indépendantes de la forme de la fonction φ.

On peut donc poser $\varphi(x)=e^x$, et les coefficients relatifs à cette hypothèse conviendront dans tous les cas. Or l'équation (1) devient alors

$$e^x(e^h-1)=he^x+A_1he^x(e^h-1)+A_2h^2e^x(e^h-1)+\ldots,$$

c'est-à-dire

$$\frac{h}{e^h-1}=1-A_1h-A_2h^2-A_3h^3-\ldots,$$

d'où l'on conclut (305)

$$A_{2n+1}=0,\quad A_{2n}=(-1)^n\frac{B_n}{1.2.3\ldots 2n};$$

on a, par conséquent, pour une fonction quelconque

$$\varphi(x+h)-\varphi(x)=h\varphi'(x)+\frac{h}{2}[\varphi'(x+h)-\varphi'(x)]-\frac{h^2}{12}[\varphi''(x+h)-\varphi''(x)]$$
$$+\frac{h^4}{720}[\varphi^{IV}(x+h)-\varphi^{IV}(x)]+\ldots+(-1)^n\frac{Bn\,h^{2n}}{1.2.3\ldots 2n}[\varphi^{2n}(x+h)-\varphi^{2n}(x)]+\ldots.$$

Cette formule a d'importantes applications, que nous étudierons dans un autre chapitre, lorsque nous pourrons faire connaître les conditions de la convergence et les limites de l'erreur commise en s'arrêtant à un terme donné.

334. *Formule de M. Boole.* — M. Boole a fait connaître une formule analogue à celle de Stirling, qui s'obtient facilement, comme la précédente, par la méthode des coefficients indéterminés; elle est de la forme

$$\varphi(x+h)-\varphi(x)=A_1h[\varphi'(x+h)+\varphi'(x)]+A_2h^2[\varphi''(x+h)+\varphi''(x)]$$
$$+A_3h^3[\varphi'''(x+h)+\varphi'''(x)]+\ldots. \qquad (1)$$

En égalant, comme dans le cas précédent, les coefficients des mêmes puissances de h, et remarquant que $\varphi'(x)$ est facteur commun dans ceux de h, $\varphi''(x)$ dans ceux de h^2, et ainsi de suite, on a

$$1-2A_1=0,$$
$$\frac{1}{1.2}-A_1-2A_2=0,$$
$$\frac{1}{1.2.3}-\frac{A_1}{1.2}-A_2-2A_3=0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

De ces équations on déduit

$$A_1=\frac{1}{2},\quad A_2=0,\quad A_3=-\frac{1}{24},\quad \ldots$$

Pour trouver l'expression du terme général, remarquons, comme dans le cas précédent, qu'il est permis, sans changer les coefficients cherchés, de faire une hypothèse particulière, $\varphi(x)=e^x$ par exemple; l'équation (1) devient alors

$$e^x(e^h-1)=A_1he^x(e^h+1)+A_2h^2e^x(e^h+1)+\ldots,$$

c'est-à-dire

$$\frac{e^h-1}{e^h+1}=A_1h+A_2h^2+A_3h^3+\ldots,$$

et par conséquent (305)

$$A_1=\frac{1}{2},\quad A_2=0,\quad A_3=-\frac{1}{24},\quad A_4=0,\quad A_5=\frac{1}{240},\quad A_6=0,\quad A_7=\frac{17}{40320},\ldots.$$

Si l'on pose $(x+h)=y$, l'équation de M. Boole devient

$$\varphi(y)-\varphi(x)=\frac{1}{2}[\varphi'(y)+\varphi'(x)](y-x)-\frac{1}{24}[\varphi'''(y)+\varphi'''(x)](y-x)^2+\ldots.$$

335. *Formules de M. Tchebitchef.* — La méthode des coefficients indéterminés a conduit M. Tchebitchef à plusieurs séries fort remarquables. Supposons que l'on connaisse un développement en série de la forme

$$F(x)=f(x)+f(2x)+f(3x)+f(4x)+\ldots. \tag{1}$$

Proposons-nous d'en déduire le développement de $f(1)$ en série de la forme

$$f(1)=A_1F(1)+A_2F(2)+A_3F(3)+\ldots+A_nF(n)+\ldots. \tag{2}$$

Ce problème, dont les applications semblent au premier abord très-restreintes, a cependant une véritable importance. Pour le résoudre en général, et déterminer les coefficients $A_1, A_2,\ldots, A_n$, qui, l'équation (2) étant admise, sont indépendants de la forme des fonctions qui y figurent, remplaçons dans l'équation (2), $F(1)$, $F(2)$, $F(3)$,... par leurs valeurs déduites de l'équation (1), quand on y suppose successivement $x=1$, $x=2$, $x=3$,.... On obtiendra une équation de la forme

$$f(1)=P_1f(1)+P_2f(2)+P_3f(3)+\ldots, \tag{3}$$

à laquelle on satisfera évidemment en posant

$$P_1=1,\quad P_2=0,\quad P_3=0,\ldots,\quad P_n=0\ldots;$$

on forme ainsi les équations

$$A_1=1,\quad 0=A_2+1,\quad 0=A_3+1,\quad 0=A_4+A_2+1,$$

et l'on en déduit

$$A_1=1,\quad A_2=-1,\quad A_3=-1,\quad A_4=0.$$

La loi générale est la suivante :

Si n est premier, on a $A_n=1$. Si n est le produit de plusieurs facteurs premiers différents et en nombre k, on a $A_n=(-1)^k$. Enfin lorsque n contient deux fois le même facteur premier, A_n est nul.

La démonstration de ces trois théorèmes est fort simple. Si n est premier, le second membre ne contient que deux termes en $f(n)$, qui proviennent de $A_1F(1)$ et de $A_nF(n)$, en sorte que l'on a

$$0=A_1^f+A_n,$$

et comme $A_1=1$, on conclut

$$A_n=-1.$$

Si l'on a $n = pqrs\ldots kl$, $p, q, r\ldots k, l$, désignant des nombres premiers différents, le coefficient de $f(n)$ dans l'équation (3) est la somme des coefficients A, dont les indices sont les diviseurs de n. Or on peut partager ces termes en deux groupes: ceux qui ont pour indices des diviseurs du produit $pqr\ldots k$, et ceux dont l'indice contient le facteur l. La somme des premiers est nulle, parce qu'ils forment le coefficient de $f\left(\frac{n}{l}\right)$, déjà égalé à zéro ; il reste donc

$$A_l + A_{pl} + A_{ql} + \ldots + A_{Dl} + \ldots + A_{pqr\ldots kl} = 0,$$

D désignant un diviseur quelconque du produit $pq\ldots k$. Mais si l'on admet le théorème démontré pour les coefficients dont les indices ont un nombre moindre de facteurs, tous les termes de cette équation sont précisément égaux et de signes contraires (sauf le dernier), à ceux de l'équation qui exprime que le coefficient de $f(pqrs\ldots k)$ est nul. Les derniers termes de deux équations doivent donc être de même égaux et de signes contraires; on a donc

$$A_{pqr\ldots k} = -A_{pqr\ldots kl},$$

et par conséquent, lorsque le théorème est vrai dans le cas où n contient moins de n facteurs, il est vrai aussi lorsqu'il y en a n.

Supposons enfin $n = \alpha p^m$, p étant premier et différent de l'unité. En égalant à zéro la somme des coefficients dont l'indice est diviseur de αp^m, on trouvera d'abord la somme de ceux dont l'indice est diviseur de α, et cette somme est nulle, puisque le coefficient de $f(\alpha)$ doit être égalé à zéro dans l'équation (3). De même les termes dont l'indice contient une seule fois p en facteur, ont une somme nulle, comme on le voit en écrivant que le coefficient de $f(\alpha p)$ est égal à zéro. Il en est de même de ceux dont l'indice contient p^2 en facteur, et ainsi de suite, en sorte que l'équation se réduit à

$$A_{p^m} + A_{D_1 p^m} + A_{D_2 p^m} + \ldots + A_{\alpha p^m} = 0,$$

$D_1, D_2\ldots$, désignant les diviseurs de α. Si donc on admet que A_n soit nul toutes les fois que n est le produit de p^m par un nombre moindre que α, il sera nul nécessairement pour $n = \alpha p^m$, ce qui démontre le théorème, car il est bien facile de le vérifier pour $n = p^m$.

Pour appliquer le théorème précédent, considérons la formule évidente

$$\frac{1}{a^x - 1} = a^{-x} + a^{-2x} + a^{-3x} + a^{-4x} + \ldots,$$

on en conclut

$$a^{-1} = \frac{1}{a-1} - \frac{1}{a^2-1} - \frac{1}{a^3-1} - \frac{1}{a^5-1} + \frac{1}{a^6-1} - \ldots;$$

on a aussi

$$\frac{l(1-a^x)}{x} = -\frac{a^x}{x} - \frac{a^{2x}}{2x} - \frac{a^{3x}}{3x} - \frac{a^{4x}}{4x} - \dots,$$

on en conclut, en cherchant la valeur de $-\frac{a^x}{x}$ pour $x=1$,

$$-a = \frac{l(1-a)}{1} - \frac{l(1-a^2)}{2} - \frac{l(1-a^3)}{3} - \frac{l(1-a^5)}{5} + \frac{l(1-a^6)}{6} - \frac{l(1-a^7)}{7} + \frac{l(1-a^{10})}{10} + \dots,$$

et par conséquent

$$e^{-a} = \frac{(1-a)(1-a^6)^{\frac{1}{6}}(1-a^{10})^{\frac{1}{10}}(1-a^{14})^{\frac{1}{14}}\dots}{(1-a^2)^{\frac{1}{2}}(1-a^3)^{\frac{1}{3}}(1-a^5)^{\frac{1}{5}}(1-a^7)^{\frac{1}{7}}(1-a^{11})^{\frac{1}{11}}(1-a^{13})^{\frac{1}{13}}\dots}.$$

336. M. Tchebitchef a considéré également le cas où deux fonctions $F(x)$ et $f(x)$, sont liées par une équation de la forme

$$F(x) = f(x) + f(3x) + f(5x) + \dots. \qquad (1)$$

On peut encore dans ce cas exprimer $f(1)$ par une série de la forme

$$f(1) = A_1 F(1) + A_3 F(3) + A_5 F(5) + \dots. \qquad (2)$$

Pour trouver les coefficients, on remplacera dans le second membre $F(1)$, $F(3)\dots$, par leurs valeurs déduites de l'équation (1), et en égalant à zéro les coefficients de $f(3), f(5), f(7)\dots$, et à l'unité celui de $f(1)$, on aura

$$A_1 = 1, \quad A_3 + A_1 = 0, \quad A_5 + A_1 = 0, \quad A_7 + A_1 = 0, \quad A_9 + A_3 + A_1 = 0, \dots.$$

En général, en désignant par n un nombre impair quelconque, il faudra égaler à zéro la somme des coefficients dont l'indice est un diviseur de n. On verra, absolument comme dans le cas précédent, que si n est divisible par un carré, on a $A_n = 0$, et que dans le cas contraire, si n est le produit de k nombres premiers différents, on a $A_n = (-1)^k$, et par conséquent la série (1) devient

$$f(1) = F(1) - F(3) - F(5) - F(7) - F(11) - F(13) + F(15) - F(17) - F(19) + F(21) - \dots.$$

Théorie des fonctions génératrices.

337. La théorie des fonctions génératrices créée par Laplace a été exposée par lui dans son grand ouvrage sur le Calcul des Probabilités. L'autorité de son nom a contribué à faire adopter les définitions et les notations qu'il a employées; elles

sont aujourd'hui trop connues des géomètres pour que nous négligions de les indiquer et de faire connaître quelques-unes de leurs applications les plus simples.

Lorsqu'une fonction $\varphi(x)$ est développée en série ordonnée suivant les puissances de la variable dont elle dépend, et que l'on a

$$\varphi(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_n x^n + \ldots,$$

on dit que $\varphi(x)$ est la fonction génératrice de A_n.

Ainsi, par exemple, e^x est la fonction génératrice de $\frac{1}{1.2.3\ldots n}$.

Lorsque le développement de $\varphi(x)$ contient des termes affectés d'un exposant négatif, la définition s'y applique sans difficulté et $\varphi(x)$ reste la fonction génératrice de A_n, A_n étant une fonction de n qui, pour les valeurs positives ou négatives de l'entier n, représente le coefficient de x^n dans le développement. Lorsque la série qui représente $\varphi(x)$ ne contient que des puissances positives de x, A_n doit être considéré comme égal à zéro pour toute valeur négative de n.

338. $\varphi(x)$ étant la fonction génératrice de A_n, $\frac{\varphi(x)}{x^p}$ est celle de A_{n+p}, et $\varphi(x)x^p$ celle de A_{n-p}. Lorsque $n-p$ est négatif, A_{n-p} doit être considéré comme nul, mais le théorème reste exact, car dans le développement de $\varphi(x)$, les exposants de tous les termes sont positifs, et par conséquent dans celui de $\varphi(x).x^p$ ils sont tous plus grands que p.

On voit tout aussi facilement que $\varphi(x)\left(\frac{1}{x}-1\right)$ est la fonction génératrice de $A_{n+1}-A_n$ ou ΔA_n, et il en résulte que $\varphi(x)\left(\frac{1}{x}-1\right)^2$ est celle de $\Delta^2 A_n$, $\varphi(x)\left(\frac{1}{x}-1\right)^3$ celle de $\Delta^3 A_n$, et en général $\varphi(x)\left(\frac{1}{x}-1\right)^p$ celle de $\Delta^p A_n$.

En combinant ce théorème avec le précédent, on voit enfin que $\varphi(x)\,x^p\left(\frac{1}{x}-1\right)^q$ est la fonction génératrice de $\Delta^q A_{n-p}$.

339. Les remarques qui précèdent fournissent une démonstration simple d'un théorème remarquable relatif aux différences d'une suite quelconque de nombres.

Toute équation identique dont les deux membres sont des fonctions entières et rationnelles de x, $\frac{1}{x}$ et $\left(\frac{1}{x}-1\right)$, reste exacte lorsque l'on y remplace les produits de la forme $x^p\left(\frac{1}{x}-1\right)^q$ et $\frac{1}{x^p}\left(\frac{1}{x}-1\right)^q$ par $\Delta^q A_{n-p}$ et $\Delta^q A_{n+p}$, A_i désignant un nombre entièrement arbitraire.

Multiplions en effet l'équation identique donnée, par $\varphi(x)$ fonction génératrice de A_n, et, après cette multiplication, développons en série les deux membres de l'équation qui, par hypothèse, sont identiques. Les coefficients de x^n seront égaux

de part et d'autre, et cela donne précisément le théorème énoncé, puisque (338) $x^p\left(\frac{1}{x}-1\right)^q\varphi(x)$ est la fonction génératrice de $\Delta^q A_{n-p}$, et $\frac{1}{x^p}\left(\frac{1}{x}-1\right)^q\varphi(x)$ celle de $\Delta^q A_{n+p}$.

340. Nous nous bornerons à citer les applications les plus simples du théorème précédent; on a

$$\left(\frac{1}{x}-1\right)^p=\frac{1}{x^p}-p\,\frac{1}{x^{p-1}}+\frac{p(p-1)}{1.2}\,\frac{1}{x^{p-2}}+\ldots+(-1)^p,$$

$$\frac{1}{x^p}=\left[1+\left(\frac{1}{x}-1\right)\right]^p=1+p\left(\frac{1}{x}-1\right)+\frac{p(p-1)}{1.2}\left(\frac{1}{x}-1\right)^2+\ldots+\left(\frac{1}{x}-1\right)^p;$$

on en déduit

$$\Delta^p A_n=A_{n+p}-pA_{n+p-1}+\frac{p(p-1)}{1.2}A_{n+p-2}+\ldots+(-1)^p A_n, \tag{1}$$

$$A_{n+p}=A_n+p\Delta A_n+\frac{p(p-1)}{1.2}\Delta^2 A_n+\ldots+\Delta^p A_n. \tag{2}$$

Ces deux formules, faciles à démontrer directement, sont l'une et l'autre très-connues, et nous avons déjà eu occasion d'en faire usage.

La formule suivante, donnée par Laplace, a aussi une grande importance. Posons

$$\frac{1}{x}=1+\frac{z}{x}. \tag{3}$$

Le théorème de Lagrange donne

$$\frac{1}{x^p}=1+p\alpha+\frac{p(p+1)}{1.2}\alpha^2+\frac{p(p+1)(p+2)}{1.2.3}\alpha^3+\ldots,$$

et comme d'après l'équation (3) on a $\alpha=x\left(\frac{1}{x}-1\right)$, cette relation a lieu entre x, $\frac{1}{x}$ et $\left(\frac{1}{x}-1\right)$; le théorème général peut donc être appliqué, et donne

$$A_{n+p}=A_n+p\Delta A_{n-1}+\frac{p.(p+1)}{1.2}\Delta^2 A_{n-2}+\frac{p(p+1)(p+2)}{1.2.3}\Delta^3 A_{n-3}+\ldots. \tag{4}$$

Dans cette formule, A_0, $A_1\ldots$, A_n, sont les coefficients des puissances de x dans le développement d'une fonction quelconque; ce sont donc des nombres quelconques se succédant suivant une loi arbitraire; A_{-1}, $A_{-2},\ldots$, $A_{-n}\ldots$, sont également des nombres quelconques, car le développement de $\varphi(x)$ peut contenir des puissances négatives de x: on peut, si l'on veut, les supposer nuls.

La formule (1) donne

$$\Delta^k A_{n-k}=A_n-kA_{n-1}+\frac{k(k-1)}{1.2}A_{n-2}-\frac{k(k-1)(k-2)}{1.2.3}A_{n-3}+\ldots, \tag{5}$$

les termes dans lesquels l'indice de A est négatif devant être remplacés par zéro. Dans la formule (5), les facteurs A_n, A_{n-1},..., A_0, qui restent les mêmes pour une valeur donnée de n, ont des multiplicateurs qui grandissent indéfiniment avec k. La série indéfinie formée par le second membre de (4) n'est donc pas convergente et doit être rejetée comme expression exacte de A_{n+p}, mais elle peut cependant donner une approximation utile lorsqu'on se borne à un nombre limité de termes. C'est une circonstance remarquable commune à plusieurs séries divergentes, et dont nous donnerons d'autres exemples. La démonstration de Laplace n'est pas propre à la mettre ici en évidence, et nous allons, pour cette raison, en donner une démonstration plus directe, qui nous apprendra sous quelles conditions elle est applicable.

La formule (4) devient, lorsqu'on y suppose $p = 1$,

$$A_{n+1} = A_n + \Delta A_{n-1} + \Delta^2 A_{n-2} + \Delta^3 A_{n-3} + \dots \tag{6}$$

Pour l'établir directement, remarquons que l'on a, d'après les définitions des différences,

$$\begin{aligned}
A_{n+1} &= A_n + \Delta A_n, \\
\Delta A_n &= \Delta A_{n-1} + \Delta^2 A_{n-1}, \\
\Delta^2 A_{n-1} &= \Delta^2 A_{n-2} + \Delta^3 A_{n-2}, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\Delta^k A_{n-k+1} &= \Delta^k A_{n-k} + \Delta^{k+1} A_{n-k},
\end{aligned}$$

et l'on en déduit, en ajoutant et supprimant les termes communs,

$$A_{n+1} = A_n + \Delta A_{n-1} + \Delta^2 A_{n-2} + \dots \Delta^k A_{n-k} + \Delta^{k+1} A_{n-k}. \tag{7}$$

Si donc $\Delta^{k+1} A_{n-k}$ est très-petit, on pourra regarder la formule (6) comme exacte, en se bornant aux $k+1$ premiers termes du second membre, et ne pas se préoccuper de la convergence de la série indéfinie.

En changeant n en $n+1$ dans l'équation (7), on a

$$A_{n+2} = A_{n+1} + \Delta A_n + \Delta^2 A_{n-1} + \dots \Delta^k A_{n+1-k} + \Delta^{k+1} A_{n+1-k}. \tag{8}$$

Or on a, en remplaçant successivement dans la formule (7), A_n, qui est une fonction quelconque de n, par ΔA_n, $\Delta^2 A_n$, $\Delta^3 A_n$,..., et en même temps n par $n-1$, $n-2$, $n-3$,...,

$$\begin{aligned}
\Delta A_n &= \Delta A_{n-1} + \Delta^2 A_{n-2} + \dots + \Delta^{k+1} A_{n-k-1} + \Delta^{k+2} A_{n-k-1}, \\
\Delta^2 A_{n-1} &= \Delta^2 A_{n-2} + \Delta^3 A_{n-3} + \dots + \Delta^{k+2} A_{n-k-2} + \Delta^{k+3} A_{n-k-2}, \\
\Delta^3 A_{n-2} &= \Delta^3 A_{n-3} + \Delta^4 A_{n-4} + \dots + \Delta^{k+3} A_{n-k-3} + \Delta^{k+4} A_{n-k-3}, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

et par la substitution de ces diverses expressions, l'équation (8) devient

$$A_{n+2} = A_n + 2\Delta A_{n-1} + 3\Delta^2 A_{n-2} + \dots + k\Delta^k A_{n+1-k} + R,$$

le terme R étant négligeable si les différences d'ordre supérieur à k'' sont très-petites.

Cela posé, si l'on admet que la formule

$$(9) \qquad A_{n+p} = A_n + p\Delta A_{n-1} + \frac{p(p+1)}{1.2}\Delta^2 A_{n-2} + \frac{p(p+1)(p+2)}{1.2.3}\Delta^3 A_{n-3} + \dots$$

soit démontrée exacte pour une certaine valeur de p, les différences d'un certain ordre étant négligeables, on peut prouver qu'elle est vraie, sous la même condition, pour la valeur immédiatement supérieure. En prenant en effet les différences successives de deux membres de l'équation (9), et diminuant à chaque fois l'indice n d'une unité, on a

$$\Delta A_{n+p-1} = \Delta A_{n-1} + p\Delta^2 A_{n-2} + \frac{p(p+1)}{1.2}\Delta^3 A_{n-3} + \dots,$$

$$\Delta^2 A_{n+p-2} = \Delta^2 A_{n-2} + p\Delta^3 A_{n-3} + \frac{p(p+1)}{1.2}\Delta^4 A_{n-4} + \dots,$$

$$\Delta^3 A_{n+p-3} = \Delta^3 A_{n-3} + p\Delta^4 A_{n-4} + \dots,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

et en ajoutant ces équations, remarquant que l'on a

$$A_{n+p+1} = A_{n+p} + \Delta A_{n+p-1} + \Delta^2 A_{n+p-2} + \Delta^3 A_{n+p-3} + \dots,$$

il vient, en ayant égard aux propriétés connues des coefficients du binôme,

$$A_{n+p+1} = A_n + (p+1)\Delta A_{n-1} + \frac{(p+1)(p+2)}{1.2}\Delta^2 A_{n-2} + \frac{(p+1)(p+2)(p+3)}{1.2.3}\Delta^3 A_{n-3} + \dots,$$

la formule est donc générale.

341. Nous terminerons en indiquant quelques applications simples de la théorie des fonctions génératrices.

Problème. — Trouver une fonction de x telle que l'on ait

$$(1) \qquad F(x+p) + A_1 F(x+p-1) + A_2 F(x+p-2) + \dots + A_p F(x) = 0,$$

p étant un nombre entier donné et x une valeur quelconque attribuée à la variable. Remplaçons x par un entier arbitraire n, on devra avoir

$$(2) \qquad F(n+p) + A_1 F(n+p-1) + \dots + A_p F(n) = 0.$$

Soit y la fonction génératrice de $F(n)$, c'est-à-dire la fonction

$$(3) \qquad y = F(0) + tF(1) + t^2 F(2) + \dots + t^n F(n) + \dots;$$

le premier membre de l'équation (2) est la fonction génératrice de

$$(4) \qquad \frac{y}{t^p} + A_1 \frac{y}{t^{p-1}} + \dots + A_p y.$$

Pour que cette expression soit nulle, il faut que dans le développement de la fonction (4) il n'y ait pas de terme en t^n; n désignant un nombre entier et positif quelconque, il faut que le développement ne contienne que des puissances négatives de t. D'ailleurs il ne peut pas contenir de puissances négatives dont le degré surpasse $-p$, puisque le développement de y ne contient pas de dénominateurs, et par conséquent on doit avoir

$$\frac{y}{t^p}+A_1\frac{y}{t^{p-1}}+\ldots+A_p y=B_0+\frac{B_1}{t}+\ldots+\frac{B_p}{t^p},$$

donc

$$y=\frac{B_0+\frac{B_1}{t}+\ldots+\frac{B_p}{t^p}}{\frac{1}{t^p}+\frac{A_1}{t^{p-1}}+\ldots+A_p}=\frac{B_0t^p+B_1t^{p-1}+\ldots+B_p}{A_pt^p+A_{p-1}t^{p-1}+\ldots+1}.$$

En développant y en série ordonnée suivant les puissances de t, le coefficient de t^n sera une fonction de n remplissant la condition demandée et contenant $p+1$ constantes arbitraires B_0, B_1, ..., B_p.

Soit, par exemple, l'équation

$$F(x+2)-2aF(x+1)+F(x)=0;$$

$F(n)$ a, d'après ce qui précède, pour fonction génératrice

$$\frac{B_0t^2+B_1t+B}{t^2-2at+1},$$

qui, décomposée en fractions simples, prend la forme

$$B_0+\frac{C}{(t-a+\sqrt{a^2-1})}+\frac{C'}{(t-a-\sqrt{a^2-1})};$$

or on a

$$\frac{C}{(t-a+\sqrt{a^2-1})}=\frac{-C}{(a-\sqrt{a^2-1})}\left[1+\frac{t}{a-\sqrt{a^2-1}}+\frac{t^2}{(a+\sqrt{a^2-1})^2}+\ldots\right],$$

$$\left(\frac{C'}{t-a-\sqrt{a^2-1}}\right)=-\frac{C'}{a+\sqrt{a^2-1}}\left[1+\frac{t}{a+\sqrt{a^2-1}}+\frac{t^2}{(a+\sqrt{a^2-1})^2}+\ldots\right],$$

en sorte que le coefficient de t^x, c'est-à-dire la fonction cherchée $F(x)$, est

$$F(x)=\frac{-C}{a-\sqrt{a^2-1}}\left[\frac{1}{(a-\sqrt{a^2-1})^x}\right]-\frac{C'}{a+\sqrt{a^2-1}}\left[\frac{1}{(a+\sqrt{a^2-1})^x}\right].$$

Si a est moindre que 1 et égal à $\cos\varphi$, on a

$$\frac{1}{a-\sqrt{a^2-1}}=\frac{1}{\cos\varphi-\sqrt{-1}\sin\varphi}=\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi,$$

$$\frac{1}{a+\sqrt{a^2-1}}=\frac{1}{\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi}=\cos\varphi-\sqrt{-1}\sin\varphi,$$

et $F(x)$ prend la forme

$$A\cos x\varphi + B\sin x\varphi,$$

A et B étant deux constantes liées à C et à C′ et par conséquent arbitraires. On a en effet

$$\cos[(x+1)\varphi+\varphi] + \cos\varphi = 2\cos\varphi\cos(x+1)\varphi,$$

et par conséquent, a étant égal à $\cos\varphi$,

$$\cos(x+2)\varphi - 2a\cos(x+1)\varphi + \cos\varphi = 0.$$

342. Binet a fait une application élégante de la théorie des fonctions génératrices à la solution d'un problème de géométrie déjà résolu par Euler.

De combien de manières un polygone de n côtés peut-il être partagé en triangles par ses diagonales?

Soit ABCDEF... YZ, un polygone convexe de $n+1$ côtés. Designons par P_k le nombre total des décompositions possibles pour un polygone de k côtés. Dans chaque décomposition du polygone donné, le côté AB servira de base à un triangle dont le troisième sommet peut être l'un quelconque des points C, D, E, ..., Y, Z. Au triangle ABC correspond évidemment un nombre de décompositions égal à P_n, au triangle ABD un nombre égal à $P_{n-1}P_3$, à ABE un nombre égal à $P_{n-2}P_4$ et ainsi de suite. Tous ces groupes étant essentiellement distincts, leur nombre total est P_{n+1} et l'on a

$$(1) \qquad P_{n+1} = P_n + P_3P_{n-1} + P_4P_{n-2} \ldots + P_{n-1}P_3 + P_1.$$

Cette équation permet de former successivement les valeurs numériques de P_4, P_5, P_6, ..., et d'en continuer le tableau aussi loin que l'on voudra; mais un artifice est nécessaire pour obtenir l'expression de P_n.

Soit $\varphi(x)$ la fonction génératrice de P_{n+2} et par conséquent

$$(2) \qquad \varphi(x) = 1 + P_3x + P_4x^2 + \ldots P_{n+2}x^n + \ldots;$$

on aura, en multipliant la série par elle-même pour former $\varphi(x)^2$,

$$\varphi(x)^2 = 1 + x(P_3+P_3) + x^2(P_4+P_3P_3+P_4) + x^3(P_5+P_4P_3+P_3P_4+P_5) + \ldots,$$

c'est-à-dire à cause de l'équation (1)

$$\varphi(x)^2 = 1 + P_4x + P_5x^2 + P_6x^3 + \ldots,$$

ou bien, puisque l'on a évidemment $P_3 = 1$,

$$\varphi(x)^2 = \frac{\varphi(x)}{x} - \frac{1}{x};$$

on en déduit

$$\varphi(x) = \frac{1}{2x}(1 \pm \sqrt{1-4x}) :$$

il faut prendre le signe — du radical afin que $\varphi(x)$ soit égal à l'unité pour $x=0$. On a donc enfin

$$\varphi(x) = \frac{1}{2x}(1 - \sqrt{1-4x}),$$

c'est-à-dire, en développant le radical,

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}4 + \frac{1}{2.4}\cdot 4^2 x + \frac{1.3}{2.4.6}\cdot 4^3 x^2 + \ldots + \frac{1.3.5\ldots(2n-1)4^{n+1}}{2.4\ldots 2n.(2n+2)}x^n \ldots\right),$$

et enfin

$$P_{n+2} = \frac{1.3.5\ldots 2n-1}{2.4.6\ldots(2n+2)}2^{2n+1},$$

ou, ce qui revient au même,

$$P_{n+2} = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{1.2.3\ldots n\,(n+1)}2^n,$$

on en déduit

$$P_{n+3} = 2P_{n+2}\frac{(2n+1)}{n+2},$$

équation que l'on peut démontrer directement, comme l'ont fait MM. Lamé et Rodrigues.

Sur une notation symbolique.

343. En faisant connaître l'expression de la $n^{ième}$ puissance d'un produit dans laquelle figurent les mêmes coefficients que dans la puissance $n^{ième}$ d'un binôme, Leibnitz a signalé d'une manière générale l'analogie qui existe entre les puissances et les différentielles des divers ordres.

Lagrange a développé cette idée en rapprochant à l'aide d'une notation symbolique plusieurs formules qui semblent au premier abord complétement indépendantes.

Convenons de traiter l'expression $h\cdot\frac{d}{dx}$ comme une quantité dont la puissance $n^{ième}$, multipliée par $\varphi(x)$, donne pour produit $h^n\frac{d^n\varphi(x)}{dx^n}$; le théorème de Taylor pourra s'écrire de la manière suivante :

$$(1) \qquad \varphi(x+h) = e^{h\frac{d}{dx}}\cdot\varphi(x).$$

On vérifie aisément, en effet, qu'en développant $e^{h\frac{d}{dx}}$ suivant les puissances de l'exposant et ayant égard à la convention précédente, le second nombre devient identique avec la série qui représente $\varphi(x+h)$.

On conclut de la formule (1)

$$\varphi(x+h)-\varphi(x)=\left(e^{h\frac{d}{dx}}-1\right)\varphi(x).$$

Pour prendre la *différence* d'une fonction $\varphi(x)$, que l'on désigne habituellement par $\Delta\varphi(x)$, il faut donc multiplier symboliquement cette fonction par $\left(e^{h\frac{d}{dx}}-1\right)$; il est clair d'après cela que, pour prendre la différence seconde, il faut multiplier *symboliquement* par $\left(e^{h\frac{d}{dx}}-1\right)^2$, et que l'on a généralement

$$\Delta^n\varphi(x)=\left(e^{h\frac{d}{dx}}-1\right)^n\varphi(x).$$

344. Lagrange a eu l'idée d'attribuer dans la formule précédente une valeur négative à n, et d'écrire

$$\Delta^{-1}\varphi(x)=\left(e^{h\frac{d}{dx}}-1\right)^{-1}\varphi(x); \tag{1}$$

mais il faut expliquer ce que signifient les deux membres de cette nouvelle formule et démontrer leur égalité.

Pour éviter une difficulté qui se présenterait dans ces explications, remplaçons d'abord $\varphi(x)$ par une dérivée $\psi'(x)$; écrivons donc

$$\Delta^{-1}\psi'(x)=\left(e^{h\frac{d}{dx}}-1\right)^{-1}\psi'(x). \tag{2}$$

Nous exprimons par le signe Δ^{-1} l'opération inverse de celle qui est exprimée par le signe Δ, c'est-à-dire que $\Delta^{-1}\psi'(x)$ a pour différence $\psi'(x)$; de telle sorte que

$$\Delta.\Delta^{-1}\psi'(x)=\Delta^{-1}\Delta\psi'(x)=\psi'(x).$$

Quant au second membre, il faut, pour l'interpréter, concevoir que le facteur

$$\left(e^{h\frac{d}{dx}}-1\right)^{-1}=\frac{1}{e^{h\frac{d}{dx}}-1} \tag{3}$$

soit développé en série ordonnée suivant les puissances de $h\frac{d}{dx}$ et que, dans cette série, $\left(\frac{d}{dx}\right)^n\psi'(x)$ soit remplacé par $\frac{d^n\psi'(x)}{dx^n}$.

Pour démontrer l'exactitude de l'équation (1) entendue de cette manière, il faut faire voir que la différence du second membre, correspondant à un accroissement h de la variable, est $\psi'(x)$. Or la différence d'une fonction s'obtient, nous l'avons dit, en la multipliant symboliquement par $\left(e^{h\frac{d}{dx}} - 1\right)$, en sorte que $\psi'(x)$ doit être multiplié successivement par les séries qui représentent $\frac{1}{e^{h\frac{d}{dx}} - 1}$ et $e^{h\frac{d}{dx}} - 1$; le produit de ces deux facteurs se réduit évidemment à l'unité, quelle que soit la quantité représentée par $h\frac{d}{dx}$, et il importe peu que les puissances de cette quantité, $h\frac{d}{dx}$, soient remplacées plus tôt ou plus tard par des dérivées, le produit symbolique se réduira de même à l'unité, et l'on a

$$\left(e^{h\frac{d}{dx}} - 1\right) \frac{1}{\left(e^{h\frac{d}{dx}} - 1\right)} \psi'(x) = \psi'(x),$$

et par suite

$$\Delta \cdot \frac{1}{e^{h\frac{d}{dx}} - 1} \psi'(x) = \psi'(x),$$

ou

$$\frac{1}{e^{h\frac{d}{dx}} - 1} \psi'(x) = \Delta^{-1} \psi'(x),$$

ce qui est précisément l'équation (1).

En remplaçant le facteur

$$\frac{1}{e^{h\frac{d}{dx}} - 1}$$

par le développement qu'il représente, l'équation (1) devient

$$\Delta^{-1} \psi'(x) = \frac{1}{h}\left(\frac{d}{dx}\right)^{-1} \psi'(x) - \frac{1}{2}\psi'(x) + \frac{h}{6}\frac{d}{dx}\frac{\psi'(x)}{1.2} - \frac{h^3}{30}\frac{d^3}{dx^3}\frac{\psi'(x)}{1.2.3.4} + \ldots,$$

$\left(\frac{d}{dx}\right)^{-1} \psi'(x)$ est ici la fonction dont la dérivée est $\psi'(x)$, c'est-à-dire $\psi(x)$; on a donc enfin

$$\Delta^{-1} \psi'(x) = \frac{1}{h}\psi(x) - \frac{1}{2}\psi'(x) + \frac{h}{12}\psi''(x) - \frac{h^3}{720}\psi^{IV}(x) + \ldots.$$

Si dans les deux membres, x reçoit l'accroissement h, on aura, en égalant les

accroissements qui en résultent et remarquant que celui du premier membre est, par définition, égal à $\psi'(x)$,

$$\psi'(x)=\frac{1}{h}[\psi(x+h)-\psi(x)]-\frac{1}{2}[\psi'(x+h)-\psi'(x)]$$
$$+\frac{h}{12}[\psi''(x+h)-\psi''(x)]-\frac{h^3}{720}[\psi^{IV}(x+h)-\psi^{IV}(x)]+\ldots,$$

et, par suite,

$$\psi(x+h)-\psi(x)=h\psi'(x)+\frac{h}{2}[\psi'(x+h)-\psi'(x)]-\frac{h^2}{12}[\psi''(x+h)-\psi''(x)]$$
$$+\frac{h^4}{720}[\psi^{IV}(x+h)-\psi^{IV}(x)]-\ldots,$$

formule importante et déjà démontrée (**333**).

345. L'emploi des notations symboliques permet d'énoncer sous une forme élégante un théorème connu sous le nom de *théorème d'Herschel*, et qui donne l'expression du développement d'une fonction de la forme $\varphi(e^x)$ en série ordonnée suivant les puissances de x.

On a, par le théorème de Taylor,

$$(1)\quad \varphi(e^x)=\varphi(1+e^x-1)=\varphi(1)+\varphi'(1)(e^x-1)+\varphi''(1)\frac{(e^x-1)^2}{2}+\ldots+\varphi^n(1)\frac{(e^x-1)^n}{1.2\ldots n}+\ldots.$$

Si donc on pose

$$\varphi(e^x)=A_0+A_1x+A_2x^2+\ldots+A_nx^n+\ldots,$$

le coefficient A_n sera la somme des coefficients de x^n dans les développements des divers termes du second membre. Or on a

$$(2)\qquad (e^x-1)^p=e^{px}-pe^{(p-1)x}+\frac{p(p-1)}{1.2}e^{(p-2)x}+\ldots+(-1)^pe^{0x},$$

et dans le développement du second membre, le coefficient de x^n est évidemment

$$\frac{1}{1.2\ldots n}\left[p^n-p(p-1)^n+\frac{p(p-1)}{1.2}(p-2)^n\ldots+(-1)^p0^n\right],$$

c'est-à-dire (**340**) $\frac{1}{1.2.3\ldots n}\Delta^p0^n$; on a donc

$$(3)\qquad A_n=\frac{1}{1.2.3\ldots n}\left[\varphi(1).0^n+\varphi'(1)\Delta0^n+\frac{\varphi''(1)}{1.2}\Delta^20^n+\ldots\frac{\varphi^n(1)}{1.2\ldots n}\Delta^n0^n\right],$$

où le premier terme qui est nul est introduit pour la symétrie.

$\Delta^{n+1}0^n$, $\Delta^{n+2}0^n$,..., étant nuls, cette équation peut s'écrire symboliquement

$$(4)\qquad A_n=\frac{\varphi(1+\Delta)0^n}{1.2\ldots n}.$$

Soit, par exemple,

$$\varphi(e^x) = \frac{x}{e^x - 1} = \frac{1.e^x}{e^x - 1},$$

on aura

$$\varphi(1+\Delta) = \frac{1(1+\Delta)}{\Delta} = \frac{1}{\Delta}\left(\Delta - \frac{\Delta^2}{2} + \frac{\Delta^3}{3} - \frac{\Delta^4}{4} + \cdots\right),$$

et par conséquent

$$A_n = \frac{1}{1.2\ldots n}\left[\frac{0^n}{1} - \frac{\Delta 0^n}{2} + \frac{\Delta^2 0^n}{3} - \cdots \pm \frac{\Delta^n 0^n}{n+1}\right]. \tag{5}$$

En comparant ce résultat avec le développement bien connu, on voit que l'expression (5) est nulle si n est impair, et que si n est pair, le facteur entre parenthèses représente le $n^{ième}$ nombre de Bernoulli.

346. Nous ne terminerons pas cette indication rapide de l'emploi des notations symboliques sans rapporter une démonstration remarquable de la série de Taylor. Posons

$$\varphi(x+h) - \varphi(x) = h\mathrm{D}\varphi(x),$$

et par suite

$$\varphi(x+h) = (1+h\mathrm{D})\varphi(x),$$
$$\varphi(x+2h) = (1+h\mathrm{D})^2\varphi(x),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\varphi(x+nh) = (1+h\mathrm{D})^n\varphi(x).$$

En posant $nh = \alpha$, on aura

$$\varphi(x+\alpha) = (1+h\mathrm{D})^{\frac{\alpha}{h}}\varphi(x).$$

Si l'on suppose h infiniment petit et n infini, $(1+h\mathrm{D})^{\frac{\alpha}{h}} = e^{\alpha \mathrm{D}}$, et le signe D devient équivalent dans cette hypothèse au signe $\frac{d}{dx}$; on a donc

$$\varphi(x+\alpha) = e^{\alpha\frac{d}{dx}}\varphi(x),$$

ce qui est précisément l'expression symbolique du théorème de Taylor.

Digression sur les Nombres de Bernoulli.

347. Nous avons rencontré à l'occasion de plusieurs développements une suite de nombres connus sous le nom de *Nombres de Bernoulli* et dont nous indiquerons ici quelques-unes des propriétés les plus importantes. On a

$$\frac{x}{e^x - 1} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{B_1}{1.2}x^2 - \frac{B_2}{1.2\ 3.4}x^4 + \frac{B_3}{1.2.3.4.5.6}x^6 - \ldots.$$

Multiplions membre à membre cette équation par la suivante

$$e^x - 1 = x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots + \frac{x^n}{1.2.3\ldots n} + \ldots.$$

Le produit des premiers membres étant égal à x, il doit en être de même de celui des seconds membres et par conséquent les coefficients de toutes les autres puissances de la variable sont égaux à zéro; on en conclut

$$\frac{B_1}{1.2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} = 0,$$

$$\frac{1}{1.2}\frac{B_1}{1.2} - \frac{1}{2}\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{B_n}{1.2.3\ldots 2n} - \frac{B_{n-1}}{1.2.3\ldots(2n-2)}\frac{1}{1.2.3} + \frac{B_{n-2}}{1.2.3\ldots(2n-4)}\cdot\frac{1}{1.2.3.4.5} + \ldots$$

$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1.2.3\ldots 2n} + \frac{1}{1.2.3\ldots(2n+1)} = 0,$$

$$\frac{B_n}{1.2.3\ldots 2n}\cdot\frac{1}{1.2} - \frac{B_{n-1}}{1.2.3\ldots(2n-2)}\cdot\frac{1}{1.2.3.4} + \ldots$$

$$-\frac{1}{2}\frac{1}{1.2\ldots(2n+1)} + \frac{1}{1.2.3\ldots(2n+2)} = 0.$$

Ces équations déterminent $B_1, B_2, \ldots, B_n$; chaque inconnue se trouve même déterminée deux fois, mais les valeurs obtenues s'accordent, comme cela doit être; on trouve

$$B_1 = \frac{1}{6}, \quad B_2 = \frac{1}{30}, \quad B_3 = \frac{1}{42}, \quad B_4 = \frac{1}{30}, \quad B_5 = \frac{5}{66},$$

$$B_6 = \frac{691}{2730}, \quad B_7 = \frac{7}{6}, \quad B_8 = \frac{3617}{510}, \quad B_9 = \frac{43867}{798}, \ldots.$$

348. Les nombres de Bernoulli se sont présentés pour la première fois dans le calcul de la somme des puissances semblables des nombres entiers.

Nous montrerons d'abord comment ils s'introduisent dans la solution de ce problème. Posons

$$\varphi(x) = 1 + e^x + e^{2x} + \ldots + e^{(n-1)x};$$

on déduit de cette équation, en la différentiant p fois,

$$\varphi^p(x) = e^x + 2^p e^{2x} + \ldots + (n-1)^p e^{(n-1)x},$$

et en attribuant à x la valeur zéro

$$\varphi^p(0) = 1 + 2^p + 3^p + \ldots + (n-1)^p.$$

Or on a

$$\varphi(x) = 1 + e^x + e^{2x} + \ldots + e^{(n-1)x} = \frac{e^{nx}-1}{e^x-1}.$$

Si l'on développe le second membre en série ordonnée suivant les puissances de x, $\varphi^p(0)$ sera le produit du coefficient de x^p, par $1.2.3\ldots p$. Or on a

$$\frac{e^{nx}-1}{x} = n + \frac{n^2x}{1.2} + \frac{n^3x^2}{1.2.3} + \frac{n^4x^3}{1.2.3.4} + \ldots,$$

$$\frac{x}{e^x-1} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{B_1x^2}{1.2} - \frac{B_2x^4}{1.2.3.4} + \frac{B_3x^6}{1.2.3.4.5.6} - \ldots.$$

En multipliant ces deux équations, on obtiendra le développement de $\frac{e^{nx}-1}{e^x-1}$, et le coefficient de x^p est, si p est pair,

$$\frac{n^{p+1}}{1.2.3\ldots(p+1)} - \frac{1}{2}\cdot\frac{n^p}{1.2.3\ldots p} + \frac{B_1}{1.2}\cdot\frac{n^{p-1}}{1.2\ldots(p-1)} - \frac{B_2}{1.2.3.4}\cdot\frac{n^{p-3}}{1.2\ldots(p-3)} + \ldots \pm \frac{nB_{\frac{p}{2}}}{1.2.3\ldots p},$$

et si p est impair,

$$\frac{n^{p+1}}{1.2.3\ldots(p+1)} - \frac{1}{2}\cdot\frac{n^p}{1.2.3\ldots p} + \frac{B_1}{1.2}\cdot\frac{n^{p-1}}{1.2.3\ldots(p-1)} - \ldots \pm \frac{B_{\frac{p-1}{2}}}{1.2.3\ldots(p-1)}\cdot\frac{n^2}{1.2}.$$

On a par conséquent, si p est pair,

$$1 + 2^p + 3^p + \ldots + (n-1)^p = \frac{n^{p+1}}{p+1} - \frac{1}{2}n^p + \frac{B_1}{1.2}pn^{p-1} - \frac{B_2}{1.2.3.4}p(p-1)(p-2)n^{p-3} + \ldots \pm nB_{\frac{p}{2}},$$

et si p est impair,

$$1 + 2^p + 3^p + \ldots + (n-1)^p = \frac{n^{p+1}}{p+1} - \frac{1}{2}n^p + \frac{B_1}{1.2}pn^{p-1} - \frac{B_2}{1.2.3.4}p(p-1)n^{p-3} + \ldots \mp B_{\frac{p-1}{2}}p\cdot\frac{n^2}{2}.$$

On trouve ainsi

$$1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) = \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2},$$

$$1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2 = \frac{n^3}{3} - \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6},$$

$$1 + 2^3 + 3^3 + \ldots + (n-1)^3 = \frac{n^4}{4} - \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4},$$

$$1 + 2^4 + 3^4 + \ldots + (n-1)^4 = \frac{n^5}{5} - \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{1}{30}n,$$

$$1 + 2^5 + 3^5 + \ldots + (n-1)^5 = \frac{n^6}{6} - \frac{n^5}{2} + \frac{5n^4}{12} - \frac{n^2}{12},$$

$$1 + 2^6 + 3^6 + \ldots + (n-1)^6 = \frac{n^7}{7} - \frac{n^6}{2} + \frac{n^5}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{42}n.$$

349. La somme

$$1 + 2^p + 3^p + \ldots + (n-1)^p,$$

que nous nommerons $\varphi_p(n)$, est un polynôme entier de degré $(p+1)$ en n, qui jouit de plusieurs propriétés remarquables.

On peut exprimer $\varphi_p(n)$ en fonction de $\left(n - \frac{1}{2}\right)$, il ne contiendra alors que des puissances paires, si p est impair, et des puissances impaires, si p est pair. $\varphi_p(n)$ est en effet, à un facteur numérique près, le coefficient de x^p dans le développement de

$$\frac{e^{nx} - 1}{e^x - 1}.$$

Si nous désignons cette fonction par $\psi(x)$, le développement de la fonction $\psi(-x)$ que l'on obtient en changeant x en $-x$, ne diffère de celui de $\psi(x)$ que par le signe des termes de degré impair. Si donc p est impair, le coefficient de x^p est le même que dans le développement de la fonction

$$\frac{\psi(x) - \psi(-x)}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{e^{nx}-1}{e^x-1} - \frac{e^{-nx}-1}{e^{-x}-1}\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{e^{\left(n-\frac{1}{2}\right)x} - e^{-\frac{1}{2}x}}{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}} - \frac{e^{-\left(n-\frac{1}{2}\right)x} - e^{\frac{1}{2}x}}{e^{-\frac{x}{2}} - e^{\frac{x}{2}}}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{e^{\left(n-\frac{1}{2}\right)x} + e^{-\left(n-\frac{1}{2}\right)x}}{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}} - \frac{e^{\frac{1}{2}x} + e^{-\frac{1}{2}x}}{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}}\right].$$

Or cette fonction ne change pas si l'on y remplace $n - \frac{1}{2}$ par $-\left(n - \frac{1}{2}\right)$, le coefficient de x^p dans son développement suivant les puissances de x, est donc une fonction paire de $n - \frac{1}{2}$.

Lorsque p est pair, le coefficient de x^p dans le développement de $\psi(x)$ est le même que dans le développement de la fonction

$$\frac{\psi(x) + \psi(-x)}{2} = \frac{e^{nx}-1}{e^x-1} + \frac{e^{-nx}-1}{e^{-x}-1} = \frac{e^{\left(n-\frac{1}{2}\right)x} - e^{-\left(n-\frac{1}{2}\right)x}}{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}} + 1,$$

et comme la partie variable de cette fonction change de signe sans changer de valeur quand on y remplace $n - \frac{1}{2}$ par $-\left(n - \frac{1}{2}\right)$, il en est de même de tous les coefficients de son développement suivant les puissances de x.

Il est donc prouvé que $\varphi_p(n)$ est une fonction paire de $n - \frac{1}{2}$, lorsque p est impair, et qu'il est une fonction impaire, lorsque p est pair.

350. Si dans la fonction $\varphi_p(n)$ on fait $n = \frac{1}{2}$, on a, lorsque p est pair,

$$\varphi_p\left(\frac{1}{2}\right) = 0,$$

et lorsque p est impair,

$$\varphi_p\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{(-1)^{\frac{p+1}{2}}}{p+1} B_{\frac{p+1}{2}}\left(\frac{2^{p+1}-1}{2^p}\right).$$

Pour le démontrer, rappelons de nouveau que $\varphi_p(n)$ est le produit par $1.2\ldots p$, du coefficient de x^p dans le développement de

$$\frac{e^{nx}-1}{e^x-1}.$$

$\varphi^p\left(\frac{1}{2}\right)$ est donc le coefficient de $\frac{x^p}{1.2.3\ldots p}$ dans le développement de

$$\frac{e^{\frac{x}{2}}-1}{e^x-1}.$$

Or on a

$$\frac{e^{\frac{x}{2}}-1}{e^x-1} = \frac{1}{e^{\frac{x}{2}}-1} - \frac{2}{e^x-1}.$$

Mais

$$\frac{1}{e^{\frac{x}{2}}-1} = \frac{2}{x}\left[\frac{\frac{x}{2}}{e^{\frac{x}{2}}-1}\right] = \frac{2}{x}\left[1 - \frac{x}{4} + \frac{B_1}{1.2}\left(\frac{x}{2}\right)^2 - \frac{B_2}{1.2.3.4}\left(\frac{x}{2}\right)^4 + \ldots\right],$$

$$\frac{2}{e^x-1} = \frac{2}{x}\left[\frac{x}{e^x-1}\right] = \frac{2}{x}\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{B_1}{1.2}x^2 - \frac{B_2}{1.2.3.4}x^4 + \ldots\right);$$

en retranchant l'un de l'autre ces deux développements, on formera celui de $\frac{e^{\frac{x}{2}}-1}{e^x-1}$, et l'on verra que le coefficient de $\frac{x^p}{1.2\ldots p}$ est nul si p est pair, et égal à

$$(-1)^{\frac{p+1}{2}} \frac{B_{\frac{p+1}{2}}}{(p+1)}\left(\frac{2^{p+1}-1}{2^p}\right),$$

si p est impair. C'est précisément le résultat que nous avions annoncé.

351. Les fonctions $\varphi_p(n)$ et $\varphi_{p-1}(n)$ peuvent se déduire l'une de l'autre par la différentiation, mais la forme de la relation n'est pas la même lorsque p est pair et lorsqu'il est impair; on a les deux formules suivantes :

$$\frac{d.\varphi_{2p+1}(n)}{dn} = (2p+1)\varphi_{2p}(n),$$

$$\frac{d.\varphi_{2p}(n)}{dn} = 2p\varphi_{2p-1}(n) + (-1)^{p-1}\mathrm{B}_p.$$

Pour démontrer ces formules, considérons l'équation

$$\frac{e^{nx}-1}{e^x-1} = n + x\varphi_1(n) + \frac{x^2}{1.2}\varphi_2(n) + \ldots + \frac{x^p}{1.2\ldots p}\varphi_p(n) + \ldots.$$

En différentiant les deux membres par rapport à n, on a

$$\frac{xe^{nx}}{e^x-1} = 1 + x\frac{d\varphi_1}{dn} + \frac{x^2}{1.2}\frac{d\varphi_2}{dn} + \ldots + \frac{x^p}{1.2.3\ldots p}\frac{d\varphi_p}{dn} + \ldots.$$

Mais on a identiquement

$$\frac{xe^{nx}}{e^x-1} = x\frac{e^{nx}-1}{e^x-1} + \frac{x}{e^x-1} = x\left[n + x\varphi_1(n) + \frac{x^2}{1.2}\varphi_2(n) + \ldots + \frac{x^p}{1.2\ldots p}\varphi_p(n) + \ldots\right]$$
$$+ 1 - \frac{1}{2}x + \frac{\mathrm{B}_1}{1.2}x^2 - \frac{\mathrm{B}_2}{1.2.3.4}x^4 + \ldots,$$

et en identifiant ces deux développements qui représentent la même fonction, on obtient les deux formules

$$\frac{d.\varphi_{2p+1}(n)}{dn} = \varphi_{2p}(n).(2p+1),$$

$$\frac{d.\varphi_{2p}(n)}{dn} = 2p\varphi_{2p-1}(n). + (-1)^{p-1}\mathrm{B}_p.$$

352. Les formules précédentes permettent de démontrer un théorème important : *Lorsque n varie entre les limites* 0 *et* 1, *la fonction* $\varphi_{2p}(n)$ *change une fois de signe en s'annulant pour* $n = \frac{1}{2}$, *et la fonction* $\varphi_{2p+1}(n)$ *conserve toujours le même signe.*

Remarquons d'abord que $\varphi_p(n)$ est toujours nulle pour les valeurs extrêmes $n = 0$, $n = 1$; en effet, la fonction

$$\frac{e^{nx}-1}{e^x-1}$$

se réduit à l'unité pour $n = 1$, et à zéro pour $n = 0$, les coefficients des divers termes de son développement sont donc nuls dans ces deux hypothèses.

Cela posé, considérons d'abord la fonction

$$\varphi_1(n) = \frac{n(n-1)}{2};$$

lorsque n varie de o à 1, cette fonction reste toujours négative, et son maximum, correspondant à $n = \frac{1}{2}$, est

$$\varphi_1\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8}.$$

Considérons ensuite

$$\varphi_2(n) = \frac{n^3}{3} - \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}.$$

On a

$$\frac{d\varphi_2(n)}{dn} = n^2 - n + \frac{1}{6} = 2\varphi_1(n) + B_1;$$

$\varphi_1(n)$ variant de o à $-\frac{1}{8}$, puis de $-\frac{1}{8}$ à o, lorsque n varie de o à $\frac{1}{2}$, puis de $\frac{1}{2}$ à 1, $\frac{d\varphi_2(n)}{dn}$, passe de $\frac{1}{6}$ à $\frac{1}{6} - \frac{1}{4}$ ou $-\frac{1}{12}$, et de $-\frac{1}{12}$ à $+\frac{1}{6}$, elle est donc nulle deux fois seulement dans cet intervalle, et par suite l'équation $\varphi_2(n) = 0$ ne peut avoir dans le même intervalle que trois racines, qui sont $n = 0$, $n = \frac{1}{2}$, $n = 1$.

Démontrons maintenant le théorème général. Admettons pour cela que la fonction $\varphi_{2p-1}(n)$ satisfasse à la condition énoncée, c'est-à-dire qu'elle reste toujours de même signe lorsque n varie de o à 1, et que le maximum corresponde à la valeur $\frac{1}{2}$, la fonction croissant d'une manière continue lorsque n varie de o à $\frac{1}{2}$, et décroissant ensuite lorsqu'il passe de $\frac{1}{2}$ à l'unité, de telle sorte que la courbe qui a pour équation

$$y = \varphi_{2p-1}(n),$$

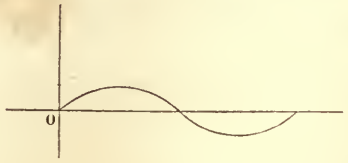
ait la forme suivante

Cela posé, nous avons

$$\frac{d.\varphi_{2p}(n)}{dn} = 2p\varphi_{2p-1}(n) + (-1)^{p-1}B_p.$$

Il est évident que cette dérivée, d'après la forme de la fonction $\varphi_{2p-1}(n)$, ne peut s'annuler que deux fois entre les limites $n = 0$, $n = 1$, et par suite la fonction $\varphi_{2p}(n)$ étant nulle aux deux limites ne peut pas avoir plus d'une racine intermédiaire. Cette racine est, comme on l'a vu, $n = \frac{1}{2}$: la fonction, nulle pour $n = 0$, $n = \frac{1}{2}$ et

$n = 1$, étant (349) une fonction impaire de $n - \frac{1}{2}$, change de signe pour $n = \frac{1}{2}$, et la courbe dont elle est l'ordonnée a la forme suivante

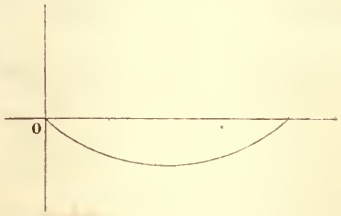


présentant un seul maximum entre $n = 0$, $n = \frac{1}{2}$, et un seul entre $n = \frac{1}{2}$, $n = 1$.

353. On a trouvé

$$\frac{d.\varphi_{2p+1}(n)}{dn} = (2p+1)\varphi_{2p}(n).$$

La dérivée de la fonction $\varphi^{2p+1}(n)$, ne change donc qu'une seule fois de signe lorsque n varie de 0 à 1, et comme la fonction est nulle aux deux limites, elle conserve le même signe, variant toujours dans le même sens lorsque n varie de 0 à $\frac{1}{2}$, puis atteignant un maximum à partir duquel elle varie en sens inverse, jusqu'à la valeur zéro, de telle sorte que la courbe dont $\varphi_{2p+1}(n)$ est l'ordonnée, a la forme représentée par la figure de la page précédente ou par la suivante



Digression sur les fonctions nommées par Legendre X_n.

354. Nous avons déduit (315) de la formule de Lagrange l'expression du coefficient de z^n dans le développement de l'expression

$$(1 - 2xz + z^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Ces fonctions, étudiées par un grand nombre de géomètres, ont trop d'importance pour que nous puissions nous borner à la mention rapide qui en a été faite, et nous terminerons ce chapitre consacré aux développements en série, par l'indication de quelques-unes des formes qu'on leur a données, et de celles de leurs propriétés qui n'exigent pas l'intervention du calcul intégral. Nous aurons d'ailleurs

à les étudier de nouveau et à les utiliser plusieurs fois dans la suite de cet ouvrage.

En considérant $1 - 2xz + z^2$ comme un binôme

$$1 - z(2x - z),$$

la formule de Newton donne

$$(1 - 2xz + z^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} z(2x - z) + \frac{1.3}{2.4} z^2 (2x - z)^2 + \dots.$$

En développant les puissances indiquées, on trouve pour le coefficient X_n de z^n,

$$X_n = \frac{1.3.5\dots(2n-1)}{1.2.3\dots n}\left[x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4.(2n-1)(2n-3)} x^{n-4} - \dots\right].$$

Si l'on fait successivement $n = 0$, $n = 1$, $n = 2, \dots$, on aura les valeurs suivantes :

$$X_0 = 1,$$

$$X_1 = x,$$

$$X_2 = \frac{3}{2} x^2 - \frac{1}{2},$$

$$X_3 = \frac{5}{2} x^3 - \frac{3}{2} x,$$

$$X_4 = \frac{5.7}{2.4} x^4 - \frac{3.5}{2.4} 2x^2 + \frac{1.3}{2.4},$$

$$X_5 = \frac{7.9}{2.4} x^5 - \frac{5.7}{2.4} 2x^3 + \frac{3.5}{2.4} x,$$

$$X_6 = \frac{7.9.11}{2.4.6} x^6 - \frac{5.7.9}{2.4.6} 3x^4 + \frac{3.5.7}{2.4.6} 3x^2 - \frac{1.3.5}{2.4.6},$$

$$X_7 = \frac{9.11.13}{2.4.6} x^7 - \frac{7.9.11}{2.4.6} 3x^5 + \frac{5.7.9}{2.4.6} 3x^3 + \frac{3.5.7}{2.4.6} x.$$

355. Le théorème de Lagrange nous a conduits (**315**) à une expression de la fonction X_n dans laquelle on peut facilement transformer celle que nous venons d'obtenir.

Remarquons d'abord que l'on a, quel que soit le nombre entier n,

$$\frac{1.3.5\dots(2n-1)}{1.2.3\dots n} = \frac{2n(2n-1)(2n-2)\dots(n+1)}{2^n.1.2.3\dots n};$$

il suffit, pour le démontrer, de remarquer que le changement de n et $n+1$, introduit, toutes réductions faites, les mêmes facteurs dans les deux membres, et que l'égalité se vérifie aisément pour les premières valeurs de n.

D'après cela, le terme général de l'expression de X_n (354) est égal à

$$\pm \frac{1}{2^n(1.2.3\ldots n)} \frac{2n(2n-1)\ldots(n-2m+1)}{2.4\ldots 2m(2n-1)(2n-3)\ldots(2n-2m+1)} x^{n-2m},$$

que l'on peut écrire, en supprimant les facteurs communs,

$$\pm \frac{1}{2^n(1.2.3\ldots n)} \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{1.2\ldots m} (2n-2m)(2n-2m-1)\ldots(n-2m+1)\, x^{n-2m},$$

c'est-à-dire

$$\pm \frac{1}{2^n(1.2.3\ldots n)} \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{1.2.3\ldots m} \frac{d^n . x^{2n-2m}}{dx^n},$$

et X_n est la $n^{ième}$ dérivée de

$$\frac{1}{2^n(1.2.3\ldots n)} \cdot \left(x^{2n} - n . x^{2n-2} + \frac{n(n-1)}{1.2} x^{2n-4} - \ldots \right),$$

c'est-à dire que l'on a enfin

$$X_n = \frac{1}{2^n . 1.2.3\ldots n} \cdot \frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n},$$

ce qui est l'expression déjà obtenue (315) et donnée pour la première fois par O. Rodrigues.

356. L'équation

$$X_n = 0$$

a toutes ses racines réelles et comprises entre 0 et 1. C'est là un théorème important, dont la démonstration résulte de l'expression précédente de X_n. On sait en effet que lorsqu'une équation a toutes ses racines réelles, sa dérivée les a également réelles et toutes comprises entre la plus grande et la plus petite racine de la proposée. Or l'équation

$$(x^2-1)^n = 0$$

a évidemment $2n$ racines réelles, savoir n égales à -1, et n égales à $+1$; les dérivées successives ont donc toutes leurs racines réelles et comprises entre -1 et $+1$, et comme X_n est, à un facteur près, l'une de ces dérivées, le théorème se trouve démontré.

357. Nous donnerons enfin une équation différentielle du second ordre, à laquelle satisfait la fonction X_n, et qui, sans la caractériser complétement, a été souvent utilisée dans l'étude de ses propriétés.

Pour obtenir cette équation, posons

$$u = (1 - 2xz + z^2)^{-\frac{1}{2}},$$

on en conclut

$$\frac{du}{dx} = \frac{z}{(1-2xz+z^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \frac{d^2u}{dx^2} = \frac{3z^2}{(1-2xz+z^2)^{\frac{5}{2}}},$$

$$\frac{du}{dz} = \frac{x-z}{(1-2xz+z^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \frac{d^2u}{dz^2} = -\frac{1}{(1-2xz+z^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3(x-z)^2}{(1-2xz+z^2)^{\frac{5}{2}}},$$

de là résulte

$$(1-x^2)\frac{d^2u}{dx^2} + z^2\frac{d^2u}{dz^2} = \frac{2z^2}{(1-2xz+z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$2x\frac{du}{dx} - 2z\frac{du}{dz} = \frac{2z^2}{(1-2xz+z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

et par conséquent,

$$(1-x^2)\frac{d^2u}{dx^2} - 2x\frac{du}{dx} + z^2\frac{d^2u}{dz^2} + 2z\frac{du}{dz} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{d}{dx}(1-x^2)\frac{du}{dx} + \frac{d}{dz}z^2\frac{du}{dz} = 0.$$

Si dans cette équation on remplace u par sa valeur,

$$u = 1 + X_1 z + X_2 z^2 + \ldots + X_n z^n + \ldots,$$

en égalant à zéro le coefficient de z^n, on aura

$$\frac{d(1-x^2)\frac{dX_n}{dx}}{dx} + n(n+1)X_n = 0,$$

c'est-à-dire

$$(1-x^2)\frac{d^2X_n}{dx^2} - 2x\frac{dX_n}{dx} + n(n+1)X_n = 0.$$

358. Nous ferons connaître, pour terminer cette digression, une relation simple qui lie trois fonctions consécutives X_n, X_{n+1}, X_{n-1}, et qui a été plusieurs fois utilisée dans l'étude de ces fonctions.

On a par définition

$$(1) \qquad (1-2xz+z^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + X_1 z + X_2 z^2 + \ldots + X_n z^n + \ldots,$$

on en déduit, en différentiant par rapport à z,

$$(2) \qquad \frac{x-z}{(1-2xz+z^2)^{\frac{3}{2}}} = X_1 + 2X_1 z + \ldots + nX_n z^{n-1} + \ldots,$$

et par conséquent, en multipliant les deux membres par $1-2xz+z^2$,

$$(x-z)(1-2xz+z^2)^{-\frac{1}{2}} = (1-2xz+z^2)(X_1+2X_1 z+\ldots+nX_n z^{n-1}+\ldots).$$

Si dans le premier membre de cette équation on remplace $(1-2xz+z^2)^{-\frac{1}{2}}$ par son développement, et que l'on égale les coefficients de z^n dans les deux membres, on trouve

$$(3) \qquad (n+1)X_{n+1} - (2n+1)xX_n + nX_{n-1} = 0.$$

En différentiant l'équation (1) par rapport à x, on trouve, après avoir supprimé le facteur z,

$$(4) \qquad \frac{1}{(1-2xz+z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{dX_1}{dx} + z\frac{dX_2}{dx} + \ldots + z^{n-1}\frac{dX_n}{dx} + \ldots.$$

Cette valeur de $(1-2xz+z^2)^{-\frac{3}{2}}$ substituée dans l'équation (2) donne, si l'on égale les coefficients de z^{n-1} dans les deux membres,

$$(5) \qquad x\frac{dX_n}{dx} - \frac{dX_{n-1}}{dx} = nX_n;$$

mais l'équation (4) peut s'écrire

$$(1-2xz+z^2)^{-\frac{1}{2}} = (1-2xz+z^2)\left(\frac{dX_1}{dx} + z\frac{dX_2}{dx} + \ldots + z^{n-1}\frac{dX_n}{dx} + \ldots\right).$$

En remplaçant le premier membre par son développement, et égalant les coefficients de z^n dans les deux membres, on en déduit

$$(6) \qquad X_n = \frac{dX_{n+1}}{dx} - 2x\frac{dX_n}{dx} + \frac{dX_{n-1}}{dx},$$

et la comparaison des formules (5) et (6) donne

$$\frac{dX_{n+1}}{dx} - \frac{dX_{n-1}}{dx} = (2n+1)X_n.$$

On en conclut, en changeant n en $n-2$, $n-4$,..., et ajoutant les équations ainsi

obtenues

$$\frac{dX_{n+1}}{dx} = (2n+1)X_n + (2n-3)X_{n-2} + (2n-7)X_{n-4} + \dots;$$

le dernier terme étant $3X_1$ si n est impair, et $5X_2$ si n est pair.

EXERCICES.

1. Dans le développement de $(1+x)^{\frac{p}{q}}$ en série ordonnée suivant les puissances de x, les coefficients des divers termes sont des fractions rationnelles qui, réduites à leur plus simple expression, n'admettent pour facteurs premiers de leurs dénominateurs que des diviseurs de q.

2. Dans le développement de $(1-x^{2n})^{\frac{1}{n}}$ tous les coefficients sont entiers.

3. La série

$$\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta} + \frac{\alpha^2\beta^2}{(\alpha+\beta)^3} + \frac{4}{2}\frac{\alpha^3\beta^3}{(\alpha+\beta)^5} + \frac{6.5}{2.3}\frac{\alpha^4\beta^4}{(\alpha+\beta)^7} + \frac{8.7.6}{2.3.4}\frac{\alpha^5\beta^5}{(\alpha+\beta)^9} + \dots$$

représente le plus petit des deux nombres α et β. Vérifier qu'en développant chaque terme en série ordonnée suivant les puissances de $\frac{1}{\beta}$, elle se réduit à α, et qu'en les développant suivant les puissances de $\frac{1}{\alpha}$ elle se réduit à β; celui des deux résultats qui s'obtient à l'aide de séries convergentes est seul exact.

4. De l'équation

$$y^{-\beta} - y^{-\alpha} = (\alpha-\beta)x$$

on déduit

$$y^m = 1 + mx + \frac{m(m+\alpha+\beta)x^2}{1.2} + \frac{m(m+2\alpha+\beta)(m+\alpha+2\beta)}{1.2.3}x^3 + \dots$$

$$+ \frac{m[m+(n-1)\alpha+\beta][m+(n-2)\alpha+2\beta]\dots[m+\alpha+(n-1)\beta]}{1.2.3\dots n}x^n + \dots.$$

La condition nécessaire et suffisante pour la convergence de cette série est

$$x < \left(\frac{\beta^\beta}{\alpha^\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-\beta}}.$$

5. En faisant tendre m vers zéro, on peut de la formule précédente déduire

$$ly = x + \frac{(\alpha+\beta)}{2}x^2 + \frac{(2\alpha+\beta)(\alpha+2\beta)}{1.2.3}x^3 + \dots$$
$$+ \frac{[(n-1)\alpha+\beta][(n-2)\alpha+2\beta]\dots[\alpha+(n-1)\beta]}{1.2.3\dots n}x^n + \dots,$$

6. Démontrer la formule

$$\frac{l(1+x)}{1+x} = x - \left(1+\frac{1}{2}\right)x^2 + \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)x^3 - \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)x^4 + \dots.$$

7. Démontrer, pour toute valeur de x comprise entre -1 et $+1$, l'identité des deux séries

$$x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^3 - \frac{1.3.5}{2.4.6}x^4 + \dots,$$
$$\frac{x}{1+x} + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{1+x}\right)^2 + \frac{1.3}{2.4}\left(\frac{x}{1+x}\right)^3 + \dots.$$

dont la valeur commune est $\frac{x}{\sqrt{1+x}}$.

8. Démontrer la formule

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{(x+1)} + \frac{1}{(x+2)} + \dots = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x} + \frac{1}{2^2}\cdot\frac{1}{x(x+1)}$$
$$+ \frac{1}{2^3}\frac{1.2}{x(x+1)(x+2)} + \frac{1}{2^4}\frac{1.2.3}{x(x+1)(x+2)(x+3)} + \dots.$$

9. Appliquer la série de Burmann au développement de x suivant les puissances de $\frac{2x}{1+x^2}$. On obtient la série

$$x = \frac{1}{2}\frac{2x}{1+x^2} + \frac{1}{2.4}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^3 + \frac{1.3}{2.4.6}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^5 + \dots,$$

qui est exacte seulement pour les valeurs de x comprises entre -1 et $+1$. Lorsque x est plus grand que l'unité en valeur absolue, le second membre représente $\frac{1}{x}$.

10. Si une fonction quelconque est développable en série de la forme

$$f(z) = a + bz + cz^2 + dz^3 + \dots,$$

l'identité

$$f\left(\frac{z}{x}\right) = f\left[z + \left(\frac{1}{x} - 1\right)z\right]$$

fournira par le développement des deux membres une relation entre x et $\left(\frac{1}{x} - 1\right)$ qui,

donne l'équation suivante, due à Euler :

$$a\,A_0 + b\,A_1 z + c\,A_2 z^2 + d\,A_3 z^3 + \dots$$
$$= A_0 f(z) + \Delta A_0 z \frac{df(z)}{dz} + \frac{1}{1.2}\Delta^2 A_0 z^2 \frac{d^2 f(z)}{dz^2} + \frac{1}{1.2.3}\Delta^3 A_0 z^3 \frac{d^3 f(z)}{dz^3} + \dots,$$

où A_0, A_1, A_2, ... désignent une suite de nombres choisis arbitrairement.

11. Si l'on suppose dans le théorème précédent

$$f(z) = \frac{1}{(1-z)^\alpha}$$

et

$$A_n = \frac{\beta(\beta+1)\dots(\beta+n-1)}{\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+n-1)},$$

on obtient la relation

$$1 + \frac{\alpha.\beta}{1.\gamma} z + \frac{\alpha(\alpha+1)\,\beta(\beta+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)} z^2 + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2).\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1.2.3.\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)} z^3 + \dots$$
$$= \frac{1}{(1-z)^\alpha}\left[1 + \frac{\alpha(\beta-\gamma)}{\gamma}\frac{z}{1-z} + \frac{\alpha(\alpha+1)(\beta-\gamma)(\beta-\gamma-1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)}\frac{z^2}{(1-z)^2} + \dots\right],$$

c'est-à-dire, en désignant avec Gauss le premier membre de cette équation par $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$,

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = \frac{1}{(1-z)^\alpha} F\left(\alpha,\ \gamma-\beta,\ \gamma,\ \frac{z}{z-1}\right).$$

CHAPITRE IV.

FONCTIONS D'UNE VARIABLE IMAGINAIRE.

Définition d'une fonction imaginaire.

359. Lorsqu'une fonction $\varphi(z)$ est donnée pour toutes les valeurs réelles de la variable z dont elle dépend, elle n'acquiert pour cela aucun sens lorsqu'on y remplace z par une expression imaginaire $x+y\sqrt{-1}$: l'expression, $\varphi(x+y\sqrt{-1})$, ne peut donc s'introduire dans les calculs ou dans les raisonnements, sans une définition précise qui, pour toutes les valeurs réelles de x et de y, en fasse connaître la partie réelle et la partie imaginaire, en permettant d'écrire

$$\varphi(x+y\sqrt{-1})=\mathrm{P}+\mathrm{Q}\sqrt{-1},$$

P et Q étant deux fonctions réelles connues de x et de y.

Il ne faut pas croire cependant que les deux fonctions P et Q puissent être choisies arbitrairement; toute expression de la forme

$$\mathrm{P}+\mathrm{Q}\sqrt{-1},$$

où P et Q sont des fonctions de x et de y, n'est pas une fonction de $x+y\sqrt{-1}$; pour la considérer comme telle, on exige une condition sans laquelle disparaîtrait toute analogie entre les fonctions imaginaires et les fonctions réelles; pour que la somme $\mathrm{P}+\mathrm{Q}\sqrt{-1}$ soit considérée comme une fonction de $x+y\sqrt{-1}$, il ne suffit pas que cette expression soit déterminée lorsqu'on se donne x et y, il faut encore qu'elle ait une dérivée déterminée et que le rapport de son accroissement infiniment petit, à l'accroissement correspondant $dx+dy\sqrt{-1}$ de la variable, soit indépendant du rapport arbitraire $\frac{dy}{dx}$. Si l'on voulait s'affranchir de cette condition, la théorie des fonctions imaginaires serait simplement celle des fonctions de deux variables et leur étude spéciale n'offrirait aucun intérêt.

360. Lorsqu'on attribue à x et à y les accroissements infiniment petits dx et dy, l'accroissement de $\mathrm{P}+\mathrm{Q}\sqrt{-1}$ est

$$\frac{d\mathrm{P}}{dx}dx+\frac{d\mathrm{P}}{dy}dy+\sqrt{-1}\left(\frac{d\mathrm{Q}}{dx}dx+\frac{d\mathrm{Q}}{dy}dy\right)=\left(\frac{d\mathrm{P}}{dx}+\sqrt{-1}\,\frac{d\mathrm{Q}}{dx}\right)dx+\left(\frac{d\mathrm{P}}{dy}+\sqrt{-1}\,\frac{d\mathrm{Q}}{dy}\right)dy.$$

Pour que le rapport de cet accroissement à $dx+dy\sqrt{-1}$ soit indépendant de $\frac{dy}{dx}$, on doit avoir

$$\frac{dP}{dx}+\sqrt{-1}\frac{dQ}{dx}=\frac{\frac{dP}{dy}+\sqrt{-1}\frac{dQ}{dy}}{\sqrt{-1}},$$

et l'on voit, après avoir chassé le dénominateur, que cette équation équivaut à deux autres

$$\frac{dP}{dx}=\frac{dQ}{dy},\quad \frac{dP}{dy}=-\frac{dQ}{dx}.$$

Ces deux équations sont nécessaires et suffisantes, d'après notre définition, pour que $P+Q\sqrt{-1}$ soit une fonction de $x+y\sqrt{-1}$; lorsqu'elles sont satisfaites, on a

$$\frac{d.(P+Q\sqrt{-1})}{d(x+y\sqrt{-1})}=\frac{dP}{dx}+\sqrt{-1}\frac{dQ}{dx}=\frac{dQ}{dy}-\sqrt{-1}\frac{dP}{dy};$$

on en conclut que $\varphi(z)$ désignant une fonction quelconque de la variable imaginaire z égale à $x+y\sqrt{-1}$, et $\varphi'(z)$ étant la dérivée de $\varphi(z)$, on a

$$\frac{d.\varphi(z)}{dx}=\varphi'(z),$$
$$\frac{d.\varphi(z)}{dy}=\varphi'(z)\sqrt{-1}.$$

Ces équations pourraient être écrites à priori comme conséquences de la règle de différentiation des fonctions de fonctions, s'il était permis d'invoquer cette règle avant d'avoir constaté l'existence d'une dérivée déterminée et indépendante du rapport des accroissements infiniment petits attribués à x et à y.

361. Les équations du paragraphe précédent qui lient l'une à l'autre les fonctions P et Q, permettent d'éliminer l'une d'elles et fournissent une équation importante à laquelle l'autre, considérée isolément, doit satisfaire. En ajoutant ces équations après avoir différentié la première par rapport à x et la seconde par rapport à y, on trouve en effet

$$\frac{d^2P}{dx^2}+\frac{d^2P}{dy^2}=0,$$

et en les retranchant après avoir différentié la première par rapport à y et la seconde par rapport à x, on a

$$\frac{d^2Q}{dx^2}+\frac{d^2Q}{dy^2}=0.$$

Ces conditions imposées aux fonctions P et Q expliquent comment une fonction ima-

ginaire possède, ainsi que nous le verrons, un grand nombre de propriétés très-précises et indépendantes de sa définition; il ne faut pas en effet, on le comprend dès à présent, attacher à une fonction imaginaire quelconque, l'idée d'une indétermination aussi complète que celle d'une fonction réelle quelconque. Pour chaque valeur de la variable, une fonction réelle peut être choisie arbitrairement, et les seules restrictions auxquelles sont soumises ses variations sont celles qui résultent de la loi de continuité; la partie réelle et le coefficient de $\sqrt{-1}$ dans une fonction imaginaire sont assujettis au contraire à des conditions très-précises exprimées par les équations que nous venons d'obtenir et d'après lesquelles chacune d'elles représente l'ordonnée d'une surface qui, loin d'être arbitraire, appartient à une classe toute particulière dont on conçoit fort bien que l'on puisse étudier les propriétés sans avoir besoin de rien préciser davantage.

362. Il sera utile d'exprimer les conditions nécessaires pour que la somme

$$P + Q\sqrt{-1},$$

où P et Q désignent les fonctions des variables ρ et ω, soit une fonction de

$$\rho(\cos\omega + \sqrt{-1}\sin\omega).$$

Si l'on change ρ en $\rho + d\rho$, et ω en $\omega + d\omega$, l'accroissement de $P + Q\sqrt{-1}$ est

$$\frac{dP}{d\rho}d\rho + \frac{dP}{d\omega}d\omega + \sqrt{-1}\left(\frac{dQ}{d\rho}d\rho + \frac{dQ}{d\omega}d\omega\right);$$

l'accroissement correspondant de la variable est

$$d\rho(\cos\omega + \sqrt{-1}\sin\omega) + \rho d\omega(-\sin\omega + \sqrt{-1}\cos\omega).$$

Pour que le rapport de ces deux accroissements soit indépendant de $\frac{d\rho}{d\omega}$, il faut et il suffit que l'on ait

$$\frac{\frac{dP}{d\rho} + \sqrt{-1}\frac{dQ}{d\rho}}{\cos\omega + \sqrt{-1}\sin\omega} = \frac{\frac{dP}{d\omega} + \sqrt{-1}\frac{dQ}{d\omega}}{\rho(-\sin\omega + \sqrt{-1}\cos\omega)};$$

en multipliant par $\rho\sqrt{-1}$ les deux termes du premier membre, les dénominateurs deviennent égaux, et l'on a, en égalant les parties réelles des numérateurs, et les coefficients de $\sqrt{-1}$,

$$\rho\frac{dP}{d\rho} = \frac{dQ}{d\omega},$$

$$\rho\frac{dQ}{d\rho} = -\frac{dP}{d\omega}.$$

Telles sont, d'après nos conventions, les conditions nécessaires et suffisantes pour que la somme $P+Q\sqrt{-1}$ soit une fonction de $\rho(\cos\omega+\sqrt{-1}\sin\omega)$.

363. Les conditions précédentes sont les seules qui soient imposées aux fonctions imaginaires, et pourvu qu'elles soient remplies, la définition reste entièrement arbitraire. On conçoit cependant qu'une fonction imaginaire ne s'introduira avantageusement dans les calculs que lorsqu'elle sera réellement la généralisation de la fonction réelle de même nom, à laquelle elle se réduit quand on suppose $y=0$, et qu'elle partagera ses propriétés caractéristiques. Cette analogie, regardée à priori comme une condition essentielle, est la base des définitions que nous allons donner de quelques-unes des fonctions les plus simples.

364. Les propriétés générales des fonctions réelles doivent aussi s'appliquer aux fonctions imaginaires; les définitions doivent être telles que cela ait lieu, et si cette condition impliquait contradiction, la théorie des fonctions imaginaires devrait être abandonnée comme inutile. C'est pour cela, par exemple, qu'une expression déterminée lorsque $x+y\sqrt{-1}$ est donné, ne reçoit pas cependant le nom de fonction de $x+y\sqrt{-1}$, si elle n'a pas, par rapport à cette variable, une dérivée déterminée. Rien ne s'opposerait certainement à ce qu'on lui accordât ce nom, mais cela aurait l'inconvénient d'éveiller par analogie des idées inexactes.

Parmi les théorèmes applicables également aux fonctions imaginaires et réelles, nous nous bornerons à citer le suivant :

Deux fonctions imaginaires qui ont même dérivée, ont une différence constante.

Soient

$$u=P+Q\sqrt{-1},\quad u_1=P_1+Q_1\sqrt{-1},$$

les deux fonctions considérées. D'après les résultats obtenus (360), les dérivées de u et de u_1 étant égales, on a

$$\frac{dP}{dx}=\frac{dP_1}{dx},\quad \frac{dQ}{dx}=\frac{dQ_1}{dx},$$
$$\frac{dP}{dy}=\frac{dP_1}{dy},\quad \frac{dQ}{dy}=\frac{dQ_1}{dy},$$

et ces équations prouvent que les dérivées des différences $P-P_1$, et $Q-Q_1$, par rapport à x et par rapport à y, sont égales à zéro; ces différences sont donc indépendantes de x et de y, et par conséquent constantes.

Définition de quelques fonctions simples.

365. *Définition de z^m lorsque m est entier.* — On est conduit, dès les éléments, à remplacer dans la fonction z^m, la variable z par $x+y\sqrt{-1}$; on a, en appliquant la

formule du binôme qui, dans le cas de l'exposant entier, résulte des règles de la multiplication,

$$(x+y\sqrt{-1})^m = \left[x^m - \frac{m(m-1)}{1.2}x^{m-2}y^2 + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}x^{m-4}y^4 - \dots\right] + \sqrt{-1}\left[mx^{m-1}y - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^{m-3}y^3 + \dots\right].$$

Il est aisé de voir que cette expression remplit la condition précédemment exprimée, et que la dérivée de z^m, par rapport à z, est mz^{m-1}, précisément comme dans le cas où z est réel. La démonstration repose en effet (26) uniquement sur le développement de $(z+h)^m$, qui s'applique sans modifications au cas où z et h sont imaginaires.

La même conclusion s'applique évidemment à une fonction entière quelconque de la variable z, et toute expression de la forme

$$(1) \qquad A z^m + A_1 z^{m-1} + A_2 z^{m-2} + \dots + A_{m-1} z + A_m,$$

où $A_1, A_2, \dots, A_m$, représentent des constantes réelles ou imaginaires, est une fonction de z qui a pour dérivée

$$mA z^{m-1} + (m-1)A_1 z^{m-2} + \dots + A_{m-1}.$$

Si le polynôme (1) est remplacé par une série indéfinie, on a vu (262) que, pour les valeurs de la variable qui rendent la série convergente, la série des dérivées est elle-même convergente et représente la dérivée de la série. Nous pouvons par conséquent étendre nos conclusions aux séries convergentes ordonnées suivant les puissances de la variable. C'est là une remarque très-importante et qui, lorsqu'une fonction réelle est développable en série convergente, permet, comme nous allons en donner des exemples, d'en étendre la définition au cas où la variable est imaginaire.

366. *Définition de e^z.* — La fonction e^z, lorsque z est réel, est représentée par la série toujours convergente

$$(1) \qquad e^z = 1 + z + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} + \dots + \frac{z^n}{1.2.3\dots n} + \dots$$

En remplaçant z par $x+y\sqrt{-1}$, on forme l'expression

$$1 + (x+y\sqrt{-1}) + \frac{(x+y\sqrt{-1})^2}{1.2} + \frac{(x+y\sqrt{-1})^3}{1.2.3} + \dots,$$

que nous prendrons comme définition de $e^{x+y\sqrt{-1}}$. Il est facile de sommer cette série et d'en trouver la partie réelle et la partie imaginaire. En développant en effet les

puissances de $(x+y\sqrt{-1})$ qui figurent dans les différents termes de la série, et réunissant dans ces divers développements les coefficients de $\frac{x^p}{1.2.3\ldots p}$, on trouve

$$\frac{x^p}{1.2.3\ldots p}\left[1+y\sqrt{-1}+\frac{(y\sqrt{-1})^2}{1.2}+\ldots+\frac{(y\sqrt{-1})^n}{1.2\ldots n}+\ldots\right].$$

La partie réelle est

$$\frac{x^p}{1.2.3\ldots p}\left(1-\frac{y^2}{2}+\frac{y^4}{1.2.3.4}-\ldots\right)=\frac{x^p}{1.2.3\ldots p}\cos y,$$

et la partie imaginaire,

$$\frac{x^p\sqrt{-1}}{1.2.3\ldots p}\left(y-\frac{y^3}{2.3}+\frac{y^5}{1.2.3.4.5}-\ldots\right)=\frac{x^p}{1.2.3\ldots p}\sqrt{-1}\sin y;$$

le terme en x^p est donc

$$\frac{x^p}{1.2.3\ldots p}(\cos y+\sqrt{-1}\sin y),$$

et la série (1) se réduit à

$$(\cos y+\sqrt{-1}\sin y)\left(1+x+\frac{x^2}{1.2}+\ldots+\frac{x^p}{1.2.3\ldots p}+\ldots\right)=e^x(\cos y+\sqrt{-1}\sin y);$$

on a donc enfin,

$$e^{x+y\sqrt{-1}}=e^x(\cos y+\sqrt{-1}\sin y). \tag{2}$$

On peut remarquer que dans la démonstration précédente les termes de la série considérée ont été intervertis, mais, leurs modules formant une série convergente, cela n'a aucun inconvénient.

367. La fonction e^z étant, d'après la définition même, représentée par une seule et même série pour les valeurs réelles ou imaginaires de z, une seule et même série représentera aussi les dérivées dans les deux cas, et il en résulte que l'équation

$$\frac{de^z}{dz}=e^z \tag{1}$$

s'applique aux valeurs imaginaires comme aux valeurs réelles de z. Il est d'ailleurs bien facile de vérifier directement que l'expression

$$e^x(\cos y+\sqrt{-1}\sin y)$$

satisfait aux conditions données (359) et qu'elle est égale à sa dérivée. On peut aussi vérifier la formule

$$e^z . e^u = e^{z+u}, \tag{2}$$

qui a lieu pour toutes les valeurs des exposants z et u. Le succès de cette vérification ne doit d'ailleurs causer aucune surprise. e^z et e^u étant en effet représentés par des séries telles, que l'équation (2) soit identique quand les variables sont réelles, il est tout simple que cette équation reste vraie quand on substitue à x des expressions imaginaires quelconques.

En supposant $x = 0$, on a

$$e^{y\sqrt{-1}} = \cos y + \sqrt{-1}\sin y,$$

et en changeant y en $-y$,

$$e^{-y\sqrt{-1}} = \cos y - \sqrt{-1}\sin y;$$

on déduit de ces formules

$$\cos y = \frac{e^{y\sqrt{-1}} + e^{-y\sqrt{-1}}}{2},$$

$$\sin y = \frac{e^{y\sqrt{-1}} - e^{-y\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}.$$

368. *Définitions de* $\sin z$ *et de* $\cos z$. — Les fonctions $\sin z$ et $\cos z$ sont représentées, lorsque z est réel, par les séries toujours convergentes

$$\sin z = z - \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^5}{1.2.3.4.5} + \dots,$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^4}{1.2.3.4} - \dots.$$

En remplaçant z par $x + y\sqrt{-1}$, on aura deux séries, toujours convergentes aussi, que nous adopterons comme définitions de $\sin(x + y\sqrt{-1})$ et de $\cos(x + y\sqrt{-1})$. Il résulte immédiatement des définitions de e^z, $\sin z$ et $\cos z$, que l'on a pour toutes les valeurs réelles ou imaginaires de z

$$e^{z\sqrt{-1}} = \cos z + \sqrt{-1}\sin z,$$

$$e^{-z\sqrt{-1}} = \cos z - \sqrt{-1}\sin z,$$

et, par conséquent,

$$\cos z = \frac{e^{z\sqrt{-1}} + e^{-z\sqrt{-1}}}{2},$$

$$\sin z = \frac{e^{z\sqrt{-1}} - e^{-z\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}. \tag{1}$$

Ces formules permettent de calculer, sans recourir aux séries, la partie réelle et la partie imaginaire d'un sinus ou d'un cosinus quelconque. On a

$$\cos(x+y\sqrt{-1}) = \frac{e^{x\sqrt{-1}-y} + e^{-x\sqrt{-1}+y}}{2} = \cos x\,\frac{e^{y}+e^{-y}}{2} + \sqrt{-1}\sin x\,\frac{e^{y}-e^{-y}}{2};$$

(2)

$$\sin(x+y\sqrt{-1}) = \frac{e^{x\sqrt{-1}-y} - e^{-x\sqrt{-1}+y}}{2\sqrt{-1}} = \sqrt{-1}\cos x\,\frac{(e^{y}-e^{-y})}{2} + \sin x\,\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}.$$

Si l'on suppose $x = 0$, ces formules deviennent

$$\cos y\sqrt{-1} = \frac{e^{y}+e^{-y}}{2},$$

$$\sin y\sqrt{-1} = \frac{e^{-y}-e^{y}}{2\sqrt{-1}} = \frac{e^{y}-e^{-y}}{2}\sqrt{-1};$$

on en conclut

$$\cos(x+y\sqrt{-1}) = \cos x\cos y\sqrt{-1} - \sin x\sin y\sqrt{-1},$$

(3)

$$\sin(x+y\sqrt{-1}) = \sin x\cos y\sqrt{-1} + \cos x\sin y\sqrt{-1}.$$

Ces deux formules sont d'ailleurs des cas particuliers des formules plus générales

$$\cos(u+v) = \cos u\cos v - \sin u\sin v,$$

(4)

$$\sin(u+v) = \sin u\cos v + \sin v\cos u,$$

qui ont lieu pour des valeurs réelles ou imaginaires de u et de v. On peut vérifier aussi la formule

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1, \tag{5}$$

qui résulte des équations (1) et qui, combinée avec les équations (4), permet d'étendre au cas des variables imaginaires les formules principales de la trigonométrie.

La forme des séries qui représentent $\sin z$ et $\cos z$ montre enfin que l'on a pour les valeurs imaginaires comme pour les valeurs réelles de z

$$\frac{d\sin z}{dz} = \cos z,$$

$$\frac{d\cos z}{dz} = -\sin z.$$

369. *Définition de* tang z. — La fonction tang z n'étant pas développable en série pour toute valeur réelle de z, ne peut pas, lorsque z est imaginaire, être définie par la série qui la représente. Nous poserons, comme définition,

$$\operatorname{tang} z = \frac{\sin z}{\cos z},$$

et, par conséquent,

$$\operatorname{tang} z = \frac{e^{-z\sqrt{-1}} - e^{z\sqrt{-1}}}{e^{z\sqrt{-1}} + e^{-z\sqrt{-1}}}\sqrt{-1} = \sqrt{-1}\left(1 + \frac{2}{1 + 2e^{-2z\sqrt{-1}}}\right);$$

nous poserons de même

$$\cot z = \frac{1}{\operatorname{tang} z} = \frac{\cos z}{\sin z} = \frac{e^{z\sqrt{-1}} + e^{-z\sqrt{-1}}}{e^{-z\sqrt{-1}} - e^{z\sqrt{-1}}}\sqrt{-1} = \sqrt{-1}\left(1 - \frac{2}{1 - e^{-2z\sqrt{-1}}}\right).$$

Les formules

$$\frac{d\operatorname{tang} z}{dz} = \frac{1}{\cos^2 z},$$

$$\frac{d\cot z}{dz} = -\frac{1}{\sin^2 z},$$

sont applicables à des valeurs quelconques de z, car la règle de différentiation des fractions, appliquée à $\frac{\sin z}{\cos z}$ et à $\frac{\cos z}{\sin z}$, donne les mêmes résultats, et les réductions ultérieures sont les mêmes lorsque l'on suppose z réel ou imaginaire.

370. *Définition de* $\mathrm{l}\, z$. — Lorsque z et u sont liés par l'équation

$$z = e^u, \tag{1}$$

on dit que u est le logarithme népérien de z, et l'on écrit

$$u = \mathrm{l}\, z, \tag{2}$$

z étant une fonction de u, u est une fonction de z. La condition pour qu'il en soit ainsi, est en effet, d'après notre définition, que le rapport $\frac{du}{dz}$ soit déterminé, et c'est ce qui a lieu nécessairement, puisque $\frac{dz}{du}$ l'est lui-même.

Si l'on suppose $z = x + y\sqrt{-1}$, la partie réelle et la partie imaginaire de $\mathrm{l}\, z$ se déduisent aisément de la définition précédente. Soit $\mathrm{l}\, z = p + q\sqrt{-1}$, on doit avoir

$$x + y\sqrt{-1} = e^{p+q\sqrt{-1}} = e^p(\cos q + \sqrt{-1}\sin q), \tag{3}$$

et cette équation équivaut aux deux suivantes :

$$\begin{aligned} x &= e^p \cos q, \\ y &= e^p \sin q. \end{aligned} \tag{4}$$

On en déduit

$$e^{2p} = x^2 + y^2, \quad \operatorname{tang} q = \frac{y}{x}, \tag{5}$$

et, par conséquent,

$$p = \frac{1}{2} l(x^2 + y^2), \tag{6}$$

$$q = \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x}, \tag{7}$$

$l(x^2 + y^2)$ est, bien entendu, le logarithme népérien ordinaire du nombre réel et positif $x^2 + y^2$; arc tang $\frac{y}{x}$ représente une infinité d'arcs. Soit α le plus petit d'entre eux; il faut remarquer que, q étant défini par son sinus et par son cosinus, on peut ajouter à α un multiple de 2π, mais non pas un multiple quelconque de π, comme cela aurait lieu si l'on n'avait égard qu'à l'équation (7); on a donc enfin

$$l.(x + y\sqrt{-1}) = \frac{1}{2} l(x^2 + y^2) + \sqrt{-1}\,(\alpha + 2k\pi),$$

α étant le plus petit des arcs dont la tangente est $\frac{y}{x}$ et k un nombre entier arbitraire.

L'équation

$$e^{2\pi\sqrt{-1}} = \cos 2\pi + \sqrt{-1}\sin 2\pi = 1$$

montre d'ailleurs, à priori, que l'on peut ajouter à l'exposant de e un multiple quelconque de $2\pi\sqrt{-1}$ sans changer la valeur de l'exponentielle, et qu'il est permis, par conséquent aussi, d'ajouter à un logarithme, un multiple quelconque de $2\pi\sqrt{-1}$.

371. L'équation

$$z = e^u$$

étant, par définition, une conséquence de

$$u = l z,$$

on a

$$\frac{dz}{du} = z,$$

et, par conséquent,

$$\frac{du}{dz} = \frac{d l z}{dz} = \frac{1}{z},$$

résultat facile à vérifier directement d'après la valeur de $l z$.

372. *Définition de z^m pour une valeur quelconque de m.* — Si l'on fait $z = x + y\sqrt{-1}$, on a, d'après ce qui précède,

$$z = e^{p+q\sqrt{-1}}, \tag{1}$$

p et q ayant les valeurs trouvées au paragraphe (370). L'expression z^m est donc équivalente à

$$(e^{p+q\sqrt{-1}})^m. \tag{2}$$

Pour élever l'exponentielle à la puissance m, nous admettrons, comme définition, qu'il faut multiplier l'exposant par m et nous poserons, en conséquence,

$$z^m = e^{mp+mq\sqrt{-1}}, \tag{3}$$

q contenant dans son expression un multiple arbitraire de 2π, qui, sans influer sur la valeur de l'expression (1), change, au contraire, après la multiplication de q par m, la valeur de l'exponentielle (3); z^m n'est donc pas une fonction bien déterminée de z.

Si l'exposant m est réel et égal à $\frac{h}{g}$, h et g étant entiers, on aura

$$z^{\frac{h}{g}} = e^{\frac{hp}{g}+\frac{hq}{g}\sqrt{-1}} = e^{\frac{hp}{g}}\left(\cos\frac{hq}{g}+\sqrt{-1}\sin\frac{hq}{g}\right),$$

et si, dans cette expression, on remplace, comme cela est permis, q par $q+2k\pi$, elle prendra un nombre de valeurs distinctes précisément égal au dénominateur g.

Si l'exposant m est imaginaire et égal à $r(\cos\omega+\sqrt{-1}\sin\omega)$, on aura, en posant

$$p+q\sqrt{-1} = \rho(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi),$$

$$z^m = e^{r\rho[\cos(\varphi+\omega)+\sqrt{-1}\sin(\varphi+\omega)]} = e^{r\rho\cos(\varphi+\omega)}[\cos r\rho\sin(\varphi+\omega)]+\sqrt{-1}\sin r\rho\sin(\varphi+\omega);$$

cette expression fournissant d'ailleurs pour z^m une infinité de valeurs distinctes, puisque l'angle φ qui y figure dépend de l'expression $p+q\sqrt{-1}$, dans laquelle il est permis d'ajouter à q un multiple quelconque de 2π.

Sur les fonctions qui sont mal déterminées.

373. Parmi les fonctions que nous venons de définir, il faut distinguer avec soin e^z, $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{tang} z$, et z^m lorsque m est entier, qui sont des fonctions bien déterminées. Chacune d'elles, pour une valeur réelle ou imaginaire de z, est définie sans ambiguïté. Les fonctions lz, z^m, lorsque m n'est pas entier, admettent, au contraire, pour chaque valeur de z, plusieurs valeurs distinctes également conformes à leur définition. Il est important cependant, dans un grand nombre de cas, de pouvoir préciser celle dont on veut s'occuper, et nous allons donner sur ce point quelques développements.

Lorsque l'on considère des valeurs isolées de x et de y, la définition laissant, par hypothèse, la fonction indéterminée, on peut adopter indifféremment l'une quelconque des expressions qu'elle fournit; mais, ce premier choix une fois fait, si l'on fait varier x et y à partir des valeurs primitivement considérées, les valeurs successives de la fonction supposée continue sont en général déterminées, et toute ambiguïté disparaît.

Soit, par exemple, $\varphi(x+y\sqrt{-1})$ une fonction dont la définition, quelle qu'elle soit d'ailleurs, laisse subsister, pour des valeurs données de x et de y, une certaine indétermination, permettant de choisir entre des valeurs distinctes; dans certains cas, lorsque par exemple $\varphi(x+y\sqrt{-1}) = l(x+y\sqrt{-1})$, le nombre de ces valeurs est infini.

Attribuons à x et à y des valeurs initiales x_0, y_0, pour lesquelles nous choisirons arbitrairement, parmi les valeurs conformes à la définition, celles que nous voulons adopter pour représenter $\varphi(x_0+y_0\sqrt{-1})$. Faisons ensuite varier x et y d'une manière continue et suivant une loi telle que le point dont x et y sont les coordonnées, décrive sur le plan une courbe arbitraire commençant au point dont les coordonnées sont x_0, y_0; la condition de varier infiniment peu lorsque la variable change elle-même infiniment peu, dissipera toute ambiguïté, et l'on devra adopter, en chaque point, pour la fonction, la valeur, en général unique, qui, satisfaisant à la définition, diffère infiniment peu de celle qui correspond au point infiniment voisin qui précède. Une seule exception correspond au cas où, pour l'un des points considérés, deux valeurs de la fonction deviendraient exceptionnellement égales entre elles; si la loi de continuité conduit à adopter ces valeurs, en continuant à suivre la courbe qui représente la loi de variation de x et de y, on se trouvera, pour un point infiniment voisin de celui dont il est question, en présence de deux valeurs infiniment peu différentes l'une de l'autre qui, satisfaisant l'une et l'autre à la loi de continuité adoptée comme critérium, pourront être acceptées toutes deux; ces valeurs se sépareront ensuite et acquerront une différence finie, en sorte que l'ambiguïté reparaîtra pour tous les points situés au delà de ce point *critique* où elle a pris naissance.

La définition de la fonction $\sqrt{x+y\sqrt{-1}}$, lui assigne deux valeurs égales et de signes contraires, qui deviennent égales pour $x=0$, $y=0$; c'est donc, pour cette fonction, par l'origine des coordonnées qu'on devra s'abstenir de faire passer la courbe qui représente la série des valeurs de x et de y.

Pour la fonction $l(1+x+y\sqrt{-1})$, le point *critique* correspond aux valeurs $y=0$, $x=-1$, pour lesquelles toutes les valeurs du logarithme deviennent infinies.

374. Il ne faut pas croire que, pour définir avec précision l'une des valeurs d'une fonction $\varphi(x+y\sqrt{-1})$, il soit nécessaire de spécifier la courbe qui réunit le point correspondant aux valeurs choisies de x et de y au point arbitraire pour lequel le choix a été fait d'abord. On conçoit, en effet, que les valeurs possibles de la fonction ne formant pas une série continue, le changement dans la forme de la courbe étant supposé se faire graduellement et par un mouvement continu, la fonction doit nécessairement rester invariable jusqu'au moment où se produit un changement brusque qui lui fait acquérir une valeur nouvelle, et recevoir tout à coup un accroissement

fini. S'il s'agit, par exemple, de la fonction $l(x+y\sqrt{-1})$, pour des valeurs données de x et de y, on sait que, si elle change, elle ne peut s'accroître que d'un multiple de $2\pi\sqrt{-1}$. Or nous allons montrer que ces changements brusques ne sont possibles que quand la courbe, en se déformant, franchit l'un des points qui correspondent aux valeurs égales, infinies, ou indéterminées de la fonction.

Considérons en effet un point initial A ayant pour coordonnées x_0, y_0, et soit un point B dont les coordonnées sont x_1, y_1; supposons qu'un point mobile M parte de A et se rende en B en suivant une certaine courbe; si l'on se donne en A la valeur de la fonction $\varphi(x_0+y_0\sqrt{-1})$, la condition que nous lui imposons d'être continue, déterminera celle qu'il faudra adopter en B pour la fonction $\varphi(x_1+y_1\sqrt{-1})$ lorsque x et y auront été pris successivement égaux aux coordonnées variables du point mobile M. Supposons ensuite que l'on passe du point A au point B en suivant une courbe infiniment peu différente et telle, qu'aucun des points dont nous avons parlé ne soit compris entre elle et la précédente; en adoptant pour $\varphi(x_0+y_0\sqrt{-1})$ la même valeur que dans le cas précédent, on trouvera la même valeur aussi pour $\varphi(x_1+y_1\sqrt{-1})$. Concevons en effet que deux points mobiles M et M′ parcourant nos deux courbes, partent en même temps de A, pour arriver en même temps en B, et suivant une loi telle, que leur distance soit constamment infiniment petite. Lorsque le point M parcourt la première courbe, les valeurs que prend successivement la fonction sont déterminées par l'obligation de former une suite continue; mais, pour chaque point considéré isolément, la définition de la fonction permettrait de choisir entre diverses valeurs toujours inégales par hypothèse. Soit Δ un nombre moindre que le plus petit module de la différence entre deux valeurs possibles de la fonction en un point quelconque de cette courbe; il est clair que pour deux points infiniment voisins dont l'un est situé sur la courbe, le module de la différence entre deux valeurs de φ compatibles avec la définition de la fonction, sera aussi supérieur à Δ, s'il n'est pas infiniment petit. Au point initial dont les coordonnées sont x_0, y_0, la valeur de la fonction a été choisie, et lorsque les deux courbes sont parcourues simultanément par des mobiles partant de ce point, la différence initiale entre les valeurs de la fonction est nulle et a zéro pour module. Ce module étant assujetti, comme nous l'avons dit, à la condition d'être toujours infiniment petit ou supérieur à Δ, ne peut, à aucun instant, cesser d'être infiniment petit, car il devrait, pour cela, changer brusquement de valeur pour devenir supérieur à Δ. Lorsque les deux points arriveront ensemble en B, les valeurs correspondantes de φ différeront donc infiniment peu, et cela ne peut être sans qu'elles soient rigoureusement égales, car au point B toutes les valeurs possibles de la fonction sont par hypothèse distinctes et leurs différences ont des modules finis.

Si les deux courbes comprenaient, entre elles, un des points pour lesquels deux va-

leurs de φ deviennent égales entre elles, la quantité désignée par Δ serait infiniment petite, et le raisonnement précédent serait en défaut. La valeur de la fonction φ relative au point B peut donc varier pour une même valeur initiale correspondant au point A, lorsque la courbe qui unit ces deux points et par laquelle on représente les valeurs intermédiaires de la variable, se déforme infiniment peu en franchissant un des points pour lesquels deux valeurs de la fonction φ deviennent égales entre elles.

375. Pour éclairer ce qui précède par un exemple, considérons la fonction

$$\varphi(x+y\sqrt{-1}) = \sqrt{x+y\sqrt{-1}},$$

qui peut avoir, pour chaque point, deux valeurs égales et de signes contraires. Donnons-nous, pour $x=1$, $y=0$,

$$\varphi(x+y\sqrt{-1}) = +1.$$

Cette hypothèse détermine la fonction pour des valeurs quelconques de x et de y supposées reliées aux valeurs initiales $x=1$, $y=0$, par une série continue de valeurs intermédiaires parmi lesquelles ne figurent pas $x=0$, $y=0$, pour lesquelles les deux valeurs de la fonction sont nulles toutes deux et par conséquent égales. Si l'on considère un point mobile partant du point A, dont les coordonnées sont $x=1$, $y=0$, et revenant au même point après avoir décrit une courbe continue, et que l'on attribue à x et à y les valeurs correspondantes aux coordonnées des points de cette courbe, en revenant aux valeurs primitives x_0 y_0, la fonction reprendra sa valeur initiale si la courbe ne contient pas dans son intérieur l'origine des coordonnées; on pourra en effet, dans ce cas, en conservant les deux mêmes extrémités réunies en A, la réduire à zéro par une déformation continue, sans qu'elle ait à franchir ce point critique, et par conséquent sans altération de la valeur finale de φ. Il en sera autrement si l'origine est située dans l'intérieur de la courbe. Supposons par exemple que, partant du point dont les coordonnées sont $x=1$, $y=0$, on se déplace sur le cercle du rayon unité décrit de l'origine comme centre, et soit φ l'angle décrit sur ce cercle à partir du point initial, dans le sens de la rotation qu'il faudrait imprimer à l'axe des X positifs pour le coucher sur celui des Y positifs, on aura

$$x+y\sqrt{-1} = \cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi,$$
$$\sqrt{x+y\sqrt{-1}} = \pm\left(\cos\frac{\varphi}{2} + \sqrt{-1}\sin\frac{\varphi}{2}\right).$$

Lorsque φ est nul, nous adoptons par convention la valeur $+1$ et par conséquent le signe $+$ en dehors de la parenthèse. La continuité exige dès lors que l'on prenne toujours le signe $+$, car, la parenthèse n'étant jamais nulle, le changement du signe $+$ en signe $-$ entraînerait un changement brusque dans la valeur de la

fonction. Lors donc qu'après avoir fait le tour de cercle on aura $\varphi = 2\pi$, on aura

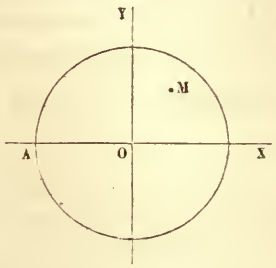
$$\sqrt{\cos 2\pi + \sqrt{+1}\,\sin 2\pi} = \sqrt{1} = +(\cos\pi + \sqrt{-1}\,\sin\pi) = -1.$$

Ainsi donc, quoiqu'on soit revenu au point de départ, la fonction n'a pas repris sa valeur primitive qui était $+1$. La fonction $z^{\frac{1}{2}}$ est donc *essentiellement* ambiguë. Lorsque, par un choix arbitraire, on écarte l'une des valeurs correspondant à une valeur donnée de z, on la voit reparaître comme conséquence de la continuité.

376. Considérons en second lieu la fonction

$$u = (1+z)^m,$$

m désignant un nombre quelconque positif ou négatif. Lorsque x et y sont donnés, cette fonction admet des valeurs distinctes qui deviennent toutes égales à zéro ou à l'infini, suivant le signe de m, lorsque l'on suppose $x = -1$, $y = 0$. Adoptons donc, pour des valeurs données de x et de y, une valeur déterminée pour u; supposons par exemple que pour $x = 0$, $y = 0$, on prenne $u = 1$, et que l'on fasse ensuite varier x et y d'une manière continue pour leur faire acquérir les valeurs $x = x_0$, $y = y_0$. Les valeurs successives de u seront déterminées, et il en sera de même de la valeur extrême qui restera invariable si la courbe qui représente les valeurs successives de x et de y se déforme en conservant les mêmes extrémités sans traverser le point correspondant à $x = -1$, $y = 0$. Cette condition sera nécessairement remplie si l'on assujettit le module de z à rester moindre que l'unité : les points correspondants resteront dans l'intérieur du cercle de rayon unité décrit de l'origine comme centre, et les courbes qu'ils décriront ne franchiront jamais le point critique qui est situé sur le contour de ce cercle. Si donc on adopte cette convention, à chaque point de l'intérieur du cercle correspondra une valeur déterminée de u, qu'il est facile de calculer.



Soient O l'origine des coordonnées correspondant à $z = 0$; A le point critique correspondant à $z = -1$, et M un point quelconque situé dans l'intérieur du cercle et correspondant à $z = x + y\sqrt{-1}$: on suppose que le point mobile parte de O pour arriver en M sans sortir du cercle de rayon unité, et l'on demande celle des valeurs

de u qui correspond au point extrême M, en se rattachant par une série continue de valeurs intermédiaires à la valeur initiale $u = 1$ que l'on adopte pour le point O. Posons

$$1 + x + y\sqrt{-1} = \rho'(\cos\omega + \sqrt{-1}\sin\omega),$$

ρ' et ω sont les coordonnées polaires du point M, lorsque l'on prend pour pôle le point A, et OX pour axe, l'angle ω pouvant, bien entendu, être augmenté ou diminué d'un multiple de 2π. On aura

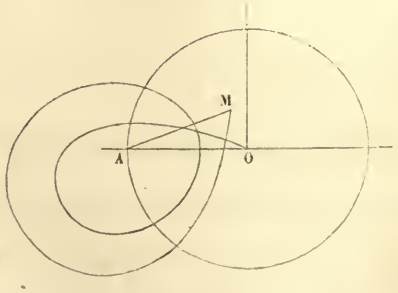
$$u = \rho'^m(\cos\omega + \sqrt{-1}\sin\omega)^m = \rho'^m(\cos m\omega + \sqrt{-1}\sin m\omega),$$

et il faut décider quelle valeur, dans cette expression, doit recevoir l'angle ω. Or, en supposant $z = 0$, on a, *par convention*, $u = 1$. On doit prendre, par conséquent, $\rho' = 1$, $\omega = 0$; z changeant d'une manière continue, ρ' et ω doivent varier aussi d'une manière continue, et il est évident que le point M ne sortant pas du cercle de rayon unité décrit du point O comme centre, ω reste compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$, ce qui dissipe toute ambiguïté.

Si le point auquel correspond la valeur de z pouvait se mouvoir librement sur le plan, la valeur correspondante de ω variant d'une manière continue, pourrait n'être plus comprise entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$, et tout en assignant à u la valeur $+1$ comme correspondant à la valeur initiale $z = 0$, on devrait pour chaque valeur de z, y compris même $z = 0$ considéré comme valeur finale, regarder u comme indéterminé. Il est clair en effet que dans l'expression

$$(1 + z)^m = \rho'^m(\cos m\omega + \sqrt{-1}\sin m\omega),$$

$\omega = 0$ correspondant, par convention, à la valeur initiale $z = 0$, si le point du plan auquel correspond la valeur de z tourne autour du point A, ω qui est l'angle formé par le rayon vecteur AM avec l'axe AO recevra, à chaque révolution, un accroissement égal à 2π. Si, par exemple, le chemin suivi pour aller de O en M est celui que représente la figure



la continuité exige que l'on prenne ω égal à l'angle MAO augmenté de 4π, et l'on

aura, dans cette hypothèse, en posant MAO $= \alpha$,

$$u = (1+z)^m = \rho'^m [\cos(m\alpha + 4m\pi) + \sqrt{-1}\,\sin(m\alpha + 4m\pi)].$$

Si le point mobile revient en O après avoir fait une révolution autour de A, on aura

$$u = \cos 2m\pi + \sqrt{-1}\,\sin 2m\pi,$$

et l'hypothèse d'une valeur unique, $u = +1$, correspondant à $z = 0$, est incompatible, par conséquent, avec la continuité de la fonction qui est essentiellement ambiguë si l'on ne limite pas, comme nous l'avions fait d'abord, les valeurs que peut prendre z.

377. Considérons enfin la fonction

$$u = l(1+z)$$

qui, pour chaque valeur de z, a, par définition, une infinité de valeurs distinctes qui deviennent toutes infinies quand on suppose $z = -1$. Pour $z = 0$, on a

$$u = l1 = 2k\pi\sqrt{-1}.$$

Prenons $k = 0$ et supposons, par conséquent, que, pour $z = 0$, u se réduise à zéro.

Si z, partant de la valeur zéro, change d'une manière continue, et que la courbe dont les points représentent ses valeurs successives ne passe pas par le point qui correspond à $z = -1$, les valeurs successives de $l(1+z)$ seront déterminées, et si l'on veut que z devienne égal à $x_1 + y_1\sqrt{-1}$, la valeur correspondante de u dépendra de la courbe par laquelle on aura réuni l'origine au point dont les coordonnées sont x_1, y_1, mais elle restera invariable si cette courbe se déforme sans traverser le point correspondant à $z = -1$, pour lequel toutes les valeurs de $l(1+z)$ sont infinies. Cette condition sera évidemment remplie si l'on assujettit, comme dans le cas précédent, le module de z à rester inférieur à l'unité. En adoptant cette convention, à chaque point intérieur au cercle de rayon unité décrit de l'origine comme centre, correspondra une valeur déterminée de u que nous allons calculer.

On a (**370**)

$$l(1+x+y\sqrt{-1}) = \frac{1}{2}l[(1+x)^2+y^2] + \sqrt{-1}\,\text{arc tang}\left(\frac{y}{x+1}\right),$$

et il s'agit seulement de décider parmi les arcs dont la tangente est $\frac{y}{x+1}$, quel est celui que l'on doit adopter. Or, par hypothèse, pour $x = 0$, $y = 0$, on a

$$l(1+x+y\sqrt{-1}) = 0,$$

par conséquent arc tang $\frac{y}{x+1}$ doit être pris égal à zéro. Cela posé, $\frac{y}{x+1}$ ne pou-

vant pas devenir infini lorsque le point dont les coordonnées sont x et y reste dans l'intérieur du cercle, arc tang $\frac{y}{x+1}$ reste compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$, ce qui fait disparaître toute ambiguïté.

Si, par exemple, on pose

$$x + y\sqrt{-1} = \cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi,$$

on trouve aisément

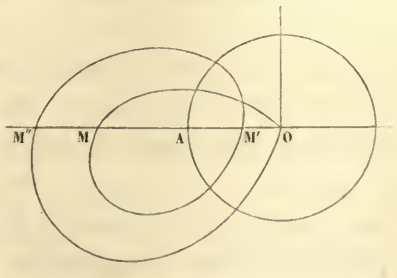
$$1(1+\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi) = 1\left[\pm\left(2\cos\tfrac{1}{2}\varphi\right)\right] \pm \sqrt{-1}\,\text{arc tang}\left(\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\varphi\right),$$

le signe $\pm$ qui précède $\cos\frac{1}{2}\varphi$ dans le premier terme, étant tel que le logarithme porte sur un nombre positif, et le coefficient de $\sqrt{-1}$ étant compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$. La valeur la plus générale de arc tang $\left(\text{tang}\,\frac{1}{2}\varphi\right)$ est

$$\frac{\varphi}{2} + k\pi,$$

et la valeur du nombre entier k, pour laquelle cette expression est comprise entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$ est évidemment unique.

Si l'on n'apportait aucune restriction aux valeurs intermédiaires que x et y peuvent prendre en passant des valeurs initiales $x=0$, $y=0$ à celles que l'on veut considérer, les conclusions précédentes ne seraient plus applicables; l'angle dont la tangente est $\frac{y}{x+1}$ est l'angle formé avec l'axe des X par le rayon vecteur qui réunit le point mobile au point fixe A, dont les coordonnées sont $y=0$, $x=-1$; si le rayon vecteur fait plusieurs révolutions autour de son origine fixe, l'angle augmentera d'un nombre égal de fois 2π. Si, par exemple, on suppose que les valeurs successivement attribuées à x et à y soient les coordonnées des points de la courbe fermée indiquée sur la figure, qui part du point O et qui s'y termine,



la valeur initiale de $1(1+z)$, correspondant à $z=0$, étant toujours supposée nulle,

lorsque z reprendra la valeur zéro après avoir reçu les valeurs intermédiaires qui correspondent aux points de la courbe OMM'M''O, on devra prendre $\operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x+1} = 4\pi$, et l'on aura

$$l(1+z) = l(1) = 4\pi\sqrt{-1}.$$

La fonction $l(1+z)$, si l'on veut qu'elle soit continue, est donc essentiellement indéterminée, de même que $(1+z)^m$, lorsque l'on n'impose aucune restriction aux valeurs que peut recevoir z.

Développement en série des fonctions imaginaires.

378. Certaines fonctions imaginaires sont définies par les séries qui les représentent; telles sont les fonctions e^z, $\sin z$, $\cos z$: celles-là sont développables pour toutes les valeurs réelles ou imaginaires de z, en séries ordonnées suivant les puissances de la variable z dont elles sont des fonctions continues, toujours finies et déterminées. Une définition analogue est impossible pour des fonctions telles que $l(1+z)$ et $(1+z)^m$, dont les développements ne sont convergents que pour certaines valeurs de la variable, elle conduirait en effet à admettre que pour toutes les autres valeurs la fonction cesse d'exister.

Si l'on posait, par exemple, comme définition,

$$l(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \dots,$$

il faudrait regarder $l(1+z)$ comme infini, et par conséquent la fonction comme cessant d'exister, pour toute valeur de z dont le module surpasse l'unité. Il y aurait le même inconvénient à prendre comme définition de la fonction $(1+z)^m$ la série connue qui la représente lorsque z est réel et moindre que l'unité.

On peut d'ailleurs reconnaître à priori que les résultats auxquels nous a conduit l'étude des fonctions, $l(1+z)$, $(1+z)^m$, sont incompatibles avec l'existence d'une série ordonnée suivant les puissances de z et représentant pour toute valeur de la variable, l'une ou l'autre de ces fonctions. La série, en effet, ne pourrait, pour chaque valeur de z, fournir qu'une seule valeur de la fonction, tandis que (376, 377) les définitions en indiquent plusieurs *qui sont inséparables les unes des autres*.

On ne résoudrait pas la difficulté en supposant l'existence de plusieurs séries distinctes en nombre égal à celui des valeurs de la fonction, car chacune d'elles représentant une fonction continue et déterminée, leur ensemble ne pourrait pas partager cette propriété singulière reconnue à la fonction, de ne pouvoir être continue qu'à la condition d'échanger entre elles ses diverses valeurs, lorsque, après des variations, convenables, la variable reprend sa valeur primitive.

379. Lorsqu'une fonction est définie pour toutes les valeurs réelles ou imaginaires de la variable, on peut assigner des limites hors lesquelles son développement en série est impossible. Il faut, pour qu'une fonction soit développable en série, qu'elle soit continue, finie et bien déterminée pour les valeurs de la variable dont le module est moindre que le rayon du cercle de convergence de la série (261). La série ne peut devenir infinie pour une valeur de la variable sans l'être également (258) pour celles de module plus grand. Une fonction qui devient infinie pour une valeur particulière de la variable ayant un module R, ne peut donc être développable que pour des valeurs, de module inférieur à R. Cette remarque s'applique à la dérivée de la fonction, car la dérivée d'une série convergente ordonnée suivant les puissances de la variable, est toujours convergente; ainsi, par exemple, arc tang z, ayant pour dérivée $\frac{1}{1+z^2}$, qui devient infinie pour $z=\sqrt{-1}$, ne peut être développable en série ordonnée suivant les puissances de z, que pour des valeurs de z dont le module ne surpasse pas l'unité.

380. Pour qu'une fonction soit développable en série ordonnée suivant les puissances de la variable, il faut enfin qu'elle soit bien déterminée, c'est-à-dire qu'à chaque valeur de la variable *puisse* correspondre une valeur unique de la fonction. Il semble au premier abord qu'il soit toujours possible de faire disparaître l'ambiguïté, en faisant un choix entre les valeurs de la fonction, de manière à n'en laisser subsister qu'une seule pour chaque valeur de la variable; mais on a vu qu'une pareille convention est quelquefois incompatible avec la continuité de la fonction, qui est une condition non moins nécessaire de l'existence d'un développement. Pour cette raison, la fonction $(1+z)^m$, ne peut pas, d'après ce qui a été dit (376), être développée en série convergente pour des valeurs de z dont le module surpasse l'unité. Si l'on impose au contraire à z la condition de ne recevoir que des valeurs dont le module soit moindre que l'unité, aucune des conditions énoncées ne s'oppose à la possibilité d'un développement, qui dès lors, comme nous le démontrerons dans le second volume, est possible et déterminé.

Développement de $l(1+z)$.

381. Nous pouvons dès à présent démontrer la légitimité du développement de $l(1+z)$ pour les valeurs réelles ou imaginaires de z dont le module est moindre que l'unité. On a, en effet, identiquement et quelle que soit la valeur réelle ou imaginaire de z,

$$\frac{1}{1+z}=1-z+z^2-\ldots-z^{2n-1}+\frac{z^{2n}}{1+z}. \tag{1}$$

Si le module de z est moindre que l'unité, celui de z^{2n} tend vers zéro, et par

conséquent, $\frac{1}{1+z}$ est représenté par la série convergente.

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - \ldots - z^{n-1} + z^{2n} - \ldots. \tag{2}$$

Il résulte de là que $l(1+z)$, dont la dérivée est $\frac{1}{1+z}$, ne diffère que par une constante de la série

$$z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \cdots - \frac{z^{2n}}{2n} + \ldots,$$

dont la dérivée est le second membre de (2), et si l'on admet que, pour $z = 0$, $l(1+z)$ soit nul comme la série, on aura

$$l(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \cdots - \frac{z^{2n}}{2n} + \ldots, \tag{3}$$

qui se trouve démontrée pour toutes les valeurs de z dont le module est moindre que l'unité; $l(1+z)$ dans cette formule est une fonction continue de z, et a par conséquent la valeur calculée (**377**); c'est la seule qui soit compatible avec la double condition imposée à la fonction, d'être continue et de s'annuler avec z.

382. En posant

$$z = \rho(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi),$$

on a (**377**)

$$l(1+\rho\cos\varphi+\rho\sqrt{-1}\sin\varphi) = \frac{1}{2}l(1+\rho^2+2\rho\cos\varphi) + \sqrt{-1}\operatorname{arc\,tang}\frac{\rho\sin\varphi}{1+\rho\cos\varphi},$$

l'arc défini par sa tangente devant être compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$. En introduisant la même valeur de z dans la série et égalant les parties réelles et les parties imaginaires, on aura

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}l(1+\rho^2+2\rho\cos\varphi) &= \rho\cos\varphi - \frac{\rho^2}{2}\cos 2\varphi + \frac{\rho^3}{3}\cos 3\varphi - \ldots, \\ \operatorname{arc\,tang}\frac{\rho\sin\varphi}{1+\rho\cos\varphi} &= \rho\sin\varphi - \frac{\rho^2}{2}\sin 2\varphi + \frac{\rho^3}{3}\sin 3\varphi - \ldots; \end{aligned} \tag{4}$$

en supposant $\rho = 1$, et remarquant que

$$2 + 2\cos\varphi = 4\cos^2\frac{1}{2}\varphi,$$

$$\operatorname{arc\,tang}\frac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi} = \frac{\varphi}{2} + k\pi,$$

on a donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}l4\cos^2\frac{1}{2}\varphi &= \cos\varphi - \frac{\cos 2\varphi}{2} + \frac{\cos 3\varphi}{3} - \cdots \pm \frac{\cos n\varphi}{n} \mp \ldots, \\ \frac{\varphi}{2} + k\pi &= \sin\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{2} + \frac{\sin 3\varphi}{3} - \cdots \pm \frac{\sin n\varphi}{n} \mp \ldots, \end{aligned} \tag{5}$$

le nombre entier k étant tel que le premier membre de la seconde équation soit compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$. Si φ est compris lui-même entre $-\pi$ et $+\pi$, on doit prendre $k=0$, et l'on a

$$\frac{\varphi}{2}=\sin\varphi-\frac{\sin 2\varphi}{2}+\frac{\sin 3\varphi}{3}-\cdots\pm\frac{\sin n\varphi}{n}\mp\cdots \tag{6}$$

On voit que si φ augmente d'une manière continue, la série qui forme le second membre change brusquement au moment où l'on a $\varphi=\pi$, et la somme passe d'une valeur infiniment peu différente de $\frac{\pi}{2}$, à une valeur un peu supérieure à $-\frac{\pi}{2}$. D'après ce qui a été dit (**264**), les dérivées des termes de la série doivent, pour cette valeur de φ, avoir une somme infinie; c'est ce que l'on vérifie aisément, car ces dérivées se réduisent, pour $\varphi=\pi$, à

$$-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\cdots-\frac{1}{n}-\cdots,$$

et leur somme est effectivement infinie.

Si dans les formules (4) on suppose $\rho=-1$, elles se réduisent à

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}l\,4\sin^2\frac{1}{2}\varphi&=-\left(\cos\varphi+\frac{\cos 2\varphi}{2}+\frac{\cos 3\varphi}{3}+\cdots\right),\\ \operatorname{arc\,tang}\left(-\cot\frac{1}{2}\varphi\right)&=-\left(\sin\varphi+\frac{\sin 2\varphi}{2}+\frac{\sin 3\varphi}{3}+\cdots\right);\end{aligned} \tag{7}$$

l'arc dont la tangente est $-\cot\frac{1}{2}\varphi$, est $\frac{\varphi}{2}-\frac{\pi}{2}+k\pi$, k étant un nombre entier déterminé, puisque l'on sait que l'arc est compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$. Si φ est compris entre 0 et 2π, il faut prendre $k=0$, et l'on a par conséquent, pour de telles valeurs de φ,

$$\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}=\sin\varphi+\frac{1}{2}\sin 2\varphi+\frac{1}{3}\sin 3\varphi+\cdots, \tag{8}$$

formule déja obtenue (**301**) par un procédé très-différent.

383. Les formules (6) et (8) étant vraies toutes deux lorsque φ est compris entre 0 et π, on peut les ajouter, et l'on en déduit la formule remarquable

$$\frac{\pi}{2}=2\left(\sin\varphi+\frac{\sin 3\varphi}{3}+\frac{\sin 5\varphi}{5}-\cdots\right), \tag{9}$$

qui a lieu pour les valeurs de φ comprises entre 0 et π.

Si l'on change φ en $-\varphi$, le second membre change évidemment de signe sans changer de valeur et devient égal à $-\frac{\pi}{2}$, et comme il ne change pas lorsque φ

augmente de 2π, il en résulte que, pour toute valeur de φ, la série

$$\sin\varphi + \frac{\sin 3\varphi}{3} + \frac{\sin 5\varphi}{5} - \dots$$

est égale à $\pm\frac{\pi}{4}$, le signe $+$ correspondant au cas où $\sin\varphi$ est positif et le signe $-$ au cas où il est négatif. Lorsque φ est un multiple de π, tous les termes deviennent nuls et la formule est en défaut. Si l'on suppose $\varphi = \frac{\pi}{4}$, on a

$$\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} + \dots\right), \tag{10}$$

formule connue de Newton.

Développement de $(1+z)^m$.

384. La fonction $(1+z)^m$ est développable en série convergente lorsque z est réel et moindre que l'unité en valeur absolue. On a alors

$$(1+z)^m = 1 + mz + \frac{m(m-1)}{1.2}z^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{1.2\dots n}z^n + \dots. \tag{1}$$

Admettons ici comme exacte pour les valeurs imaginaires de z, cette série, qui, bien entendu, sera démontrée plus tard, et nous allons en déduire des conséquences remarquables. D'abord, d'après les explications qui ont été données (378), il ne faut attribuer à z aucune valeur dont le module surpasse l'unité; de plus la fonction $(1+z)^m$, représentée par la série, étant continue et égale à l'unité pour $z=0$, ne peut prendre que celle des valeurs de $(1+z)^m$ qui a été calculée (376). Si l'on pose

$$z = \rho(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi),$$

ρ étant plus petit que l'unité, la valeur de $(1+z)^m$ qu'il faut adopter, est

$$\rho'^m(\cos m\omega + \sqrt{-1}\sin m\omega)$$

où

$$\rho' = \sqrt{1+\rho^2+2\rho\cos\varphi},$$

$$\operatorname{tang}\omega = \frac{\rho\sin\varphi}{1+\rho\cos\varphi},$$

ρ' étant positif, et ω compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$. Si l'on suppose $\rho = 1$, on a

$$\rho' = \sqrt{4\cos^2\frac{1}{2}\varphi} = \pm\left(2\cos\frac{1}{2}\varphi\right),$$

$$\operatorname{tang}\omega = \operatorname{tang}\frac{1}{2}\varphi,$$

et, par suite,

$$\omega = \frac{1}{2}\varphi - k\pi,$$

k étant un nombre entier, déterminé par la condition que ω soit compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$.

On a donc

$$(2)\qquad \left(\sqrt{4\cos^2\frac{1}{2}\varphi}\right)^m \left[\cos m\left(\frac{1}{2}\varphi - k\pi\right) + \sqrt{-1}\sin m\left(\frac{1}{2}\varphi - k\pi\right)\right]$$
$$= 1 + m\cos\varphi + \frac{m(m-1)}{1.2}\cos 2\varphi + \ldots + \sqrt{-1}\left[\sin\varphi + \frac{m(m-1)}{1.2}\sin 2\varphi + \ldots\right],$$

$\frac{1}{2}\varphi - k\pi$ étant compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$, et $\left(\sqrt{4\cos^2\frac{1}{2}\varphi}\right)^m$ étant réel et positif. En égalant les parties réelles et les parties imaginaires des deux membres de l'équation précédente, on a

$$(3)\qquad \left(\sqrt{4\cos^2\frac{1}{2}\varphi}\right)^m \cos m\left(\frac{1}{2}\varphi - k\pi\right) = 1 + m\cos\varphi + \frac{m(m-1)}{1.2}\cos 2\varphi + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\cos 3\varphi + \ldots,$$

$$\left(\sqrt{4\cos^2\frac{1}{2}\varphi}\right)^m \sin m\left(\frac{1}{2}\varphi - k\pi\right) = m\sin\varphi + \frac{m(m-1)}{1.2}\sin 2\varphi + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\sin 3\varphi + \ldots,$$

et, lorsque φ est donné, ces équations ne présentent, d'après ce qui précède, aucune ambiguïté, car $\frac{1}{2}\varphi - k\pi$ étant compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$, $\frac{\varphi}{2}$ est compris entre $k\pi - \frac{\pi}{2}$ et $k\pi + \frac{\pi}{2}$, ce qui, pour chaque valeur de φ, détermine le nombre entier k. Si l'on veut y remplacer $\left(\sqrt{4\cos^2\frac{1}{2}\varphi}\right)$, qui est toujours positif, par la valeur $2\cos\frac{1}{2}\varphi$, il faut le faire précéder du signe $\pm$.

Ajoutons les deux équations (3) après avoir multiplié la première par $\cos\alpha$ et la seconde par $\sin\alpha$, α étant un angle arbitraire, nous aurons

$$\left(\pm 2\cos\frac{1}{2}\varphi\right)^m \cos\left(\alpha - m\frac{\varphi}{2} + mk\pi\right) = \cos\alpha + m\cos(\alpha - \varphi) + \frac{m(m-1)}{1.2}\cos(\alpha - 2\varphi) + \ldots.$$

Si l'on pose $\varphi = 2x$, on a

$$(4)\quad (\pm 2\cos x)^m \cos(\alpha - mx + mk\pi) = \cos\alpha + m\cos(\alpha - 2x) + \frac{m(m-1)}{1.2}\cos(\alpha - 4x) + \ldots,$$

$\pm 2\cos x$ étant toujours pris positivement.

Si l'on suppose $\alpha = mx$, la formule (4) devient

$$(5)\quad (\pm 2\cos x)^m \cos mk\pi = \cos mx + m\cos(m-2)x + \frac{m(m-1)}{1.2}\cos(m-4)x + \ldots,$$

et si l'on suppose $\alpha = mx + \frac{\pi}{2}$, il vient

$$(6)\quad (\pm 2\cos x)^m \sin mk\pi = \sin mx + m\sin(m-2)x + \frac{m(m-1)}{1.2}\sin(m-4)x + \ldots,$$

x étant compris entre $k\pi - \frac{\pi}{2}$ et $k\pi + \frac{\pi}{2}$, dans les premiers membres des formules (3 et 6) pour que $\pm 2\cos x$ soit positif, il faut adopter le signe + si k est pair et le signe — s'il est impair.

Si dans l'équation (4) on pose $\alpha = mx'$, $x = x' - \frac{\pi}{2}$, et que pour la symétrie des formules, on change dans le résultat x' et x, il vient

$$(7)\quad (\pm 2\sin x)^m \cos m\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi = \cos mx - m\cos(m-2)x + \frac{m(m-1)}{1.2}\cos(m-4)x + \ldots,$$

et si l'on fait $\alpha = mx' - \frac{\pi}{2}$, $x = x' - \frac{\pi}{2}$, en changeant toujours x' en x dans le résultat,

$$(8)\quad (\pm 2\sin x)^m \sin m\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi = \sin mx - m\sin(m-2)x + \frac{m(m-1)}{1.2}\sin(m-4)x + \ldots.$$

Dans ces formules x est un arc arbitraire compris entre $k\pi$ et $(k+1)\pi$, et k un nombre entier quelconque. $(\pm 2\sin x)$ doit être positif, et l'on doit par conséquent prendre le signe + quand k est pair et le signe — quand il est impair.

Euler et Lagrange avaient donné la formule

$$(9)\qquad (2\cos x)^m = \cos mx + m\cos(m-2)x + \ldots,$$

que l'on avait acceptée sans discussion. Poisson fut le premier à signaler l'impossibilité de l'équation (9) en remarquant que l'hypothèse $m = \frac{1}{3}$, $x = \pi$, la rend manifestement inexacte; le premier membre devient en effet $-\sqrt[3]{2}$, et le second se réduit à

$$\cos\frac{\pi}{3} + \frac{1}{3}\cos\frac{\pi}{3} + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{1.2}\cos\frac{\pi}{3} + \ldots,$$

$\cos\frac{\pi}{3}$ est égal à $\frac{1}{2}$, et la série

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}-1\right)}{1.2} + \ldots,$$

représentant $(1+1)^{\frac{1}{3}}$, c'est-à-dire $\sqrt[3]{2}$, cette série est égale à $\frac{1}{2}\sqrt[3]{2}$, et les deux membres de l'équation d'Euler sont par conséquent inégaux. Mais à cette objection sans réplique Poisson ne joignit pas l'énoncé de la formule exacte, qui fut donnée pour la première fois par Poinsot.

Si dans l'équation (5) on suppose $m = \frac{1}{3}$, $x = \pi$, il faut prendre $k = 1$, puisque π est compris entre $\pi - \frac{\pi}{2}$ et $\pi + \frac{\pi}{2}$, et donner le signe $-$ à $\cos x$ qui est négatif; le premier membre se réduit donc à

$$(2)^{\frac{1}{3}} \cos \frac{1}{3}\pi,$$

c'est-à-dire à $\frac{1}{2}\sqrt[3]{2}$, et l'on voit qu'il est égal au second.

Il faut bien remarquer que la série

$$\cos mx + m\cos(m-2)x + \frac{m(m-1)}{1.2}\cos(m-4)x + \dots$$

est une fonction discontinue de x, et qu'elle change brusquement de valeur lorsque x croissant d'une manière continue passe par une valeur de la forme $k\pi + \frac{\pi}{2}$, car à ce moment il faut, dans le premier membre, augmenter l'entier k d'une unité.

Si l'on suppose x précisément égal à $k\pi + \frac{\pi}{2}$, tous les cosinus qui figurent dans la série deviennent alternativement égaux à $\cos mx$ et à $-\cos nx$, et la série devient

$$\cos mx\left[1 - m + \frac{m(m-1)}{1.2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} - \dots\right],$$

série convergente et égale à zéro si m est positif et divergente si m est négatif.

L'équation (5) peut donc être regardée comme exacte, car la valeur attribuée à x donne $\cos x = 0$; $(\cos x)^m$ est donc nul si m est positif, et infini s'il est négatif.

385. Si dans les formules (5), (6), (7) et (8) du paragraphe précédent on attribue à m une valeur entière, les seconds membres se réduisent à un nombre limité de termes. Considérons la première

$$(1)\quad (\pm 2\cos x)^m \cos mk\pi = \cos mx + m\cos(m-2)x + \frac{m(m-1)}{1.2}\cos(m-4)x + \dots.$$

Si l'on suppose que m y désigne un nombre entier pair, $2n$, $\cos mk\pi$ est égal à l'unité, et en supprimant dans le second nombre les termes qui sont nuls, et remarquant que le signe $\pm$ placé dans le premier membre est sans influence sur sa valeur, on a

$$(2)\quad (2\cos x)^{2n} = \cos 2nx + 2n\cos(2n-2)x + \frac{2n(2n-1)}{1.2}\cos(2n-4)x + \dots$$
$$+ \frac{2n(2n-1)\dots(n+1)}{1.2\dots n} + \dots + 2n\cos[2n-(4n-1)x] + \cos(2n-4n)x,$$

et comme les termes également distants des extrêmes sont égaux

$$(2\cos x)^{2n} = 2\cos 2nx + 2(2n)\cos(2n-2)x + 2\cdot\frac{2n(2n-1)}{1.2}\cos(2n-4)x + \ldots + \frac{2n(2n-1)\ldots(n+1)}{1.2.3\ldots n},$$

le dernier terme étant le seul qui, ne se trouvant qu'une fois dans l'équation (2), ne doit pas être doublé.

Si dans la formule (5) on remplace m par un nombre entier impair $(2n+1)$, $\cos mk\pi$ est égal à $+1$, si k est pair, et à -1 s'il est impair; mais dans le premier cas $\cos x$ est positif et il faut prendre le signe $+$ dans la parenthèse du premier membre; dans le second il est négatif et il faut adopter le signe $-$: le premier membre se réduit donc toujours à $(2\cos x)^{2n+1}$, et l'on a, en supprimant les termes nuls dans le second membre et remarquant que les termes également distants des extrêmes sont égaux,

$$(2\cos x)^{2n+1} = 2\cos(2n+1)x + 2(2n+1)\cos(2n-1)x + 2\frac{(2n+1)2n}{1.2}\cos(2n-3)x + \ldots + 2\cdot\frac{(2n+1)2n\ldots(n+2)}{1.2\ldots n}\cos x.$$

De même en supposant m entier dans les formules (7) et (8), on trouvera

$$2^{2n}(-1)^n\sin^{2n}x = 2\cos 2nx - 2.2n\cos(2n-2)x + 2.\frac{2n(2n-1)}{1.2}\cos(2n-4)x \ldots + (-1)^n\frac{2n(2n-1)\ldots(n+1)}{1.2\ldots n},$$

$$2^{2n+1}(-1)^n\sin^{2n+1}x = 2\sin(2n+1)x - 2(2n+1)\sin(2n-1)x + \ldots + (-1)^n.2\frac{(2n+1)2n\ldots(n+2)}{1.2\ldots n}\sin x.$$

Ces formules étant souvent utiles, nous donnons ici les valeurs numériques des coefficients pour les cas les plus simples; on a :

$$\begin{aligned}
2\cos^2 x &= \cos 2x + 1,\\
4\cos^3 x &= \cos 3x + 3\cos x,\\
8\cos^4 x &= \cos 4x + 4\cos 2x + 3,\\
16\cos^5 x &= \cos 5x + 5\cos 3x + 10\cos x,\\
32\cos^6 x &= \cos 6x + 6\cos 4x + 15\cos 2x + 10,\\
64\cos^7 x &= \cos 7x + 7\cos 5x + 21\cos 3x + 35\cos x,\\
128\cos^8 x &= \cos 8x + 8\cos 6x + 28\cos 4x + 56\cos 2x + 35,\\
-2\sin^2 x &= \cos 2x - 1,\\
-4\sin^3 x &= \sin 3x - 3\sin x,\\
+8\sin^4 x &= \cos 4x - 4\cos 2x + 3,\\
16\sin^5 x &= \sin 5x - 5\sin 3x + 10\sin x,\\
-32\sin^6 x &= \cos 6x - 6\cos 4x + 15\cos 2x - 10,\\
-64\sin^7 x &= \sin 7x - 7\sin 5x + 21\sin 3x - 35\sin x,\\
128\sin^8 x &= \cos 8x - 8\cos 6x + 28\cos 4x - 56\cos 2x.
\end{aligned}$$

386. Remarquons enfin que la série (5) ne peut être convergente que si les coefficients du second membre tendent vers zéro, et il faut pour cela (284) que $m+1$ soit positif. Si, par exemple, on fait $m=-1$, $m=-2$, on obtient les formules

$$\frac{1}{\cos x} = 2(\cos x - \cos 3x + \cos 5x - \cos 7x + \dots),$$

$$\frac{1}{\cos^2 x} = 2(\cos 2x - 2\cos 4x + 3\cos 6x - 4\cos 8x + \dots),$$

formules évidemment absurdes et qui cependant ont été adoptées par quelques géomètres.

Si dans la formule générale (383) on fait $m=-1$, on en déduit

$$\frac{1}{1-\rho\cos\varphi-\rho\sqrt{-1}\sin\varphi} = 1+\rho(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi)+\rho^2(\cos 2\varphi+\sqrt{-1}\sin 2\varphi)+\dots;$$

en multipliant les deux termes de la fraction qui forme le premier membre par $1-\rho\cos\varphi+\rho\sqrt{-1}\sin\varphi$ pour rendre le dénominateur réel, et égalant ensuite les parties réelles et les parties imaginaires des deux membres, on a

$$\frac{1-\rho\cos\varphi}{1-2\rho\cos\varphi+\rho^2} = 1+\rho\cos\varphi+\rho^2\cos 2\varphi+\rho^2\cos 3\varphi+\dots,$$

$$\frac{\rho\sin\varphi}{1-2\rho\cos\varphi+\rho^2} = \rho\sin\varphi+\rho^2\sin 2\varphi+\rho^3\sin 3\varphi+\dots,$$

qui ont lieu pour toutes les valeurs de ρ moindres que l'unité.

Quelques développements en série déduits de la considération des fonctions imaginaires.

387. On a trouvé (347)

$$(1)\qquad \frac{x}{e^x-1} = 1-\frac{x}{2}+\frac{B_1x^2}{1.2}-\frac{B_2x^4}{1.2.3.4}+\frac{B_3x^6}{1.2.3.4.5.6}-\dots,$$

B_1, B_2, B_3,... étant les nombres de Bernoulli dont la valeur a été donnée. Or on a (369)

$$\cot x = \sqrt{-1}\left(1+\frac{2}{e^{2x\sqrt{-1}}-1}\right).$$

En développant $\frac{1}{e^{2x\sqrt{-1}}-1}$ à l'aide de la formule (1) dans laquelle on change x en $2x\sqrt{-1}$, on a

$$\cot x = \sqrt{-1}\left\{1+2\left[\frac{1}{2x\sqrt{-1}}-\frac{1}{2}+B_1\frac{2x\sqrt{-1}}{1.2}-B_2\frac{(2x\sqrt{-1})^3}{1.2.3.4}\dots\right]\right\}$$

et en réduisant

$$\cot x = \frac{1}{x} - \frac{2^2 . B_1 x}{1.2} - \frac{2^4 B_2 x^3}{1.2.3.4} - \frac{2^6 B_3 x^5}{1.2.3.4.5.6} - \ldots - \frac{2^{2n-1} B_n}{1.2.3\ldots 2n} x^{2n-1} - \ldots,$$

il est facile de vérifier la concordance des premiers coefficients avec les valeurs numériques trouvées (304).

388. Le développement de $\cot x$ permet d'en obtenir plusieurs autres; on a

$$\operatorname{tang} x = \cot x - 2\cot 2x,$$

$$\operatorname{cosec} x = \operatorname{tang}\frac{x}{2} + \cot x,$$

et l'on en déduit

$$\operatorname{tang} x = 2^2(2^2-1)\frac{B_1 x}{1.2} + \frac{2^4(2^4-1)}{1.2\ 3.4} B_2 x^3 + \frac{2^6(2^6-1)}{1.2.3.4.5.6} B_3 x^5 + \ldots,$$

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{x} + 2(2-1)\frac{B_1}{1.2} x + \frac{2(2^3-1) B_2 x^3}{1.2.3.4} + 2.\frac{(2^5-1) B_3 x^5}{1.2.3.4.5} + \ldots,$$

nous trouverons plus loin les conditions de convergence de ces diverses séries.

389. Reprenons la fonction $(1-2\alpha z+\alpha^2)^{-\frac{1}{2}}$ déjà considérée (315); remplaçons z par $\cos\theta$, et $\cos\theta$ par sa valeur

$$\frac{e^{\theta\sqrt{-1}} + e^{-\theta\sqrt{-1}}}{2},$$

on aura, comme on le vérifie aisément,

$$(1-2\alpha\cos\theta+\alpha^2)^{-\frac{1}{2}} = \left(1-\alpha e^{\theta\sqrt{-1}}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(1-\alpha e^{-\theta\sqrt{-1}}\right)^{-\frac{1}{2}}. \tag{1}$$

En appliquant la formule du binôme à chacun des deux facteurs du second membre, on a

$$\left(1-\alpha e^{\theta\sqrt{-1}}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\alpha e^{\theta\sqrt{-1}} + \frac{1.3}{2.4}\left(\alpha e^{\theta\sqrt{-1}}\right)^2 + \ldots,$$

$$\left(1-\alpha e^{-\theta\sqrt{-1}}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\alpha e^{-\theta\sqrt{-1}} + \frac{1.3}{2.4}\left(\alpha e^{-\theta\sqrt{-1}}\right)^2 + \ldots.$$

Soit P_n le coefficient de α^n dans le produit de ces deux séries, on a, comme on le voit aisément,

$$\frac{2.4.6\ \ldots 2n}{1.3.5\ \ldots(2n-1)} P_n = \cos n\theta + \frac{1.n}{1.(2n-1)}\cos(n-2)\theta + \frac{1.3.n(n-1)}{1.2.(2n-1)(2n-3)}\cos(n-4)\theta + \ldots, \tag{2}$$

la série qui figure dans le second nombre devant être prolongée jusqu'à ce que les termes deviennent égaux à zéro. Cette fonction P_n est ce que devient la fonction X_n définie (315), lorsqu'on y remplace x par $\cos\theta$; tous les coefficients étant positifs dans le second membre de l'équation (2), on voit que l'hypothèse $\theta = 0$ lui fera acquérir sa valeur maxima; cette valeur est le coefficient de α^n dans le développement de

$$(1-2\alpha+\alpha^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{1-\alpha}.$$

Il est donc égal à l'unité, et puisqu'il est la valeur maxima de P_n, la fonction X_n est toujours moindre que l'unité lorsqu'on y suppose $x = \cos\theta$, c'est-à-dire quand on lui attribue une valeur quelconque comprise entre -1 et $+1$.

390. Supposons enfin une fonction y définie par l'équation

$$\text{tang}\, y = \cos\alpha . \text{tang}\, x. \tag{1}$$

Cherchons le développement de y en série ordonnée suivant les puissances de $\text{tang}\frac{\alpha}{2}$.

L'équation (1) équivaut à

$$\frac{e^{y\sqrt{-1}} - e^{-y\sqrt{-1}}}{e^{y\sqrt{-1}} + e^{-y\sqrt{-1}}} = \cos\alpha \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}},$$

ou bien

$$\frac{e^{2y\sqrt{-1}} - 1}{e^{2y\sqrt{-1}} + 1} = \cos\alpha \frac{e^{2x\sqrt{-1}} - 1}{e^{2x\sqrt{-1}} + 1};$$

on en déduit

$$e^{2y\sqrt{-1}} = \frac{e^{2x\sqrt{-1}} + 1 + \cos\alpha\left(e^{2x\sqrt{-1}} - 1\right)}{e^{2x\sqrt{-1}} + 1 - \cos\alpha\left(e^{2x\sqrt{-1}} - 1\right)} = \frac{e^{2x\sqrt{-1}} + \text{tang}^2\frac{\alpha}{2}}{\text{tang}^2\frac{\alpha}{2}\, e^{2x\sqrt{-1}} + 1},$$

ou enfin

$$e^{2y\sqrt{-1}} = e^{2x\sqrt{-1}}\left(\frac{1 + \text{tang}^2\frac{\alpha}{2} e^{-2x\sqrt{-1}}}{1 + \text{tang}^2\frac{\alpha}{2} e^{2x\sqrt{-1}}}\right).$$

En prenant les logarithmes des deux membres et divisant ensuite par $2\sqrt{-1}$, on en déduit

$$y = x + \frac{l\left(1 + \text{tang}^2\frac{\alpha}{2} e^{-2x\sqrt{-1}}\right) - l\left(1 + \text{tang}^2\frac{\alpha}{2} e^{2x\sqrt{-1}}\right)}{2\sqrt{-1}}.$$

En réduisant les logarithmes en série et substituant aux exponentielles imaginaires leurs valeurs, on a enfin

$$y = x - \operatorname{tang}^2\frac{\alpha}{2}\sin 2x + \frac{\operatorname{tang}^4\frac{\alpha}{2}}{2}\sin 4x - \frac{\operatorname{tang}^6\frac{\alpha}{2}}{3}\sin 6x + \ldots.$$

EXERCICES.

1. En représentant une expression imaginaire $x + y\sqrt{-1}$ par le point du plan dont les coordonnées sont x et y, une équation quelconque $F(u, v) = 0$ établira une loi de déformation permettant de déduire du point représenté par la variable u, le point représenté par la valeur correspondante de v, et une figure plane quelconque aura sa transformée qui lui est semblable lorsque leurs dimensions sont infiniment petites.

2. Si l'on pose

$$u^m = (z-a)(z-b)(z-c)(z-d)\ldots(z-l),$$

m étant un nombre entier, et $a, b, c, d\ldots$, des quantités données, réelles ou imaginaires, on déduit de cette équation, m valeurs de u correspondantes à une valeur donnée de z. Si le point du plan auquel correspond la valeur de z, décrit un cercle de très-petit rayon autour du point qui correspond à la quantité a, les m racines relatives à cette valeur de z étant $u_1, u_2, \ldots, u_m$, on peut les grouper dans un ordre tel, qu'après avoir fait parcourir au point qui représente z la circonférence entière du cercle, chaque racine se trouve remplacée par la suivante, de telle sorte qu'en prenant $u = u_p$ pour valeur initiale, $u = u_{p+1}$ soit celle qui s'y rattache par une série continue de valeurs intermédiaires, et qui la remplace lorsque z reprend sa valeur primitive.

3. Soit l'équation

$$u^3 - u + z = 0, \tag{1}$$

qui, pour $z = \frac{2}{3\sqrt{3}}$, a une racine double égale à $\frac{1}{\sqrt{3}}$ et une racine simple égale à $-\frac{2}{\sqrt{3}}$. Soit A le point qui répond à $z = \frac{2}{3\sqrt{3}}$: si l'on prend un point infiniment voisin pour point de départ, et que l'on décrive une courbe fermée autour de A, en attribuant successivement à z les valeurs qui correspondent aux points de cette courbe, u_1, u_2, u_3 désignant les trois racines de l'équation (1), les deux premières étant très-peu différentes de $\frac{1}{\sqrt{3}}$ et la troisième de $-\frac{2}{\sqrt{3}}$, u_3 reprendra sa valeur initiale lorsque le point qui représente z aura accompli sa révolution, et les racines u_1 et u_2 se changeront l'une dans l'autre.

4. De l'équation

$$\operatorname{tang} x = \frac{a \sin y}{\cos y + p}$$

on peut déduire

$$e^{2x\sqrt{-1}} = e^{2y\sqrt{-1}} \frac{(1+Pe^{-y\sqrt{-1}})\,(1+Qe^{-y\sqrt{-1}})}{(1+Pe^{y\sqrt{-1}})\,(1+Qe^{y\sqrt{-1}})},$$

P et Q étant des constantes liées à a et à p. On en conclut, en prenant les logarithmes des deux membres,

$$x = y - (P+Q)\sin y + \frac{P^2+Q^2}{2}\sin 2y - \frac{P^3+Q^3}{3}\sin 3y + \ldots,$$

série extrêmement convergente lorsque P et Q sont des nombres très-petits, comme cela a lieu lorsque p est lui-même très-petit, et a peu différent de l'unité.

5. L'équation

$$\operatorname{tang} y = a\sin x + b$$

permet également de développer y en série ordonnée suivant les sinus et cosinus des multiples de x. En calculant d'abord $e^{2y\sqrt{-1}}$, puis prenant, comme dans l'exemple précédent, les logarithmes des deux membres, on trouve

$$y = p + 2f\cos p\sin x + \frac{2}{3}f^3\cos 3p\sin 3x + \frac{2}{5}f^5\cos 5p\sin 5x + \ldots$$
$$+ f^2\sin 2p\cos 2x + \frac{1}{2}f^4\sin 4p\cos 4x + \frac{1}{3}f^6\sin 6p\cos 6x + \ldots.$$

CHAPITRE V.

DÉVELOPPEMENT D'UNE FONCTION DE PLUSIEURS VARIABLES.

Extension du théorème de Taylor à une fonction de deux variables.

391. Lorsque dans une fonction de deux variables $\varphi(x, y)$, on remplace x par $x+h$ et y par $y+k$, le résultat de cette substitution $\varphi(x+h, y+k)$ peut être développé en série ordonnée suivant les puissances de h et de k et leurs produits deux à deux. On peut en effet développer d'abord $\varphi(x+h, y)$ en série ordonnée suivant les puissances de h, puis dans le résultat changer y en $y+k$ et développer chacun des coefficients en série ordonnée suivant les puissances de k; on obtiendra ainsi le développement de $\varphi(x+h, y+k)$, et le théorème de Taylor, borné au cas d'une seule variable, permettra d'effectuer tous les calculs. Telle est la marche suivie par Lagrange dans la théorie des fonctions, et dont il déduit aisément l'expression du terme général du développement; mais un artifice imaginé par Cauchy permet de l'obtenir plus rapidement en fournissant en même temps une expression plus simple du reste.

Remplaçons $\varphi(x+h, y+k)$ par $\varphi(x+ht, y+kt)$ et appliquons à cette dernière fonction le théorème de Maclaurin pour la développer suivant les puissances de t; en faisant dans le résultat $t=1$, on obtiendra le développement cherché.

En posant

$$\varphi(x+ht, y+kt)=\mathrm{F}(t),$$

on a (**273**)

$$(1)\quad \varphi(x+ht, y+kt)=\mathrm{F}(0)+\mathrm{F}'(0)t+\mathrm{F}''(0)\frac{t^2}{1.2}+\cdots+\frac{\mathrm{F}^{n-1}(0)}{1.2\ldots n-1}t^{n-1}+\mathrm{F}^n(\theta t)\frac{t^n}{1.2\ldots n}.$$

Pour calculer les termes de ce développement, formons l'expression générale de $\mathrm{F}^p(t)$. On a

$$\mathrm{F}(t)=\varphi(x+ht, y+kt).$$

Or, si l'on attribue à t des accroissements successifs égaux entre eux, $x+ht$ et $y+kt$, considérés comme deux variables distinctes, croîtront aussi par degrés égaux, et la formule donnée (**162**) pour représenter la différentielle $n^{ième}$ d'une fonction de deux variables, sera applicable au calcul de $d^n\mathrm{F}(t)$. Cette formule suppose, en effet, que deux variables quelconques, u et v, reçoivent simultanément des accroissements constants et quelconques du et dv; or, en supposant ici $x+ht=u$,

$y+kt=v$, et prenant $du=hdt$, $dv=kdt$, la différentielle $d^p\varphi(u,v)$ ne différera pas de la différentielle $d^p F(t)$ qui répond à l'accroissement dt de la variable t répété p fois; on a donc (162) symboliquement

$$d^p F(t)=\left(\frac{d\varphi}{du}du+\frac{d\varphi}{dv}dv\right)^p, \tag{2}$$

les produits de la forme

$$\left(\frac{d\varphi}{du}\right)^k\left(\frac{d\varphi}{dv}\right)^{p-k}$$

devant être remplacés après le développement par $\frac{d^p\varphi}{du^k dv^{p-k}}$.

En divisant par dt^p les deux membres de l'équation (2) et ayant égard à ce que, par hypothèse, $du=hdt$, $dv=kdt$, on en déduit

$$\frac{d^p F}{dt^p}=\left(\frac{d\varphi}{du}h+\frac{d\varphi}{dv}k\right)^p, \tag{3}$$

la même convention étant faite, bien entendu, sur la signification des puissances des dérivées.

Lorsque dans les dérivées de la fonction $\varphi(u,v)$ par rapport aux variables u et v, on supposera $t=0$, elles ne différeront pas évidemment des dérivées correspondantes de $\varphi(x,y)$ par rapport à x et à y; on a donc enfin

$$\left(\frac{d^p F}{dt^p}\right)_0=\left(\frac{d\varphi}{dx}h+\frac{d\varphi}{dy}k\right)^p, \tag{4}$$

en entendant toujours qu'après le développement du second membre tout produit tel que $\frac{d^k\varphi}{dx^k}\frac{d^{p-k}\varphi}{dy^{p-k}}$ doit être remplacé par $\frac{d^p\varphi}{dx^k dy^{p-k}}$.

Le facteur $F^n(\theta t)$ qui figure dans le dernier terme de l'équation (1), s'obtiendra aussi à l'aide de la formule (3). Après avoir formé l'expression

$$\left(\frac{d\varphi}{du}h+\frac{d'\varphi}{dv}k\right)^n,$$

et effectué dans le résultat les substitutions qui doivent être faites, on devra remplacer dans chaque dérivée, u par $x+\theta ht$, et v par $y+\theta kt$; on peut donc écrire symboliquement

$$F^n(\theta t)=\left(\frac{d\varphi}{dx}h+\frac{d\varphi}{dy}k\right)^n,$$

x et y devant être remplacés, dans le résultat, par $x+\theta ht$, $y+\theta kt$, qui deviendront $x+\theta h$, $y+\theta k$, lorsqu'on fera $t=1$.

392. D'après les explications précédentes, on a, en faisant $t = 1$ dans la formule (1) du numéro précédent,

$$\varphi(x+h, y+k) = \varphi(x, y) + \left(\frac{d\varphi}{dx}h + \frac{d\varphi}{dy}k\right) + \frac{1}{1.2}\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}h^2 + 2\frac{d^2\varphi}{dx\,dy}hk + \frac{d^2\varphi}{dy^2}k^2\right)$$
$$+ \frac{1}{1.2.3}\left(\frac{d^3\varphi}{dx^3}h^3 + 3\frac{d^3\varphi}{dx^2\,dy}h^2k + 3\frac{d^3\varphi}{dx\,dy^2}hk^2 + \frac{d^3\varphi}{dy^3}k^3\right) + \dots$$
$$+ \frac{1}{1.2.3\dots(n-1)}\left[\frac{d^{n-1}\varphi}{dx^{n-1}}h^{n-1} + (n-1)\frac{d^{n-1}\varphi}{dx^{n-2}\,dy}h^{n-2}k + \dots + \frac{d^{n-1}\varphi}{dy^{n-1}}k^{n-1}\right]$$
$$+ \frac{1}{1.2.3\dots n}\left(\frac{d\varphi}{dx}h + \frac{d\varphi}{dy}k\right)^n_{\substack{x=x+\theta h \\ y=y+\theta k}},$$

le dernier terme étant ce que devient le $(n+1)^{ième}$ terme de la série, lorsque, après l'avoir régulièrement formé, on y remplace x par $x+\theta h$ et y par $y+\theta k$, θ étant un nombre plus petit que l'unité.

Lorsque, pour des valeurs croissantes de n, le dernier terme du second membre tend vers zéro, il est permis de remplacer $\varphi(x+h, y+k)$ par une série convergente indéfinie. On peut remarquer que cela aura toujours lieu si, lorsqu'on remplace x par $x+\theta h$ et y par $y+\theta k$, aucune des dérivées de la fonction ne peut devenir infinie. Si, en effet, toutes les dérivées qui figurent dans l'expression du terme complémentaire sont plus petites en valeur absolue qu'un nombre H, ce terme est évidemment moindre que

$$\frac{H^n}{1.2.3\dots n}(h+k)^n,$$

expression qui tend vers zéro lorsque n augmente indéfiniment.

393. Si, dans le développement que l'on vient de trouver, on remplace h par dx et k par dy, l'ensemble des termes de degré p par rapport à dx et à dy représente $d^p\varphi$, et l'on a

$$\varphi(x+dx, y+dy) = \varphi(x, y) + d\varphi + \frac{1}{2}d^2\varphi + \frac{1}{2.3}d^3\varphi + \dots + \frac{1}{1.2.3\dots n}d^n\varphi + \dots,$$

on voit que l'expression de l'accroissement d'une fonction de deux variables ne diffère pas de celle qui a été trouvée pour l'accroissement d'une fonction d'une seule variable.

Si dx et dy sont infiniment petits du premier ordre, chaque terme de ce développement est infiniment petit par rapport au précédent, et l'erreur commise en s'arrêtant à un terme d'ordre n est infiniment petit d'ordre $n+1$.

394. Si dans le développement de $\varphi(x+h, y+k)$, on suppose x et y égaux tous deux à zéro, on obtiendra le développement d'une fonction quelconque de deux variables, $\varphi(h, k)$ en série ordonnée suivant les puissances des variables h et k, et leurs produits deux à deux. On aura, en remplaçant h et k, qui sont entièrement arbitraires, par x et y,

$$\varphi(x,y)=\varphi(0,0)+x\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)_0+y\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)_0+\frac{1}{1.2}\left[x^2\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right)_0+2xy\left(\frac{d^2\varphi}{dx\,dy}\right)_0+y^2\left(\frac{d^2\varphi}{dy^2}\right)_0\right]+\dots$$

Le terme complémentaire, lorsqu'on s'arrête après le $n^{ième}$ terme, est ce que devient l'expression

$$\frac{1}{1.2.3..n}\left[x^n\frac{d^n\varphi}{dx^n}+nx^{n-1}y\frac{d^n\varphi}{dx^{n-1}dy}+\frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}y^2\frac{d^n\varphi}{dx^{n-2}dy^2}+\dots+y^n\frac{d^n\varphi}{dy^n}\right],$$

quand on y remplace dans les diverses dérivées qui y figurent, x par θx, et y par θy, θ étant un nombre inconnu plus petit que l'unité.

395. L'artifice qui nous a donné les développements précédents, s'étend sans modification au cas où la fonction considérée contient trois ou un plus grand nombre de variables.

Soit $\varphi(x, y, z)$ une fonction de trois variables x, y, z, auxquelles on attribue respectivement les accroissements h, k, l; pour développer $\varphi(x+h, y+k, z+l)$, on considérera d'abord la fonction $\varphi(x+ht, y+kt, z+lt)$ que l'on développera en série ordonnée suivant les puissances de t, et l'on supposera ensuite $t=1$. On trouve ainsi, absolument comme dans le cas de deux variables,

$$\varphi(x+h,y+k,z+l)=\varphi(x,y,z)+\left(h\frac{d\varphi}{dx}+k\frac{d\varphi}{dy}+l\frac{d\varphi}{dz}\right)$$
$$+\frac{1}{1.2}\left(h^2\frac{d^2\varphi}{dx^2}+k^2\frac{d^2\varphi}{dy^2}+l^2\frac{d^2\varphi}{dz^2}+2hk\frac{d^2\varphi}{dx\,dy}+2lh\frac{d^2\varphi}{dx\,dz}+2kl\frac{d^2\varphi}{dy\,dz}\right)+\dots,$$

le terme général pouvant s'écrire symboliquement

$$\frac{1}{1.2.3..n}\left(\frac{d\varphi}{dx}h+\frac{d\varphi}{dy}k+\frac{d\varphi}{dz}l\right)^n,$$

en entendant que, dans le développement de la puissance indiquée, tout produit de la forme

$$\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^p\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^q\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^{n-p-q}$$

sera remplacé par

$$\frac{d^n\varphi}{dx^p\,dy^q\,dz^{n-p-q}},$$

et le terme complémentaire étant le terme auquel on s'arrête dans le dévelop-

pement indéfini, dans lequel x, y, z sont remplacés par $x + \theta h$, $y + \theta k$, $z + \theta l$, θ étant moindre que l'unité.

Si l'on pose $h = dx$, $k = dy$, $l = dz$, on aura, comme dans le cas de deux variables,

$$\varphi(x+dx, y+dy, z+dz) = \varphi(x,y,z) + d\varphi + \frac{1}{2}d^2\varphi + \frac{1}{6}d^3\varphi + \ldots + \frac{1}{1.2\ 3\ldots n}d^n\varphi + \ldots.$$

Si dx, dy, dz, sont infiniment petits du premier ordre, chaque terme de ce développement est infiniment petit par rapport au précédent, et l'erreur commise en s'arrêtant à un terme d'ordre n est infiniment petite d'ordre $n+1$.

Expression symbolique du théorème de Taylor.

396. Le développement de la fonction

$$\varphi(x+h, y+k)$$

peut se représenter symboliquement sous la forme très-simple

$$e^{\left(h\frac{d}{dx} + k\frac{d}{dy}\right)}\varphi(x,y),$$

en entendant que l'exponentielle $e^{h\frac{d}{dx} + k\frac{d}{dy}}$ sera développée en série comme si l'exposant avait une valeur déterminée, et que, dans les différents termes qui résulteront de la multiplication par φ, un produit tel que

$$h^p\left(\frac{d}{dx}\right)^p k^q\left(\frac{d}{dy}\right)^q\varphi$$

sera remplacé par

$$h^p k^q \frac{d^{p+q}\varphi}{dx^p dy^q}.$$

Si l'on pose $h = \Delta x$ et $k = \Delta y$, et que $\Delta\varphi$ désigne l'accroissement correspondant de φ, on aura symboliquement

$$\Delta\varphi = \left[e^{\left(\Delta x\frac{d}{dx} + \Delta y\frac{d}{dy}\right)} - 1\right]\varphi,$$

et l'on en conclura

$$\Delta^n\varphi = \left(e^{\Delta x\frac{d}{dx} + \Delta y\frac{d}{dy}} - 1\right)^n.$$

Cette formule a été donnée par Laplace ; elle est entièrement analogue à celle de Lagrange qui a été donnée (**343**).

Extension de la formule de Lagrange aux fonctions de deux variables.

397. Soient u et v deux fonctions des variables x et y, définies par les équations simultanées

$$\begin{aligned} u &= a + x\varphi(u, v), \\ v &= b + y\psi(u, v). \end{aligned} \tag{1}$$

Proposons-nous de développer une fonction donnée de u et de v en série ordonnée suivant les puissances de x et de y, et leurs produits deux à deux.

Soit $z = \mathrm{F}(u, v)$ la fonction donnée, on a (392)

$$z = z_0 + \left[x\left(\frac{dz}{dx}\right)_0 + y\left(\frac{dz}{dy}\right)_0\right] + \frac{1}{1.2}\left[x^2\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)_0 + 2xy\left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right)_0 + y^2\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)_0\right] + \ldots$$
$$+ \frac{1}{1.2.3\ldots n}\left[x^n\left(\frac{d^nz}{dx^n}\right)_0 + nx^{n-1}y\,\frac{d^nz}{dx^{n-1}dy} + \ldots + y^n\left(\frac{d^nz}{dy^n}\right)_0\right] + \ldots,$$

et pour connaître la série qui représente z, il faut calculer les valeurs que prennent les diverses dérivées de z par rapport aux variables x et y, lorsqu'on y suppose x et y égaux à zéro. Pour cela nous ferons usage d'un artifice semblable à celui qui a été employé (311) dans le cas d'une fonction d'une seule variable, et qui consistera ici à exprimer les dérivées par rapport à x et à y en fonction de dérivés par rapport aux variables a et b, dans lesquelles les hypothèses $x = 0, y = 0$ pourront être introduites avant les opérations et reviendront simplement, comme le montrent les équations (1), à faire $u = a$ et $v = b$, en sorte que les différentiations s'effectueront ensuite sur des fonctions explicites.

En différentiant les équations (1) par rapport à x, puis par rapport à a, on a

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= \varphi(u, v) + x\left(\frac{d\varphi}{du}\frac{du}{dx} + \frac{d\varphi}{dv}\frac{dv}{dx}\right), \\ \frac{dv}{dx} &= y\left(\frac{d\psi}{du}\frac{du}{dx} + \frac{d\psi}{dv}\frac{dv}{dx}\right), \\ \frac{du}{da} &= 1 + x\left(\frac{d\varphi}{du}\frac{du}{da} + \frac{d\varphi}{dv}\frac{dv}{da}\right), \\ \frac{dv}{da} &= y\left(\frac{d\psi}{du}\frac{du}{da} + \frac{d\psi}{dv}\frac{dv}{da}\right), \end{aligned}$$

et la forme de ces équations montre, sans qu'il soit nécessaire de les résoudre, que l'on a entre les dérivées $\frac{du}{dx}, \frac{du}{da}, \frac{dv}{dx}, \frac{dv}{da}$, les relations

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= \varphi(u, v)\,\frac{du}{da}, \\ \frac{dv}{dx} &= \varphi(u, v)\,\frac{dv}{da}. \end{aligned} \tag{2}$$

Si donc z désigne une fonction quelconque de u et de v, on a

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{du}\frac{du}{dx} + \frac{dz}{dv}\frac{dv}{dx},$$
$$\frac{dz}{da} = \frac{dz}{du}\frac{du}{da} + \frac{dz}{dv}\frac{dv}{da},$$

et, par conséquent,

$$\frac{dz}{dx} = \varphi(u, v)\frac{dz}{da}. \tag{3}$$

On démontrera de même la relation

$$\frac{dz}{dy} = \psi(u, v)\frac{dz}{db}. \tag{4}$$

Les équations (3) et (4) résolvent, pour les dérivées du premier ordre, le problème que nous avons énoncé; elles font connaître l'expression des dérivées par rapport à x et à y en fonction des dérivées par rapport à a et à b; si l'on y suppose $x=0$, $y=0$, elles donnent, en supposant $z = F(u, v)$,

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)_0 = \varphi(a, b)\frac{dF(a, b)}{da},$$
$$\left(\frac{dz}{dy}\right)_0 = \psi(a, b)\frac{dF(a, b)}{db}.$$

Pour calculer les dérivées d'ordre supérieur, nous ferons usage des relations

$$\frac{d}{dx}\left[f(u, v)\cdot\frac{du}{da}\right] = \frac{d}{da}\left[f(u, v)\frac{du}{dx}\right],$$
$$\frac{d}{dy}\left[f(u, v)\frac{du}{db}\right] = \frac{d}{db}\left[f(u, v)\frac{du}{dy}\right], \tag{5}$$

qui ont lieu quelle que soit la fonction $f(u, v)$. En effectuant, en effet, les différentiations indiquées dans la première de ces équations, elle devient

$$\left(\frac{df}{du}\frac{du}{dx} + \frac{df}{dv}\frac{dv}{dx}\right)\frac{du}{da} + f(u, v)\frac{d^2u}{da\,dx} = \left(\frac{df}{du}\frac{du}{da} + \frac{df}{dv}\frac{dv}{da}\right)\frac{du}{dx} + f(u, v)\frac{d^2u}{dx\,da},$$

ce qui, en supprimant les termes communs, se réduit à

$$\frac{dv}{dx}\frac{du}{da} = \frac{du}{dx}\frac{dv}{da},$$

conséquence évidente des équations (2).

La seconde des équations (5) se vérifie de la même manière.

Nous pouvons maintenant transformer les dérivées de la forme $\frac{d^n z}{dx^n}$, $\frac{d^n z}{dy^n}$. On a

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left[\varphi(u, v)\frac{dz}{da}\right],$$

et par conséquent, d'après la formule (5),

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{d}{da}\left[\varphi(u, v)\frac{dz}{dx}\right] = \frac{d}{da}\left[\varphi(u, v)^2\frac{dz}{da}\right].$$

On en déduit

$$\frac{d^3 z}{dx^3} = \frac{d}{dx}\frac{d}{da}\left[\varphi(u, v)^2\frac{dz}{da}\right] = \frac{d}{da}\cdot\frac{d}{dx}\left[\varphi(u, v)^2\frac{dz}{da}\right] = \frac{d^2}{da^2}\left[\varphi(u, v)^2\frac{dz}{dx}\right] = \frac{d^2}{da^2}\left[\varphi(u, v)^3\frac{dz}{da}\right],$$

et l'on trouvera, en suivant la même marche,

$$\frac{d^n z}{dx^n} = \frac{d^{n-1}}{da^{n-1}}\left[\varphi(u, v)^n\frac{dz}{da}\right]; \tag{6}$$

on aura de même

$$\frac{d^n z}{dy^n} = \frac{d^{n-1}}{db^{n-1}}\left[\psi(u, v)^n\frac{dz}{db}\right]. \tag{7}$$

Si dans ces formules on fait $x = 0$, $y = 0$, elles deviennent, en supposant toujours $z = F(u, v)$,

$$\left(\frac{d^n z}{dx^n}\right)_0 = \frac{d^{n-1}}{da^{n-1}}\left[\varphi(a, b)^n\frac{dF(a, b)}{da}\right],$$

$$\left(\frac{d^n z}{dy^n}\right)_0 = \frac{d^{n-1}}{db^{n-1}}\left[\psi(a, b)^n\frac{dF(a, b)}{db}\right]. \tag{8}$$

Il reste à calculer les dérivées de la forme $\left(\frac{d^n z}{dx^p\, dy^q}\right)$.

On a

$$\frac{d^2 z}{dx\, dy} = \frac{d}{dy}\left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{d}{dy}\left[\varphi(u, v)\frac{dz}{da}\right] = \frac{d\varphi(u, v)}{dy}\frac{dz}{da} + \varphi(u, v)\frac{d^2 z}{da\, dy}$$

$$= \frac{d\varphi(u, v)}{db}\frac{dz}{da}\psi(u, v) + \varphi(u, v)\frac{d}{da}\left[\psi(u, v)\frac{dz}{db}\right],$$

par conséquent,

$$\frac{d^2 z}{dx\, dy} = \psi(u, v)\frac{d\varphi(u, v)}{db}\frac{dz}{da} + \varphi(u, v)\frac{d\psi(u, v)}{da}\frac{dz}{db} + \varphi(u, v)\psi(u, v)\frac{d^2 z}{da\, db}. \tag{9}$$

$\frac{d^2z}{dx\,dy}$ se trouve ainsi exprimé en fonction de dérivées prises par rapport à a et à b, et pour y supposer $x=0, y=0$, il suffit de remplacer, avant les différentiations, u par a, et v par b.

Considérons actuellement la dérivée $\frac{d^nz}{dx^p\,dy^q}$. On a trouvé

$$\frac{d^pz}{dx^p}=\frac{d^{p-1}}{da^{p-1}}\left[\varphi(u,v)^p\frac{dz}{da}\right].$$

Il faut prendre q fois la dérivée de cette expression par rapport à y. Or si l'on pose

$$u_1=a+x[\varphi(u_1,v_1)]^p,$$
$$v_1=b+y\psi(u_1,v_1),$$

et $z_1=F(u_1,v_1)$, on aura, d'après ce qui précède,

$$\frac{dz_1}{dx}=\varphi(u_1,v_1)^p\cdot\frac{dz_1}{da},$$

et comme, pour $x=0$, u_1 et v_1 deviennent, quel que soit y, égaux à u et à v et par suite z_1 à z, on a

$$\left(\frac{d^pz}{dx^p}\right)_0=\frac{d^{p-1}}{da^{p-1}}\left[\left(\frac{dz_1}{dx}\right)_0\right], \tag{10}$$

l'indice zéro qui affecte les dérivées $\frac{dz_1}{dx_1}$, $\frac{d^pz}{dx^p}$, se rapportant à la variable x que l'on suppose égale à zéro. Les variables x et y étant indépendantes, il est indifférent de faire l'hypothèse $x=0$ avant ou après la différentiation par rapport à y, et pour calculer $\left(\frac{d^nz}{dx^p\,dy^q}\right)_0$; nous pouvons par conséquent différentier q fois l'expression (10) par rapport à y, et faire ensuite $y=0$. On a donc

$$\left(\frac{d^nz}{dx^p\,dy^q}\right)_0=\frac{d^{p-1}}{da^{p-1}}\frac{d^q}{dy^q}\left[\left(\frac{dz_1}{dx}\right)_0\right].$$

Les différentiations par rapport à x et à y indiquées dans le second membre peuvent être interverties, pourvu que l'hypothèse $x=0$ ne soit introduite que dans le résultat final. Pour calculer en effet $\frac{d^{q+1}z_1}{dx\,dy^q}$ et y faire ensuite $x=0$, $y=0$, il est permis, comme on vient de le remarquer, de différentier par rapport à x et de faire $x=0$ avant d'effectuer les différentiations par rapport à y. On a donc

$$\left(\frac{d^nz}{dx^p\,dy^q}\right)_0=\frac{d^{p-1}}{da^{p-1}}\frac{d}{dx}\left(\frac{d^qz_1}{dy^q}\right),$$

x et y devant être supposés nuls dans le second membre après les opérations effectuées.

En appliquant à la fonction z_1 les résultats généraux obtenus pour la fonction z, on a

$$\frac{d^q z_1}{dy^q} = \frac{d^{q-1}}{db^{q-1}}\left[\psi(u_1, v_1)^q \frac{dz_1}{db}\right]. \tag{11}$$

Au lieu de différentier cette expression par rapport à x et de faire dans le résultat $x=0, y=0$, il est évidemment permis d'y supposer $y=0$ avant d'effectuer la différentiation; mais si l'on pose

$$\begin{aligned} u_2 &= a + x\varphi(u_2, v_2)^p, \\ v_2 &= b + y\psi(u_2, v_2)^q, \\ z_2 &= \mathrm{F}(u_2, v_2). \end{aligned} \tag{12}$$

u_2 et v_2 se confondant avec u_1 et v_1 quand on suppose $y=0$, le produit

$$\psi(u_1, v_1)^q \frac{dz_1}{db},$$

lorsqu'on y suppose $y=0$, peut être remplacé par $\frac{dz_2}{dy}$, et l'on a enfin

$$\left(\frac{d^n z}{dx^p dy^q}\right)_0 = \frac{d^{p-1}}{da^{p-1}} \frac{d}{dx} \frac{d^{q-1}}{db^{q-1}} \left(\frac{dz_2}{dy}\right) = \frac{d^{p+q-2}}{da^{p-1} db^{q-1}} \left(\frac{d^2 z_2}{dx\, dy}\right),$$

z_2 étant ce qui devient z lorsque u et v sont remplacés par les valeurs u_2 et v_2 définies par les équations (12). Ces équations étant de même forme que la proposée, $\frac{d^2 z_2}{dx\, dy}$ se déduira de la formule (9), dans laquelle $\varphi(u, v)$ et $\psi(u, v)$ seront respectivement remplacés par $\varphi(u, v)^p$, $\psi(u, v)^q$.

Démonstration de Jacobi.

398. Le résultat précédent obtenu pour la première fois par Laplace a été démontré par Jacobi par des considérations analogues à celles qui ont été exposées (**314**).

La démonstration de Jacobi repose sur l'identification de deux développements d'une même fonction. Cette identification, ainsi qu'on l'a déjà dit, n'est pas permise sans restriction et suppose des conditions à l'examen desquelles l'illustre auteur ne s'est pas appliqué. La démonstration que nous allons faire connaître laisse donc, malgré sa grande élégance, beaucoup à désirer du côté de la rigueur.

Jacobi remarque d'abord que $f(x, y)$ et $\varphi(x, y)$ étant deux fonctions de x et de y

développables suivant les puissances positives ou négatives des variables, l'expression

$$\frac{df}{dx}\frac{d\varphi}{dy}-\frac{df}{dy}\frac{d\varphi}{dx}, \tag{1}$$

qu'il a nommée (**71**) le déterminant du système des deux fonctions, ne contient jamais dans son développement de terme en $\frac{1}{xy}$. On a, en effet,

$$\frac{df}{dx}\frac{d\varphi}{dy}-\frac{df}{dy}\frac{d\varphi}{dx}=\frac{d}{dy}\left(\varphi\frac{df}{dx}\right)-\frac{d}{dx}\left(\varphi\frac{df}{dy}\right).$$

Le développement du premier terme du second membre ne contient pas (**314**) de terme en $\frac{1}{y}$, celui du second terme ne contient pas de terme en $\frac{1}{x}$; aucun des deux ne contient donc de terme en $\frac{1}{xy}$, et il en est par conséquent de même de leur différence.

L'expression

$$\frac{\dfrac{df}{dx}\dfrac{d\varphi}{dy}-\dfrac{df}{dy}\dfrac{d\varphi}{dx}}{\varphi^{p+1}f^{q+1}} \tag{2}$$

partage la même propriété, quels que soient les nombres p et q, pourvu que l'un des deux au moins diffère de zéro.

Si l'on pose en effet

$$-\frac{1}{p\varphi^{p}}=\varphi_1,$$

$$-\frac{1}{qf^{q}}=f_1,$$

l'expression (2) est égale à

$$\frac{df_1}{dx}\frac{d\varphi_1}{dy}-\frac{df_1}{dy}\frac{d\varphi_1}{dx},$$

et le théorème lui est évidemment applicable.

Lorsque $q=0$, la démonstration doit être modifiée, mais la conclusion subsiste. On a en effet

$$\frac{1}{f\varphi^{p+1}}\left(\frac{df}{dx}\frac{d\varphi}{dy}-\frac{df}{dy}\frac{d\varphi}{dx}\right)=-\frac{1}{p}\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{\varphi^{p}}\frac{\dfrac{df}{dx}}{f}\right)+\frac{1}{p}\frac{d}{dx}\left(\frac{\dfrac{df}{dy}}{f}\frac{1}{\varphi^{p}}\right). \tag{3}$$

Or $\dfrac{\dfrac{df}{dx}}{f}$ et $\dfrac{\dfrac{df}{dy}}{f}$ peuvent se développer en séries ordonnées suivant les puissances des variables.

Si l'on pose en effet

$$f = A_1 y^{\mu_1} x^{\nu_1} + A_2 y^{\mu_2} x^{\nu_2} + \ldots + A_n y^{\mu_n} x^{\nu_n} + \ldots,$$

on en déduira

$$1.f = 1.A_1 y^{\mu_1} x^{\nu_1} + 1.\left(1 + \frac{A_2}{A_1} y^{\mu_2-\mu_1} x^{\nu_2-\nu_1} + \ldots\right).$$

Le second terme étant de la forme $1.(1+u)$ est développable en série ordonnée suivant les puissances de u, et par conséquent suivant celles de x et de y; le premier n'est pas développable, mais il a pour dérivée par rapport à x, $\frac{\nu_1}{x}$, et par rapport à y, $\frac{\mu_1}{y}$, en sorte que $\frac{d1.f}{dx}$ et $\frac{d1.f}{dy}$, c'est-à-dire $\frac{\frac{df}{dx}}{f}$, $\frac{\frac{df}{dy}}{f}$, sont l'un et l'autre développables en séries ordonnées suivant les puissances de x et de y. Il en est donc de même des produits $\frac{1}{\varphi^p}\frac{\frac{df}{dx}}{f}$, $\frac{1}{\varphi^p}\frac{\frac{df}{dy}}{f}$, et les dérivées de ces produits ne peuvent pas, par conséquent, contenir de termes en $\frac{1}{xy}$.

Lorsque p est nul en même temps que q, la démonstration est de nouveau en défaut, et cette fois la conclusion cesse d'être exacte. Le développement de l'expression

$$\frac{\frac{d\varphi}{dx}\frac{df}{dy} - \frac{d\varphi}{dy}\frac{df}{dx}}{f\varphi} \tag{4}$$

contient en général un terme en $\frac{1}{xy}$. On a en effet

$$\frac{\frac{d\varphi}{dx}\frac{df}{dy} - \frac{d\varphi}{dy}\frac{df}{dx}}{f\varphi} = \frac{d1.\varphi}{dx}\frac{d1.f}{dy} - \frac{d1.\varphi}{dy}\frac{d1.f}{dx}.$$

Soit

$$\begin{aligned} \varphi(x,y) &= A_1 x^{\mu_1} y^{\nu_1} + A_2 x^{\mu_2} y^{\nu_1} + \ldots, \\ f(x,y) &= B_1 x^{m_1} y^{n_1} + B_2 x^{m_2} y^{n_2} + \ldots; \end{aligned} \tag{5}$$

on en déduit

$$\begin{aligned} 1.\varphi(x,y) &= 1.A_1 x^{\mu_1} y^{\nu_1} + 1.\left(1 + \frac{A_2}{A_1} x^{\mu_2-\mu_1} y^{\nu_2-\nu_1} + \ldots\right), \\ 1.f(x,y) &= 1.B_1 x^{m_1} y^{n_1} + 1.\left(1 + \frac{B_2}{B_1} x^{m_2-m_1} y^{n_2-n_1} + \ldots\right). \end{aligned} \tag{6}$$

Si l'on développe en série les seconds termes de chacun des seconds membres,

et qu'on prenne les dérivées par rapport à x et par rapport à y, on déduit des équations précédentes :

$$\frac{d\,\mathrm{l}.\varphi(x,y)}{dx} = \frac{\mu_1}{x} + \mathrm{P},$$
$$\frac{d\,\mathrm{l}.\varphi(x,y)}{dy} = \frac{\nu_1}{y} + \mathrm{Q},$$
$$\frac{d\,\mathrm{l}.f(x,y)}{dx} = \frac{m_1}{x} + \mathrm{R},$$
$$\frac{d\,\mathrm{l}.f(x,y)}{dy} = \frac{n_1}{y} + \mathrm{S},$$

aucun terme en $\frac{1}{x}$ ne se trouvant dans les séries désignées par P et R, et aucun terme en $\frac{1}{y}$ dans les séries Q et S. D'après ces formules, le développement de l'expression (4) contient évidemment un terme en $\frac{1}{xy}$ qui a pour coefficient

$$\mu_1 n_1 - \nu_1 m_1.$$

On doit remarquer que, d'après le procédé même indiqué pour obtenir le développement, une même fonction peut donner lieu à des séries différentes, car μ_1, ν_1, m_1, n_1, désignent ici les exposants de x et de y dans les premiers termes des séries (5), c'est-à-dire évidemment dans deux termes quelconques que l'on aura choisis pour les écrire les premiers. Mais si l'on veut que les séries soient convergentes pour de très-petites valeurs de x et de y, le choix devient forcé, et la condition est souvent même impossible à remplir. Si, lorsque x est infiniment petit, $\varphi(x,y)$ peut être considéré comme proportionnel à x, et $f(x,y)$ à y, on devra prendre $\mu_1 = 1$, $\nu_1 = 0$, $m_1 = 0$, $n_1 = 1$, et le coefficient de $\frac{1}{xy}$ sera l'unité : c'est la supposition que nous ferons dans les raisonnements qui vont suivre; mais on voit ici combien le raisonnement de Jacobi laisse à désirer du côté de la rigueur.

399. Reprenons actuellement les deux équations

$$(1)\qquad \begin{aligned} u &= a + x\varphi(u,v), \\ v &= b + y\psi(u,v). \end{aligned}$$

Cherchons à développer une fonction $\mathrm{F}(u,v)$ que nous représenterons par z, en série ordonnée suivant les puissances de x et de y. Posons, pour plus de simplicité,

$$u - a = u_1,$$
$$v - b = v_1;$$

les facteurs φ et ψ deviendront des fonctions données de u_1 et de v_1, et l'on pourra, en supprimant les indices, remplacer les équations proposées par

$$(2)\qquad \begin{aligned} u &= x\varphi(u,v),\\ v &= y\psi(u,v), \end{aligned}$$

φ et ψ désignant toujours des fonctions données de u et de v.

Soit

$$(3)\qquad z = \Sigma A_n^m x^m y^n$$

le développement de la fonction z. Pour déterminer le coefficient A_n^m, multiplions l'équation (3) par

$$\frac{\frac{dx}{du}\frac{dy}{dv} - \frac{dx}{dv}\frac{dy}{du}}{x^{m+1}y^{n+1}}.$$

Si l'on développe ensuite les deux membres en série ordonnée suivant les puissances de u et de v, x étant ici proportionnel à u, et y à v, pour de petites valeurs de u et de v, le seul terme en $\frac{1}{uv}$ dans le second membre proviendra, d'après ce qui précède, du terme en $x^m y^n$, et aura pour coefficient A_m^n; A_m^n est par conséquent le coefficient du terme en $\frac{1}{uv}$ dans le développement du premier membre

$$z\,\frac{\frac{dx}{du}\frac{dy}{dv} - \frac{dx}{dv}\frac{dy}{du}}{x^{m+1}y^{n+1}},$$

expression que l'on peut écrire de la manière suivante :

$$(4)\qquad \begin{aligned} &\frac{1}{mn}z\left[\frac{dx^{-m}}{du}\frac{dy^{-n}}{dv} - \frac{dx^{-m}}{dv}\frac{dy^{-n}}{du}\right] = \frac{1}{mn}\left[\frac{dx^{-m}}{du}\frac{d}{dv}(zy^{-n}) - \frac{dx^{-m}}{dv}\frac{d(zy^{-n})}{du}\right.\\ &\left. - \frac{d}{du}\left(x^{-m}y^{-n}\frac{dz}{dv}\right) + x^{-m}y^{-n}\frac{d^2z}{du\,dv} + x^{-m}\frac{dy^{-n}}{du}\frac{dz}{dv} + y^{-n}\frac{dx^{-m}}{dv}\frac{dz}{du}\right]. \end{aligned}$$

Or les termes

$$\frac{dx^{-m}}{du}\frac{d}{dv}(zy^{-n}) - \frac{dx^{-m}}{dv}\cdot\frac{d}{du}(zy^{-n}),\quad \frac{d}{du}\left(x^{-m}y^{-n}\frac{dz}{dv}\right),$$

ne donnant pas (398) de terme en $\frac{1}{uv}$, l'expression (4) peut être remplacée par

$$\frac{1}{mn}\left(x^{-m}y^{-n}\frac{d^2z}{du\,dv} + x^{-m}\frac{dy^{-n}}{du}\frac{dz}{dv} + y^{-n}\frac{dx^{-m}}{dv}\frac{dz}{du}\right),$$

dans le développement de laquelle le coefficient de $\frac{1}{uv}$ sera égal à A_n^m. En rempla-

çant x et y, $\frac{dy}{du}$, $\frac{dx}{dv}$ par leurs valeurs déduites des équations (2), cette expression devient

$$\frac{\left(\frac{1}{mn}\varphi^m\psi^n\frac{d^2z}{du\,dv}+\frac{1}{m}\varphi^m\psi^{n-1}\frac{d\psi}{du}\frac{dz}{dv}+\frac{1}{n}\psi^n\varphi^{m-1}\frac{d\varphi}{du}\frac{dz}{dv}\right)}{u^m v^n}.$$

Le coefficient de $\frac{1}{uv}$ est évidemment celui de $u^{m-1}v^{n-1}$ dans le développement du numérateur, c'est-à-dire, d'après la formule de Taylor,

$$\frac{d^{m+n-2}\left(\frac{1}{mn}\varphi^n\psi^n\frac{d^2z}{du\,dv}+\frac{1}{m}\varphi^m\psi^{n-1}\frac{d\psi}{du}\frac{dz}{dv}+\frac{1}{n}\psi^n\varphi^{m-1}\frac{d\varphi}{du}\frac{dz}{dv}\right)}{1.2.3\ldots\mu-1.1.2\,3\ldots n-1.du^{m-1}\,dv^{n-1}}.$$

Dans cette expression, il faut remplacer u et v par zéro, ce qui revient, en adoptant la notation primitive, à faire $u=a$, $v=b$; on reconnaît aisément son identité avec la formule de Laplace.

CHAPITRE VI.

DÉVELOPPEMENTS EN PRODUITS D'UN NOMBRE INFINI DE FACTEURS.

Condition de convergence des produits infinis.

400. Un produit composé d'un nombre infini de facteurs ne peut évidemment être convergent que si les facteurs tendent vers l'unité lorsque leur rang augmente indéfiniment. Lorsqu'il en est autrement, l'adjonction de chaque facteur nouveau change d'une quantité finie le résultat de la multiplication des facteurs qui précèdent et il ne peut pas y avoir de limite déterminée.

Nous considérerons donc seulement les produits de la forme

$$(1) \qquad P=(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)(1+\alpha_3)\dots(1+\alpha_n)\dots,$$

dans lesquels α_n, réel ou imaginaire, tend vers zéro lorsque n augmente.

Supposons, en premier lieu, que tous les facteurs considérés soient réels, et que, de plus, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ étant tous de même signe, les facteurs du produit soient tous plus grands ou tous plus petits que l'unité. La condition nécessaire et suffisante pour que le produit ne croisse pas indéfiniment dans le premier cas et ne tende pas vers zéro dans le second est que la série

$$\alpha_1+\alpha_2\dots+\alpha_n+\dots$$

soit convergente.

Posons en effet

$$(2) \qquad P_n=(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\dots(1+\alpha_n);$$

pour que le produit P soit convergent, il faut et il suffit évidemment que, n étant très-grand, il diffère fort peu de P_n, et que, par conséquent, le produit des facteurs qui suivent $(1+\alpha_n)$ diffère très-peu de l'unité ou, ce qui revient au même, que la somme de leurs logarithmes

$$l(1+\alpha_{n+1})+l(1+\alpha_{n+2})+\dots+l(1+\alpha_{n+p})$$

soit infiniment petite quelque grand que soit p.

Or, en désignant par k un nombre très-petit, positif ou négatif, on a

$$l(1+k)=k-\frac{\varepsilon k^2}{2},$$

ε étant moindre que l'unité, mais en différant infiniment peu lorsque k est infiniment petit, on en conclut

$$l(1+\alpha_{n+1})+l(1+\alpha_{n+2})+\ldots+l(1+\alpha_{n+p})=\alpha_{n+1}+\alpha_{n+2}+\ldots+\alpha_{n+p}$$

(3)

$$-\frac{1}{2}\left(\varepsilon_1\alpha_{n+1}^2+\varepsilon_2\alpha_{n+2}^2+\ldots+\varepsilon_p\alpha_{n+p}^2\right).$$

Si la série

$$\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n+\ldots$$

est convergente, la première partie du second membre est infiniment petite lorsque n est infiniment grand; il en est à fortiori de même de la seconde partie, composée de termes infiniment plus petits, multipliés par des facteurs moindres que l'unité. Le premier membre de l'équation (3) est donc lui-même infiniment petit et le produit P est par conséquent convergent.

Si au contraire la série

$$\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n+\ldots$$

est divergente, la première partie du second membre de l'équation (3) augmente indéfiniment avec p, et la seconde partie, qu'elle reste ou non finie, est pour des valeurs croissantes de n, infiniment petite par rapport à la première. Le premier membre de l'équation (3) augmente donc indéfiniment en valeur absolue, et le produit dont il est le logarithme augmente sans limite ou s'approche indéfiniment de zéro. Le produit P augmente donc lui-même indéfiniment ou s'approche indéfiniment de zéro, et ne doit pas être considéré comme convergent.

401. La démonstration précédente permet d'énoncer un théorème plus général qui en est évidemment la conséquence: quels que soient les nombres réels α_1, $\alpha_2\ldots$, α_n, le produit

$$(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\ldots(1+\alpha_n)\ldots$$

est convergent lorsque les deux séries

$$\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n+\ldots,$$
$$\alpha_1^2+\alpha_2^2+\ldots+\alpha_n^2+\ldots,$$

sont l'une et l'autre convergentes.

Le produit tend vers zéro lorsque, la première des séries étant convergente, la seconde est divergente.

Ce dernier cas ne pouvant évidemment jamais se présenter lorsque α_1, $\alpha_2,\ldots$, α_n sont tous de mêmes signes.

Considérons, par exemple, le produit

$$\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{4}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\right)\cdots,$$

les seconds termes des binômes forment une série convergente, mais leurs carrés forment une série divergente. Le produit a donc zéro pour limite. La première règle conduit à la même conclusion.

Si l'on pose en effet

$$(1-\alpha_n)=\left(1-\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\right),$$

on a

$$\alpha_n=\frac{1}{\sqrt{2n}}-\frac{1}{\sqrt{2n+1}}+\frac{1}{\sqrt{2n(2n+1}}=\frac{1}{\sqrt{2n}\cdot\sqrt{2n+1}\,(\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n})}+\frac{1}{\sqrt{2n}\cdot\sqrt{2n+1}},$$

et il est aisé de voir que la série dont α_n est le terme général est divergente.

402. Dans le plus grand nombre des cas, les théorèmes précédents permettent de prononcer sur la convergence d'un produit en la rattachant à celle d'une série dont l'étude directe est plus facile. Quelquefois cependant la convergence ou la divergence d'un produit est évidente à priori et permet de prononcer sur la série correspondante. Soit, par exemple,

$$P=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots.$$

Le produit des $n-1$ premiers facteurs est

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{n-1}{n}=\frac{1}{n},$$

P a donc pour limite zéro, et par conséquent la série

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots$$

est divergente, conformément à ce qui a été dit (**228**).

403. La convergence d'un produit dont les facteurs sont imaginaires exige que la partie réelle des facteurs s'approche de l'unité et que le coefficient de $\sqrt{-1}$ tende vers zéro. Relativement à la convergence des produits de ce genre, nous nous bornerons à démontrer le théorème suivant.

Le produit

$$(1)\qquad (1+u_1)(1+u_2)\ldots(1+u_n)\ldots$$

tend vers une limite finie toutes les fois que la série qui a pour terme général le module de u_n, est convergente.

Soit, en effet,

$$u_n = a_n + b_n\sqrt{-1};$$

chacun des deux nombres réels a_n et b_n est moindre en valeur absolue que le module de u_n; il résulte, par conséquent, de notre hypothèse, que les valeurs absolues de a_n, ainsi que celles de b_n, forment des séries convergentes.

Cela posé, nous démontrerons d'abord que le module du produit (1) ne peut ni tendre vers zéro, ni augmenter indéfiniment.

On a

$$1 + u_n = 1 + a_n + b_n\sqrt{-1};$$

le module de ce facteur est

$$\sqrt{(1+a_n)^2 + b_n^2} = 1 + a_n + \varepsilon b_n,$$

ε ayant pour valeur approchée $\frac{b_n}{2}$ et tendant par conséquent vers zéro lorsque n augmente. Le module du produit des facteurs qui suivent le $n^{ième}$ est donc

$$(2) \qquad (1 + a_{n+1} + \varepsilon_1 b_{n+1})(1 + a_{n+2} + \varepsilon_2 b_{n+2})\ldots(1 + a_{n+p} + \varepsilon_p b_{n+p});$$

les séries dont les termes généraux sont a_n et b_n, étant convergentes indépendamment des signes de leurs termes, le théorème (400) prouve que le produit (2) tendrait vers une limite finie, si l'on y remplaçait $a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots, b_{n+1}, b_{n+2}, \ldots$, par leurs valeurs absolues prises toutes avec le même signe, positif ou négatif; il ne peut donc ni tendre vers zéro ni augmenter indéfiniment.

Posons maintenant

$$(1 + u_1)(1 + u_2)\ldots(1 + u_n) = p_n + q_n\sqrt{-1}$$

nous aurons

$$p_{n+1} + q_{n+1}\sqrt{-1} = (1 + u_{n+1})(p_n + q_n\sqrt{-1}) = (1 + a_{n+1} + b_{n+1}\sqrt{-1})(p_n + q_n\sqrt{-1}).$$

On en conclut, en égalant les parties réelles et les parties imaginaires des deux membres,

$$(3) \qquad \begin{aligned} p_{n+1} &= p_n - b_{n+1}q_n + p_n a_{n+1}, \\ q_{n+1} &= q_n + a_{n+1}q_n + b_{n+1}p_n, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$(4) \qquad \begin{aligned} p_{n+1} - p_n &= p_n a_{n+1} - q_n b_{n+1}, \\ q_{n+1} - q_n &= q_n a_{n+1} + p_n b_{n+1}. \end{aligned}$$

En remplaçant successivement dans ces équations n par $n + 1$, $n + 2, \ldots, n + r$, et ajoutant entre elles, membre à membre, celles qui proviennent de la première et

celles qui proviennent de la seconde, on trouve

$$(5)\quad \begin{cases} p_{n+r}-p_n = p_n a_{n+1}+p_{n+1}a_{n+2}+\ldots+p_{n+r-1}a_{n+r}-q_n b_{n+1}-q_{n+1}b_{n+2}-\ldots-q_{n+r-1}b_{n+r}, \\ q_{n+r}-q_n = q_n a_{n+1}+q_{n+1}a_{n+2}+\ldots+q_{n+r-1}a_{n+r}+p_n b_{n+1}+p_{n+1}b_{n+2}+\ldots+p_{n+r-1}b_{n+r}. \end{cases}$$

Le module de $p_n+q_n\sqrt{-1}$ ne grandissant pas indéfiniment, p_n et q_n restent l'un et l'autre inférieurs à une certaine limite, et par conséquent la convergence des séries dont les termes généraux sont les valeurs absolues de a_n et de b_n, prouve que les seconds membres des équations (5) sont l'un et l'autre infiniment petits, quel que soit r, lorsque n est infiniment grand; p_n et q_n tendent donc vers des limites déterminées, et, comme nous l'avions annoncé, le produit est convergent.

Par exemple, le produit

$$(6)\quad \left(1-\frac{1}{a+b}\right)\left(1-\frac{1}{a-b}\right)\left(1-\frac{1}{a+2b}\right)\left(1-\frac{1}{a-2b}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{a+nb}\right)\left(1-\frac{1}{a-nb}\right)\cdots$$

est convergent, quelles que soient les valeurs réelles ou imaginaires de a et de b; il faut considérer ici comme facteur général le produit

$$\left(1-\frac{1}{a-nb}\right)\left(1-\frac{1}{a+nb}\right)=\left(1+\frac{1-2a}{a^2-n^2b^2}\right).$$

Nous devons donc poser

$$u_n=\frac{1-2a}{a^2-n^2b^2}.$$

Or, quels que soient a et b, la partie réelle et la partie imaginaire d'une telle expression sont, l'une et l'autre, pour de grandes valeurs de n, de la forme $\frac{k_n}{n^2}$, k_n restant fini lorsque n augmente indéfiniment, et comme la série dont le terme général est $\frac{k_n}{n^2}$, est convergente indépendamment des signes de ses termes, le produit (6) est lui-même convergent.

Il faut excepter, bien entendu, le cas où le rapport $\frac{a}{b}$ étant entier, l'un des facteurs du produit serait infini.

Expression de quelques fonctions sous forme de produits infinis.

404. *Expression de* $\sin x$. — On a trouvé (293)

$$(1)\qquad \sin mx = m\left(\sin x-\frac{m^2-1}{1.2.3}\sin^3 x+\frac{(m^2-1)(m^2-9)}{1.2.3.4.5}\sin^5 x-\ldots\right).$$

Lorsque m est un nombre entier impair, le second membre de cette équation est composé d'un nombre fini de termes, et se réduit à un polynôme de degré m ordonné

suivant les puissances de $\sin x$. La formule peut dans ce cas être démontrée plus directement et déduite des formules fondamentales qui expriment $\sin(a+b)$ et $\cos(a+b)$ et permettent, comme on sait, de former les sinus et cosinus des multiples d'un arc en éliminant, dans le cas actuel, les puissances du cosinus qui sont toutes de degré pair.

Cette démonstration a l'avantage de s'appliquer aux valeurs imaginaires comme aux valeurs réelles de l'arc x.

En supposant m entier et impair, le second membre de l'équation (1) étant un polynôme de degré m, peut se décomposer en facteurs du premier degré qui correspondent aux racines de l'équation $\sin mx = 0$, dans laquelle on considère $\sin x$ comme inconnu. Toutes ces racines sont réelles, comme on sait, et égales à 0, $\pm\sin\frac{\pi}{m}$, $\pm\sin\frac{2\pi}{m}$, ..., $\pm\sin\frac{m-1}{2}\frac{\pi}{m}$; on a, par conséquent, en désignant par C une constante indépendante de x,

$$\sin mx = C\sin x\left(\sin^2 x-\sin^2\frac{\pi}{m}\right)\left(\sin^2 x-\sin^2\frac{2\pi}{m}\right)\cdots\left(\sin^2 x-\sin^2\frac{m-1}{2}\frac{\pi}{m}\right),$$

ou, ce qui revient au même, en posant

$$C\sin^2\frac{\pi}{m}\cdot\sin^2\frac{2\pi}{m}\cdots\sin^2\frac{m-1}{2}\frac{\pi}{m} = -1^{\frac{m-1}{2}}C'$$

$$\sin mx = C'\sin x\left(1-\frac{\sin^2 x}{\sin^2\frac{\pi}{m}}\right)\left(1-\frac{\sin^2 x}{\sin^2\frac{2\pi}{m}}\right)\cdots\left(1-\frac{\sin^2 x}{\sin^2\frac{m-1}{2}\frac{\pi}{m}}\right).$$

Dans cette formule, m désigne un nombre entier impair et x un arc quelconque réel ou imaginaire.

Si l'on suppose x infiniment petit, le premier membre peut être remplacé par mx et le second par $C'x$; C' est donc égal à m, et la formule devient

$$(2)\qquad \sin mx = m\sin x\left(1-\frac{\sin^2 x}{\sin^2\frac{\pi}{m}}\right)\left(1-\frac{\sin^2 x}{\sin^2\frac{2\pi}{m}}\right)\cdots\left(1-\frac{\sin^2 x}{\sin^2\frac{m-1}{2}\frac{\pi}{m}}\right).$$

Posons $mx = z$, et supposons que, z restant invariable, m augmente indéfiniment; le second membre deviendra un produit d'un nombre infini de facteurs. Cherchons son expression limite.

Lorsque m augmente, x, égal à $\frac{z}{m}$, est infiniment petit; $\sin x$ peut donc être remplacé par $\frac{z}{m}$, et $m\sin x$ par z. L'un quelconque des facteurs

$$1-\frac{\sin^2 x}{\sin^2\frac{k\pi}{m}}$$

peut, par la même raison, être remplacé par la valeur limite,

$$1-\frac{x^2}{\frac{k^2\pi^2}{m^2}}=1-\frac{z^2}{k^2\pi^2};$$

l'équation (2) devient donc, à la limite,

$$\sin z = z\left(1-\frac{z^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{4\pi^2}\right)\cdots\left(1-\frac{z^2}{k^2\pi^2}\right)\cdots, \tag{3}$$

mais il est indispensable de compléter la démonstration, qui n'est pas rigoureuse.

Il est bien vrai, en effet, que dans le second membre de la formule (2) un facteur de rang déterminé k, s'approche autant qu'on veut de la limite que nous lui avons assignée; mais, pour chaque valeur de m, le produit contient des facteurs pour lesquels la substitution n'est pas permise, car lorsque k est comparable à m, $\frac{k\pi}{m}$ n'est pas très-petit et le raisonnement n'est plus applicable. Les deux produits

$$\left(1-\frac{\sin^2 x}{\sin^2\frac{\pi}{m}}\right)\left(1-\frac{\sin^2 x}{\sin^2\frac{2\pi}{m}}\right)\cdots\left(1-\frac{\sin^2 x}{\sin^2\frac{\frac{m-1}{2}\pi}{m}}\right), \tag{4}$$

$$\left(1-\frac{z^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{4\pi^2}\right)\cdots\left(1-\frac{z^2}{k^2\pi^2}\right)\cdots, \tag{5}$$

qui tendent à se confondre dans leurs premiers facteurs, cessent donc de s'accorder pour ceux dont le rang est comparable au nombre m. Il faut prouver que cependant ils ont même limite. Il suffira pour cela d'établir qu'en prenant dans chaque produit un nombre suffisamment grand, mais fini, de facteurs, les produits de ceux qui restent diffèrent, dans l'un et dans l'autre, aussi peu qu'on le voudra de l'unité, car alors, ces facteurs n'ayant pas d'influence sur le résultat limite, il importe peu évidemment que l'on puisse ou non les substituer individuellement les uns aux autres.

Pour que cette double condition soit remplie, il suffit évidemment que les produits (4) et (5) soient l'un et l'autre convergents et pour cela (403) que dans les séries

$$\frac{z^2}{\pi^2}+\frac{z^2}{4\pi^2}+\frac{z^2}{9\pi^2}+\cdots,$$

$$\frac{\sin^2 x}{\sin^2\frac{\pi}{m}}+\frac{\sin^2 x}{\sin^2\frac{2\pi}{m}}+\cdots,$$

les parties réelles et les coefficients de $\sqrt{-1}$ forment des séries convergentes indé-

pendamment des signes de leurs termes. Or ces séries peuvent s'écrire

$$\frac{z^2}{\pi^2}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\dots\right),$$

$$\frac{m^2\sin^2 x}{\pi^2}\left(\frac{\frac{\pi^2}{m^2}}{\sin^2\frac{\pi}{m}}+\frac{1}{4}\frac{\frac{4\pi^2}{m^2}}{\sin^2\frac{2\pi}{m}}+\frac{1}{9}\frac{\frac{9\pi^2}{m^2}}{\sin^2\frac{9\pi}{m}}+\dots\right).$$

Les facteurs placés hors de la parenthèse qui seuls contiennent $\sqrt{-1}$, n'influent évidemment pas sur la convergence des séries à examiner, et tout se reduit à prouver que les séries à termes positifs placées dans les parenthèses sont convergentes; cela a lieu évidemment pour la première, et l'on s'assurera qu'il en est de même de la seconde en remarquant que le rapport d'un arc moindre que $\frac{\pi}{2}$ à son sinus, est moindre que $\frac{\pi}{2}$, et que par conséquent les termes de la seconde série sont moindres que ceux de la suite convergente

$$\frac{\pi^2}{4}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\dots\right).$$

Les deux produits (4) et (5) sont donc convergents, et cela, comme nous l'avons dit, permet d'affirmer qu'ils ont même limite.

On a donc enfin, pour toute valeur réelle ou imaginaire de x,

$$\sin x = x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdots.$$

405. *Expression de* $\cos x$. — On a

$$\cos x = \frac{\sin 2x}{2\sin x},$$

par conséquent

$$\cos x = \frac{2x\left(1-\frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{9\pi^2}\right)\cdots}{2x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\cdots},$$

et en supprimant les facteurs communs,

$$\cos x = \left(1-\frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{9\pi^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{25\pi^2}\right)\cdots.$$

Expression de quelques autres fonctions.

406. Sachant exprimer un sinus et un cosinus sous forme de produits, on pourra

exprimer toute fonction trigonométrique qui se réduit au produit ou au quotient d'un nombre quelconque de sinus et de cosinus.

On a, par exemple,

$$\frac{\cos x - \cos a}{1 - \cos a} = \frac{\sin\left(\frac{a+x}{2}\right)\sin\left(\frac{a-x}{2}\right)}{\sin^2\frac{a}{2}};$$

par conséquent,

$$\frac{\cos x - \cos a}{1 - \cos a}$$

$$= \frac{\left(\frac{x+a}{2}\right)\left(\frac{a-x}{2}\right)\left[1-\frac{(x+a)^2}{4\pi^2}\right]\left[1-\frac{(a-x)^2}{4\pi^2}\right]\left[1-\frac{(x+a)^2}{4\cdot 4\pi^2}\right]\left[1-\frac{(a-x)^2}{4\cdot 4\pi^2}\right]\cdots}{\frac{a^2}{4}\left(1-\frac{a^2}{4\pi^2}\right)^2\left(1-\frac{a^2}{4\cdot 4\pi^2}\right)^2\left(1-\frac{a^2}{9\cdot 4\pi^2}\right)^2\cdots}.$$

On a évidemment

$$\frac{1-\frac{(a+x)^2}{n^2\cdot 4\pi^2}}{1-\frac{a^2}{4\pi^2 n^2}} = 1 - \frac{2ax+x^2}{4n^2\pi^2 - a^2} = \left(1-\frac{x}{2n\pi - a}\right)\left(1+\frac{x}{2n\pi + a}\right),$$

$$\frac{1-\frac{(a-x)^2}{n^2\cdot 4\pi^2}}{1-\frac{a^2}{4\pi^2 n^2}} = 1 + \frac{2ax-x^2}{4n^2\pi^2 - a^2} = \left(1+\frac{x}{2n\pi - a}\right)\left(1-\frac{x}{2n\pi + a}\right),$$

et la formule peut par conséquent s'écrire

$$\frac{\cos x - \cos a}{1 - \cos a} = \left(1-\frac{x}{a}\right)\left(1+\frac{x}{a}\right)\left(1-\frac{x}{2\pi - a}\right)\left(1+\frac{x}{2\pi + a}\right)\left(1+\frac{x}{2\pi - a}\right)\left(1-\frac{x}{2\pi + a}\right)\cdots,$$

c'est-à-dire

$$\frac{\cos x - \cos a}{1 - \cos a} = \left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\left[1-\frac{x^2}{(2\pi - a)^2}\right]\left[1-\frac{x^2}{(2\pi + a)^2}\right]\left[1-\frac{x^2}{(4\pi - a)^2}\right]\left[1-\frac{x^2}{(4\pi + a)^2}\right]\cdots.$$

On démontrera absolument de la même manière les formules suivantes :

$$\frac{\cos x + \cos a}{1 + \cos a} = \left[1-\frac{x^2}{(\pi - a)^2}\right]\left[1-\frac{x^2}{(\pi + a)^2}\right]\left[1-\frac{x^2}{(3\pi - a)^2}\right]\left[1-\frac{x^2}{(3\pi + a)^2}\right]\cdots,$$

$$\frac{\sin x + \sin a}{\sin a}$$

$$= \left(1+\frac{x}{a}\right)\left(1+\frac{x}{\pi - a}\right)\left(1-\frac{x}{\pi + a}\right)\left(1+\frac{x}{2\pi + a}\right)\left(1-\frac{x}{2\pi - a}\right)\left(1+\frac{x}{3\pi - a}\right)\left(1-\frac{x}{3\pi + a}\right)\cdots$$

407. Les deux expressions

$$\cos x + \operatorname{tang} \frac{1}{2} a \sin x,$$

$$\cos x - \cot \frac{1}{2} a \sin x,$$

donnent lieu à des développements remarquables. On a, comme il est bien aisé de le vérifier,

$$\cos x + \operatorname{tang} \frac{1}{2} a \sin x = \frac{\cos\left(\frac{a}{2} - x\right)}{\cos \frac{a}{2}},$$

$$\cos x - \cot \frac{1}{2} a \sin x = \frac{\sin\left(\frac{a}{2} - x\right)}{\sin \frac{a}{2}};$$

il est donc facile de les exprimer l'une et l'autre par des produits infinis. On trouve, après des réductions évidentes,

$$\cos x + \operatorname{tang} \frac{1}{2} a \sin x$$

$$= \left(1 + \frac{2x}{\pi - a}\right)\left(1 - \frac{2x}{\pi + a}\right)\left(1 + \frac{2x}{3\pi - a}\right)\left(1 - \frac{2x}{3\pi + a}\right)\left(1 + \frac{2x}{5\pi - a}\right)\left(1 - \frac{2x}{5\pi + a}\right)\cdots,$$

$$\cos x - \cot \frac{1}{2} a \sin x$$

$$= \left(1 - \frac{2x}{a}\right)\left(1 + \frac{2x}{2\pi - a}\right)\left(1 - \frac{2x}{2\pi + a}\right)\left(1 + \frac{2x}{4\pi - a}\right)\left(1 - \frac{2x}{4\pi + a}\right)\cdots.$$

408. Les lettres qui figurent dans les formules précédentes peuvent être réelles ou imaginaires. En remplaçant x par $x\sqrt{-1}$ dans les expressions de $\sin x$ et de $\cos x$, on obtient les formules suivantes :

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = \left(1 + \frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1 + \frac{4x^2}{9\pi^2}\right)\left(1 + \frac{4x^2}{25\pi^2}\right)\cdots,$$

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = x\left(1 + \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 + \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 + \frac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdots.$$

La même substitution faite dans les formules (**406**) donne

$$\frac{e^x + e^{-x} - 2\cos a}{2(1 - \cos a)} = \left(1 + \frac{x^2}{a^2}\right)\left[1 + \frac{x^2}{(2\pi - a)^2}\right]\left[1 + \frac{x^2}{(2\pi + a)^2}\right]\cdots,$$

$$\frac{e^x + e^{-x} + 2\cos a}{2(1 + \cos a)} = \left[1 + \frac{x^2}{(\pi - a)^2}\right]\left[1 + \frac{x^2}{(\pi + a)^2}\right]\left[1 + \frac{x^2}{(3\pi - a)^2}\right]\cdots.$$

Quelques séries déduites des formules précédentes.

409. L'équation

$$\sin x = x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdots \tag{1}$$

donne

$$\mathrm{l}.\sin x = \mathrm{l}x + \mathrm{l}\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right) + \mathrm{l}\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right) + \mathrm{l}\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right) + \cdots, \tag{2}$$

on en déduit, en prenant les dérivées des deux membres,

$$\cot x = \frac{1}{x} - \frac{2x}{\pi^2-x^2} - \frac{2x}{4\pi^2-x^2} - \frac{2x}{9\pi^2-x^2} - \cdots; \tag{3}$$

mais on a

$$-\frac{2x}{k^2\pi^2-x^2} = -\frac{1}{k\pi-x} + \frac{1}{k\pi+x}, \tag{4}$$

donc

$$\cot x = \frac{1}{x} + \frac{1}{\pi+x} - \frac{1}{\pi-x} + \frac{1}{2\pi+x} - \frac{1}{2\pi-x} + \cdots. \tag{5}$$

Si dans cette formule on remplace x par πx, elle devient

$$\pi\cot\pi x = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+2} + \cdots. \tag{6}$$

Si dans la formule (5) on remplace x par $\frac{\pi}{2}-x$, elle devient

$$\operatorname{tang} x = \frac{1}{\frac{\pi}{2}-x} - \frac{1}{\frac{\pi}{2}+x} + \frac{1}{\frac{3\pi}{2}-x} - \frac{1}{\frac{3\pi}{2}+x} + \frac{1}{\frac{5\pi}{2}-x} - \frac{1}{\frac{5\pi}{2}+x} + \cdots, \tag{7}$$

qui aurait pu s'obtenir directement en partant de l'expression de $\cos x$.

En ajoutant les formules (5) et (7), on a

$$\operatorname{tang} x + \cot x = \frac{2}{\sin 2x} = \frac{1}{x} + \frac{1}{\frac{\pi}{2}-x} - \frac{1}{\frac{\pi}{2}+x} + \frac{1}{\pi+x} - \frac{1}{\pi-x}$$
$$+ \frac{1}{\frac{3\pi}{2}-x} - \frac{1}{\frac{3\pi}{2}-x} + \frac{1}{2\pi+x} - \frac{1}{2\pi-x} + \cdots. \tag{8}$$

Si l'on pose $2x = a\pi$, on en déduit

$$\frac{\pi}{\sin a\pi} = \frac{1}{a} + \frac{1}{1-a} - \frac{1}{1+a} + \frac{1}{2+a} - \frac{1}{2-a}$$

(9)

$$+ \frac{1}{3-a} - \frac{1}{3+a} + \frac{1}{4+a} - \frac{1}{4-a} + \cdots$$

Toutes ces formules, données par Euler, sont célèbres et importantes.

410. On obtient d'autres séries remarquables en développant les deux membres des équations précédemment obtenues pour identifier ensuite les deux développements.

Reprenons la formule

$$\sin x = x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)-\cdots, \tag{1}$$

on a

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \cdots.$$

En formant le produit indiqué au second membre de (1) d'après les règles de la multiplication algébrique, on voit que le coefficient de $-x^3$ est la somme des fractions

$$\frac{1}{\pi^2}, \quad \frac{1}{4\pi^2}, \quad \frac{1}{9\pi^2}, \cdots,$$

le coefficient de x^5 la somme de leurs produits deux à deux, celui de $-x^7$ la somme de leurs produits trois à trois, et ainsi de suite. Nous pouvons donc écrire

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{9\pi^2} + \cdots,$$

et, par conséquent,

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots.$$

Connaissant la somme des produits deux à deux, trois à trois, etc., d'un nombre quelconque de quantités, on peut, comme on sait, former la somme de leurs carrés, la somme de leurs cubes, etc..., et l'on formera de cette manière la somme des puissances semblables de degré pair quelconque des inverses des nombres naturels; mais, sans nous arrêter au calcul numérique de chacune de ces sommes, nous allons faire connaître leur expression générale, qui est liée, comme on va le voir, aux nombres de Bernoulli.

411. Reprenons la formule (409)

$$(1)\qquad \cot x = \frac{1}{x} + \frac{1}{\pi+x} - \frac{1}{\pi-x} + \frac{1}{2\pi+x} - \frac{1}{2\pi-x} + \dots,$$

on a (387)

$$(2)\qquad \cot x = \frac{1}{x} - \frac{2^2 B_1}{1.2}x - \frac{2^4 . B_2}{1.2.3.4}x^3 - \dots - \frac{2^{2n} . B_n}{1.2.3\dots 2n}x^{2n-1} - \dots,$$

et évidemment pour toute valeur de k,

$$\frac{1}{k\pi+x} - \frac{1}{k\pi-x} = -\frac{2x}{k^2\pi^2 - x^2} = -\frac{2x}{k^2\pi^2}\left(1 + \frac{x^2}{k^2\pi^2} + \frac{x^4}{k^4\pi^4} + \dots\right).$$

Il est donc facile de développer le second membre de l'équation (1) en série ordonnée suivant les puissances de x, et l'on obtient, en égalant les coefficients de x^{2n-1},

$$(3)\qquad \frac{B_n . 2^{2n-1}\pi^{2n}}{1.2.3\dots 2n} = 1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{4^{2n}} + \dots.$$

412. La formule précédente donne l'expression approchée des nombres de Bernoulli lorsque l'indice n devient un peu considérable. En effet, le second membre de l'équation (3) diffère fort peu de l'unité et l'on a, avec une erreur relative d'autant moindre que n est plus grand,

$$(4)\qquad B_n = \frac{1.2.3\dots 2n}{2^{2n-1}\pi^{2n}}.$$

On voit que les nombres de Bernoulli croissent avec une très-grande rapidité. Il résulte de l'équation (4) que dans la série

$$1 - \frac{x}{2} + B_1\frac{x^2}{1.2} - B_2\frac{x^4}{1.2.3.4} + \dots + (-1)^{n+1}B_n\frac{x^{2n}}{1.2.3.\ .2n} + \dots,$$

le rapport d'un terme au précédent a pour limite $\frac{x^2}{4\pi^2}$. Cette série, qui représente $\frac{x}{e^x-1}$, devient donc divergente pour les valeurs de x supérieures à 2π; cela est d'accord avec ce qui a été dit (378). La fonction $\frac{x}{e^x-1}$ est en effet infinie pour $x = 2\pi\sqrt{-1}$, et ne peut par conséquent pas être développable en série ordonnée suivant les puissances de x pour les valeurs dont le module surpasse 2π.

413. Lorsque x surpasse 2π, la formule

$$(1)\qquad \frac{x}{e^x-1} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{B_1 x^2}{1.2} - \frac{B_2 x^4}{1.2.3.4} + \dots$$

cesse d'être applicable; on peut néanmoins démontrer qu'en arrêtant le développement à un terme quelconque, l'erreur commise est moindre que le terme suivant.

La série trouvée (409) pour $\cot x$ donne

$$(2) \qquad 1 - x\cot x = 2x^2\left(\frac{1}{\pi^2 - x^2} + \frac{1}{4\pi^2 - x^2} + \frac{1}{9\pi^2 - x^2} + \dots\right),$$

l'équation dont on l'a déduite étant applicable aux valeurs imaginaires de x, nous pouvons y remplacer x par $\frac{x}{2}\sqrt{-1}$; elle devient alors, si l'on divise les deux membres par $-x^2$,

$$(3) \qquad \frac{1}{x}\left(\frac{1}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{x^2+4\pi^2} + \frac{1}{x^2+16\pi^2} + \dots + \frac{1}{x^2+4n^2\pi^2} + \dots\right)$$

mais on a pour toute valeur de x

$$\frac{1}{x^2+4n^2\pi^2} = \frac{1}{4n^2\pi^2}\left[1 - \frac{x^2}{4n^2\pi^2} + \frac{x^4}{(4n^2\pi^2)^2} + \dots + (-1)^{m+1}\frac{\theta x^{2m}}{(4n^2\pi^2)^m}\right],$$

θ étant moindre que l'unité; en remplaçant chaque terme de la formule (3) par son développement et remarquant que

$$\sum \frac{\theta}{(4n^2\pi^2)^{m+1}} = \theta \sum \frac{1}{(4n^2\pi^2)^{m+1}},$$

ϑ désignant toujours un nombre indéterminé compris entre zéro et l'unité, on aura

$$(4) \qquad \frac{1}{x}\left(\frac{1}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right) = 2\sum\frac{1}{4n^2\pi^2} - 2x^2\sum\frac{1}{(4n^2\pi^2)^2} + 2x^4\sum\frac{1}{(4n^2\pi^2)^3} + \dots$$
$$\pm 2x^{2m-2}\sum\frac{1}{(4n^2\pi^2)^m} \mp 2\vartheta x^{2m}\sum\frac{1}{(4n^2\pi^2)^{m+1}}.$$

Mais on a

$$\sum\frac{1}{(n^2)^p} = \frac{B_p\pi^{2p}.2^{2p-1}}{1.2.3\dots 2p},$$

et, par conséquent,

$$2\sum\frac{1}{(4n^2\pi^2)^p} = \frac{B_p}{1.2.3\dots 2p};$$

la formule (4) devient donc

$$\frac{1}{x}\left(\frac{1}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right) = \frac{B_1}{1.2} - \frac{B_2}{1.2.3.4}x^2 + \frac{B_3}{1.2.3.4.5.6}x^4 - \dots$$
$$\pm\frac{B_n x^{2n-2}}{1.2.3\dots 2n} \mp \frac{\vartheta B_{n+1}x^{2n}}{1.2.3\dots 2n+2}.$$

Si l'on multiplie les deux membres par x^2 et que l'on change x en $-x$, on trouve enfin

$$\frac{x}{e^x-1} - 1 + \frac{x}{2} = \frac{B_1x^2}{1.2} - \frac{B_2x^4}{1.2.3.4} - \dots \pm\frac{B_nx^{2n}}{1.2.3\dots 2n} \mp \vartheta B_{n+1}\frac{x^{2n+2}}{1.2.3\dots 2n+2};$$

le dernier terme du second membre augmente indéfiniment lorsque x est plus grand que 2π, mais la formule est exacte quel que soit x.

414. L'équation

$$\pi \cot \pi x = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+2} + \dots$$

conduit aussi à des séries numériques remarquables. En différentiant n fois les deux membres, on a

$$\frac{d^n . \pi \cot \pi x}{dx^n} = \pm 1.2.3 \dots n \left[\frac{1}{x^{n+1}} + \frac{1}{(x-1)^{n+1}} + \frac{1}{(x+1)^{n+1}} + \frac{1}{(x+2)^{n+1}} + \dots \right],$$

et si l'on suppose $x = \frac{1}{4}$, le second membre devient

$$\pm \frac{1}{1.2.3 \dots n} \left[\frac{4^{n-1}}{1} + \frac{4^{n+1}}{(-3)^{n+1}} + \frac{4^{n+1}}{5^{n+1}} + \frac{4^{n+1}}{(-7)^{n+1}} + \dots \right],$$

et, en calculant la valeur numérique du premier membre, on obtient les formules

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots,$$

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots,$$

$$\frac{\pi^3}{32} = 1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \dots$$

$$\frac{\pi^4}{96} = 1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \dots$$

$$\frac{5\pi^5}{1536} = 1 - \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} + \frac{1}{7^5} + \dots;$$

celles qui contiennent des exposants pairs ne sont pas essentiellement différentes des formules déjà obtenues (411).

415. On a (404)

$$\sin nx = nx \left(1 - \frac{n^2 x^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{n^2 x^2}{4\pi^2}\right) \left(1 - \frac{n^2 x^2}{9\pi^2}\right) \dots;$$

en remplaçant $\sin nx$ par l'expression (293), l'identification des coefficients des mêmes puissances de n donne lieu à des séries remarquables. On a

$$\sin nx = n \sin x - \frac{n.(n^2-1)}{1.2.3} \sin^3 x + \frac{n.(n^2-1)(n^2-9)}{1.2.3.4.5} \sin^5 x - \dots;$$

le coefficient de n est dans le second membre

$$\sin x + \frac{\sin^3 x}{1.2.3} + \frac{1.9}{1.2.3.4.5}\sin^5 x + \ldots,$$

et dans le premier il est évidemment égal à x; on a donc

$$x = \sin x + \frac{\sin^3 x}{1.2.3} + \frac{1.9}{1.2.3.4.5}\sin^5 x + \ldots.$$

c'est la série déjà obtenue plusieurs fois (302) (294).

En égalant les coefficients de n^3 on obtient la formule remarquable

$$\frac{x^3}{\pi^2}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\ldots\right) = \frac{\sin^3 x}{1.2.3} + \frac{\sin^5 x}{1.2.3.4.5}(1+9) + \frac{\sin^7 x}{1.2.3.4.5.6.7}(9+25+9.25)+\ldots,$$

on en conclut, en remplaçant le coefficient de x^3 par sa valeur,

$$x^3 = \sin^3 x + \frac{3.3}{4.5}\left(1+\frac{1}{3^2}\right)\sin^5 x + \frac{3.5.3}{4.6.7}\left(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}\right)\sin^7 x + \ldots$$
$$+ \frac{3.5.7\ldots(2n-1).3}{4.6.8\ldots 2n(2n+1)}\left[1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{(2n-1)^2}\right]\sin^{2n+1} x,$$

formule remarquable donnée pour la première fois par M. Scholtz.

Formule de Wallis.

416. Si dans l'équation

$$\sin x = x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\ldots$$

on fait $x = \frac{\pi}{2}$, on obtient la formule

$$1 = \frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{2^2.4}\right)\left(1-\frac{1}{2^2.9}\right)\ldots,$$

chaque facteur qui est une différence de carrés peut être remplacé par un produit, et l'on a

$$1 = \frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{6}\right)\left(1+\frac{1}{6}\right)-\ldots,$$

on en déduit

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots\frac{2n}{(2n-1)}\cdot\frac{2n}{(2n+1)}\cdots,$$

formule célèbre que Wallis a découverte par un procédé très-différent.

417. On a rattaché depuis longtemps la formule précédente à une formule de

Stirling, qui fait connaître l'expression approchée du produit $1.2\ldots x$ pour de grandes valeurs du nombre entier x.

La formule de Stirling, sur laquelle nous aurons à revenir, entraîne évidemment celle de Wallis; la réciproque a été établie de la manière suivante par M. Serret :

La formule de Wallis donne

$$\frac{\pi}{2} = \lim \frac{(2.4.6\ldots 2n)^2}{[1.3.5\ldots(2n-1)]^2(2n+1)} = \lim 2^{2n}\,\frac{(1.2.3\ldots n)^2[2.4\ldots(2n-2)2n]^2}{[1.2.3\ldots(2n)]^2(2n+1)}$$

(1)

$$= \lim 2^{4n}\,\frac{(1.2.3\ldots n)^4}{(1.2.3\ldots 2n)^2(2n+1)}.$$

Si l'on pose

$$\varphi(x) = \frac{1.2.3\ldots x}{\sqrt{2\pi}\cdot e^{-x}x^{x+\frac{1}{2}}} \tag{2}$$

l'équation (1) équivaut, comme on le vérifie aisément, à

$$\lim \frac{[\varphi(n)]^2}{\varphi(2n)} = 1. \tag{3}$$

Or on peut démontrer directement que l'on a aussi

$$\lim \frac{\varphi(n)}{\varphi(2n)} = 1, \tag{4}$$

et la comparaison des équations (3) et (4) exige évidemment que $\varphi(n)$ ait pour limite l'unité.

Pour prouver l'équation (4), remarquons que l'on a, d'après l'équation (2),

$$\frac{\varphi(x)}{\varphi(x+1)} = \frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}} = e^{-1+\left(x+\frac{1}{2}\right)l\left(1+\frac{1}{x}\right)};$$

or on a, en désignant par θ' et θ'' des nombres compris entre zéro et l'unité,

$$l\left(1+\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} - \frac{\theta}{2x^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{\theta'}{3x^3},$$

par conséquent

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)l\left(1+\frac{1}{x}\right) = x\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{\theta'}{3x^3}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} - \frac{\theta}{2x^2}\right) = 1 + \frac{\theta'}{3x^2} - \frac{\theta}{4x^2},$$

ou enfin, θ'' étant un troisième membre plus petit que l'unité en valeur absolue,

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)l\left(1+\frac{1}{x}\right) = 1 + \frac{\theta''}{x^2},$$

on en conclut

$$\frac{\varphi(x)}{\varphi(x+1)} = e^{\frac{\theta''}{x^2}}.$$

On déduit de cette formule, en remplaçant successivement x par $x+1$, $x+2$,..., $2x-1$, et désignant par θ''_1, θ''_2,..., θ''_{x-1}, des nombres compris entre -1 et $+1$,

$$\frac{\varphi(x+1)}{\varphi(x+2)} = e^{\frac{\theta''_1}{(x+1)^2}}, \quad \frac{\varphi(x+2)}{\varphi(x+3)} = e^{\frac{\theta''_2}{(x+2)^2}}, \ldots \quad \frac{\varphi(2x-1)}{\varphi(2x)} = e^{\frac{\theta''_{x-1}}{(2x-1)^2}}.$$

Multiplions ces équations membre à membre, en remarquant que la valeur absolue de la somme

$$\frac{\theta''}{x^2} + \frac{\theta''_1}{(x+1)^2} + \ldots + \frac{\theta''_{x-1}}{(2x-1)^2}$$

est moindre que $\frac{1}{x^2}.x$, c'est-à-dire que $\frac{1}{x}$, nous pourrons écrire, en supprimant tous les facteurs communs au numérateur et au dénominateur du premier membre,

$$\frac{\varphi(x)}{\varphi(2x)} = e^{\frac{\theta}{x}}.$$

Cette équation montre que, x croissant indéfiniment, $\frac{\varphi(x)}{\varphi(2x)}$ a pour limite l'unité, $\frac{\varphi(x)^2}{\varphi(2x)}$ ayant aussi pour limite l'unité, le rapport des deux fractions, c'est-à-dire $\varphi(x)$, tend aussi vers l'unité.

En d'autres termes, on a, approximativement, pour de grandes valeurs de x,

$$1.2.3\ldots x = \sqrt{2\pi}\, e^{-x}\, x^{x+\frac{1}{2}},$$

l'erreur relative étant d'autant moindre que x est plus grand: c'est le théorème de Stirling.

418. M. Serret, en faisant connaître cette démonstration élégante, a montré qu'elle conduit à une série convergente qui représente exactement le logarithme du produit $1.2.3\ldots x$, et dont la formule obtenue équivaut au premier terme. Posons en effet comme précédemment

$$\varphi(x) = \frac{1.2.3\ldots x}{\sqrt{2\pi}\, e^{-x}\, x^{x+\frac{1}{2}}}, \tag{1}$$

on a identiquement

$$\mathrm{l}\varphi(x) = \mathrm{l}\frac{\varphi(x)}{\varphi(x+1)} + \mathrm{l}\frac{\varphi(x+1)}{\varphi(x+2)} + \ldots + \mathrm{l}\frac{\varphi(x+m)}{\varphi(x+m+1)} + \mathrm{l}\varphi(x+m+1).$$

Si m croît indéfiniment, $\varphi(x+m+1)$ tend vers l'unité et son logarithme tend vers zéro ; on a donc

$$1\varphi(x)=\sum_{n=0}^{n=\infty} 1\,\frac{\varphi(x+n)}{\varphi(x+n+1)}.$$

Mais l'équation (2), qui sert de définition à $\varphi(x)$, donne

$$1(1.2.3..\ x)=\frac{1}{2}1\,2\pi-x+\left(x+\frac{1}{2}\right)1\,x+1\varphi(x),$$

et, en remarquant que l'on a

$$\frac{\varphi(x+n)}{\varphi(x+n+1)}=\frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{x+n}\right)^{x+n+\frac{1}{2}},$$

et, par conséquent,

$$1\,\frac{\varphi(x+n)}{\varphi(x+n+1)}=\left(x+n+\frac{1}{2}\right)1\left(1+\frac{1}{x+n}\right)-1,$$

on a enfin

$$1(1.2.3...x)=\frac{1}{2}1\,2\pi-x+\left(x+\frac{1}{2}\right)1x+\sum_{n=0}^{n=\infty}\left[\left(x+n+\frac{1}{2}\right)1\left(1+\frac{1}{x+n}\right)-1\right].$$

Cette formule a été donnée pour la première fois par M. Gudermann. La démonstration même prouve que la série est convergente; il est aisé d'ailleurs de s'en assurer directement. Le terme général

$$\left[\left(x+n+\frac{1}{2}\right)1\left(1+\frac{1}{x+n}\right)-1\right]$$

est égal en effet à

$$\left(x+n+\frac{1}{2}\right)\left[\frac{1}{x+n}-\frac{1}{2(x+n)^2}+\frac{\theta}{3(x+n)^3}\right)-1,$$

θ étant plus petit que l'unité ; or, en effectuant les multiplications, cette expression se réduit à la somme

$$\left(\frac{\theta}{3}-\frac{1}{4}\right)\frac{1}{(x+n)^2}+\frac{\theta}{6(x+n)^3},$$

qui est évidemment le terme général d'une série convergente.

EXERCICES.

1. Si dans l'équation

$$\sin\alpha = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \dots$$

on considère $\sin\alpha$ comme donné, et x comme inconnu, l'une des racines étant α, les autres sont $\alpha \pm 2n\pi$, $\pi - \alpha \pm 2n\pi$, en appliquant la théorie des équations algébriques de degré fini, sur la décomposition d'un polynôme en facteurs, on en conclut

$$\frac{\sin\alpha - \sin x}{\sin\alpha} = \left(1 - \frac{x}{\alpha}\right)\left(1 - \frac{x}{\pi - \alpha}\right)\left(1 + \frac{x}{\pi + \alpha}\right) \times \left(1 - \frac{x}{2\pi + \alpha}\right)\left(1 + \frac{x}{2\pi - \alpha}\right)\left(1 - \frac{x}{3\pi - \alpha}\right)\dots,$$

et cette équation est exacte quoique la démonstration manque de rigueur.

2. Si dans l'équation

$$\cos\alpha = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \dots,$$

on considère $\cos\alpha$ comme donné, et x comme inconnu, l'une des racines étant α, les autres sont comprises dans la formule $\pm(2n\pi \pm \alpha)$, on en conclut, en appliquant la même induction que dans le cas précédent,

$$\frac{\cos x - \cos\alpha}{1 - \cos\alpha} = \left(1 - \frac{x^2}{\alpha^2}\right)\left[1 - \frac{x^2}{(2\pi - \alpha)^2}\right]\left[1 - \frac{x^2}{(2\pi + \alpha)^2}\right]\left[1 - \frac{x^2}{(4\pi - \alpha)^2}\right]\dots,$$

et cette formule est exacte comme la précédente.

3. La formule de Wallis

$$\frac{2}{\pi} = \frac{1^2.3^2.5^2\dots(2n-1)^2(2n+1)}{2^2.4^2.6^2\dots(2n)^2}$$

équivaut à la série

$$\frac{2}{\pi} = 1 - \frac{1}{2^2} - \frac{1^2.3}{2^2.4^2} - \frac{1^2.3^2.5}{2^2.4^2.6^2} - \frac{1^2.3^2.5^2.7}{2^2.4^2.6^2.8^2} - \dots.$$

4. Transformer la série

$$1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \dots$$

dans le produit infini équivalent

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)\left(1 - \frac{1}{3^n}\right)\left(1 - \frac{1}{5^n}\right)\left(1 - \frac{1}{7^n}\right)\dots\left(1 - \frac{1}{p^n}\right)-\dots},$$

où p désigne un nombre premier quelconque.

5. On a de même

$$1-\frac{1}{3^n}+\frac{1}{5^n}-\frac{1}{7^n}+\frac{1}{9^n}-\cdots$$
$$=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{3^n}\right)\left(1-\frac{1}{5^n}\right)\left(1+\frac{1}{7^n}\right)\left(1+\frac{1}{11^n}\right)\cdots\left(1\pm\frac{1}{p^n}\cdots\right)},$$

le signe + devant être adopté lorsque p est un nombre premier de la forme $4n-1$, et le signe — dans le cas contraire.

6. On déduit des deux théorèmes précédents

$$\frac{\pi}{4}=\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{11}{12}\cdot\frac{13}{12}\cdot\frac{17}{16}\cdot\frac{19}{20}\cdot\frac{23}{24}\cdots,$$
$$\frac{\pi^2}{6}=\frac{4}{3}\cdot\frac{3^2}{2.4}\cdot\frac{5^2}{4.6}\cdot\frac{7^2}{6.8}\cdot\frac{11^2}{10.12}\cdots.$$

En divisant la seconde équation par le carré de la première, on trouve

$$2=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{10}{9}\cdots.$$

Ces fractions s'obtiennent en partageant les nombres premiers impairs en deux parties qui diffèrent d'une unité, et prenant les parties paires pour numérateurs et les parties impaires pour dénominateurs.

7. Si l'on transforme l'expression $\cos\frac{\pi x}{6}+\cot\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi x}{6}$ en un produit, et qu'on développe ensuite ce produit en série ordonnée suivant les puissances de x, en identifiant les coefficients avec ceux auxquels conduit le développement direct, on trouvera plusieurs séries remarquables : la première est

$$\frac{\pi}{2\sqrt{3}}=1-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\frac{1}{17}+\frac{1}{19}-\cdots.$$

8. On a

$$\sin\frac{m\pi}{2n}=\frac{m\pi}{2n}\cdot\frac{2n-m}{2n}\cdot\frac{2n+m}{2n}\cdot\frac{4n-m}{4n}\cdot\frac{4n+m}{4n}\cdots,$$
$$\sin\frac{2m\pi}{2n}=\frac{2m\pi}{2n}\cdot\frac{2n-2m}{2n}\cdot\frac{2n+2m}{2n}\cdot\frac{4n-2m}{4n}\cdot\frac{4n+2m}{4n}\cdots,$$

on en déduit

$$\cos\frac{m\pi}{2n}=\frac{2n-2m}{2n-m}\cdot\frac{2n+2m}{2n+m}\cdot\frac{4n-2m}{4n-m}\cdot\frac{4n+2m}{4n+m}\cdots.$$

Si l'on fait $n=3m$, $n=2m$, $n=\frac{5m}{2}$, on en déduit

$$\frac{1}{2}\sqrt{3}=\frac{4}{5}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{10}{11}\cdot\frac{14}{13}\cdot\frac{16}{15}\cdot\frac{20}{17}\cdots,$$
$$\frac{1}{2}\sqrt{2}=\frac{2}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{10}{9}\cdot\frac{10}{11}\cdot\frac{14}{13}\cdot\frac{14}{15}\cdots,$$
$$1+\sqrt{5}=4\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{7}{6}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{12}{11}\cdots.$$

CHAPITRE VII.

DÉVELOPPEMENTS EN FRACTIONS CONTINUES.

Définition des fractions continues.

419. Le développement d'une fonction en fraction continue est souvent utile pour le calcul numérique de sa valeur. Nous donnerons cependant peu de détails sur ce mode de développement qui jusqu'ici n'a pas joué un grand rôle dans l'étude des propriétés analytiques, qui est notre but principal.

Rappelons d'abord que l'on désigne sous le nom de fraction *continue* une expression de la forme

$$a+\cfrac{\alpha_1}{a_1+\cfrac{\alpha_2}{a_2+\cfrac{\alpha_3}{a_3+\ddots}}},$$

dans laquelle $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, a_1, a_2, a_3, \ldots$, peuvent avoir des valeurs quelconques. La fraction continue qui représente une expression algébrique ou numérique est d'après cela évidemment indéterminée. Si l'on exige que les numérateurs $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$, soient tous égaux à l'unité, et que les dénominateurs soient entiers, le problème n'admet au contraire qu'une seule solution. La fraction continue jouit alors de propriétés très-remarquables et fournit par ses réduites les valeurs approchées les plus simples que comporte le degré d'approximation obtenu. Mais il n'entre pas dans notre plan d'aborder ici cette théorie très-connue d'algèbre élémentaire.

Transformation d'une série en fraction continue.

420. Soit la série

$$S=\frac{1}{A_1}-\frac{1}{A_2}+\frac{1}{A_3}-\frac{1}{A_4}+\cdots.$$

On a identiquement

$$\frac{1}{A_1}-\frac{1}{A_2}=\cfrac{1}{A_1+\cfrac{A_1^2}{A_2-A_1}}.$$

Si dans cette équation on change $\frac{1}{A_2}$ en $\frac{1}{A_2} - \frac{1}{A_3}$, ou, ce qui revient au même, A_2 en $A_2 + \frac{A_2^2}{A_3 - A_2}$, on aura

$$\frac{1}{A_1} - \frac{1}{A_2} + \frac{1}{A_3} = \cfrac{1}{A_1 + \cfrac{A_1^2}{A_2 + \cfrac{A_2^2}{A_3 - A_2} - A_1}} = \cfrac{1}{A_1 + \cfrac{A_1^2}{A_2 - A_1 + \cfrac{A_2^2}{A_3 - A_2}}}.$$

En remplaçant dans cette équation identique $\frac{1}{A_3}$ par $\frac{1}{A_3} - \frac{1}{A_4}$, c'est-à-dire A_3 par $A_3 + \frac{A_4^2}{A_4 - A_3}$, on trouvera de même

$$\frac{1}{A_1} - \frac{1}{A_2} + \frac{1}{A_3} - \frac{1}{A_4} = \cfrac{1}{A_1 + \cfrac{A_1^2}{A_2 - A_1 + \cfrac{A_2^2}{A_3 - A_2 + \cfrac{A_3^2}{A_1 - A_3}}}}$$

et l'on voit que la série indéfinie est égale à la fraction

$$\cfrac{1}{A_1 + \cfrac{A_1^2}{A_2 - A_1 + \cfrac{A_2^2}{A_3 - A_2 + \cfrac{A_3^2}{A_4 - A_3 + \ddots}}}}$$

Cette fraction est convergente en même temps que la série, et précisément comme elle, puisqu'en s'arrêtant après un nombre quelconque de fractions intégrantes, on représente précisément un nombre égal de termes de la série.

421. Considérons, par exemple, la série

$$l2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots,$$

on en conclut

$$l2 = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{4}{1 + \cfrac{9}{1 + \cfrac{16}{1 + \ddots}}}}}$$

La même formule appliquée à la série

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

donne

$$\frac{\pi}{4} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{9}{2 + \cfrac{25}{2 + \cfrac{49}{2 + \ddots}}}}},$$

formule célèbre donnée pour la première fois sans démonstration par Brounker. Ces fractions convergent d'ailleurs, cela est évident, avec la même lenteur que la série qui leur donne naissance, et la démonstration de la formule générale montre que la fraction terminée à une fraction intégrante de rang n est égale à la somme des n premiers termes de la série.

422. Pour appliquer la formule à une série de la forme

$$S = B_1 - B_2 + B_3 - B_4 + \ldots,$$

il suffit évidemment de remplacer A_1 par $\frac{1}{B_1}$, A_2 par $\frac{1}{B_2}$ et ainsi de suite. On a ainsi

$$S = \cfrac{1}{\frac{1}{B_1} + \cfrac{\frac{1}{B_1^2}}{\frac{1}{B_2} - \frac{1}{B_1} + \cfrac{\frac{1}{B_2^2}}{\frac{1}{B_3} - \frac{1}{B_2} + \ddots}}}$$

c'est-à-dire en réduisant

$$S = \cfrac{B_1}{1 + \cfrac{B_1}{B - B_2 + \cfrac{B_1 B_3}{B_2 - B_3 + \cfrac{B_2 B_4}{B_3 - B_4 + \ddots}}}}$$

Dans cette formule générale, les termes de la série transformée ont été supposés alternativement positifs et négatifs. Cette supposition n'altère en rien la généralité du résultat, car il s'agit ici d'une transformation algébrique où les lettres peuvent représenter indifféremment des nombres positifs ou négatifs.

423. Considérons, par exemple, la série

$$S = 1 + qz + q^4 z^2 + q^9 z^3 + \ldots + q^{n^2} z^n + \ldots.$$

L'application de la formule précédente donne

$$S = \cfrac{1}{1 - \cfrac{qz}{1 + qz - \cfrac{q^3 z^2}{qz + q^4 z^2 - \cfrac{q^{10} z^4}{q^3 z^2 + q^9 z^3 - \ddots - \cfrac{q^{n^2+(n-2)^2} z^{2n-2}}{q^{(n-1)^2} z^{n-1} + q^{n^2} z^n - \ddots}}}}},$$

qui se transforme aisément en

$$S = \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{1 + \cfrac{\frac{1}{qz}}{1 + \frac{1}{qz} - \cfrac{\frac{1}{q^3 z}}{1 + \frac{1}{q^3 z} - \cfrac{\frac{1}{q^5 z}}{1 + \frac{1}{q^5 z} - \ddots - \cfrac{\frac{1}{q^{2n-1} z}}{1 + \frac{1}{q^{2n+1} z} - \ddots}}}}}};$$

on a identiquement

$$\cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{1 + \frac{1}{qz} - k}} = 1 + \cfrac{1}{\frac{1}{qz} - k},$$

par conséquent

$$S = 1 + \cfrac{1}{\frac{1}{qz} - \cfrac{\frac{1}{qz}}{1 + \frac{1}{q^3 z} - \cfrac{\frac{1}{q^3 z}}{1 + \frac{1}{q^5 z} - \ddots}}}$$

ou

$$S = 1 + \cfrac{qz}{1 - \cfrac{q^3 z}{1 + q^3 z - \cfrac{q^5 z}{1 + q^5 z - \ddots - \cfrac{q^{2n-1} z}{1 + q^{2n-1} z - \ddots}}}}$$

La fraction arrêtée à la $n^{ième}$ fraction intégrante représente la somme des n premiers termes de la série.

424. On peut aussi transformer en fraction continue la série

$$\frac{1}{A}-\frac{1}{AB}+\frac{1}{ABC}-\frac{1}{ABCD}+\frac{1}{ABCDE}-\cdots;$$

on a en effet

$$\frac{1}{A}-\frac{1}{AB}=\frac{1}{A+\dfrac{A}{B-1}}.$$

Pour passer de cette expression à celle de la somme des trois premiers termes de la série, il faut remplacer $\frac{1}{B}$ par $\frac{1}{B}-\frac{1}{BC}$, c'est-à-dire remplacer B par

$$\frac{1}{\dfrac{1}{B}-\dfrac{1}{BC}}=B+\frac{B}{C-1}.$$

On a donc

$$\frac{1}{A}-\frac{1}{AB}+\frac{1}{ABC}=\cfrac{1}{A+\cfrac{A}{B-1+\cfrac{B}{C-1}}}.$$

Pour passer de cette expression à celle des quatre premiers termes de la série, il faut remplacer $\frac{1}{C}$ par $\frac{1}{C}-\frac{1}{CD}$, et par suite C par $C+\frac{C}{D-1}$. On en conclut

$$\frac{1}{A}-\frac{1}{AB}+\frac{1}{ABC}-\frac{1}{ABCD}=\cfrac{1}{A+\cfrac{A}{B-1+\cfrac{B}{C-1+\cfrac{C}{D-1}}}}.$$

La loi est évidente et la série indéfinie est égale à la fraction continue indéfinie

$$\cfrac{1}{A+\cfrac{A}{B-1+\cfrac{B}{C-1+\cfrac{C}{D-1+\cfrac{D}{E-1+\ddots}}}}}$$

425. On a par exemple

$$1-\frac{1}{e}=1-\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}-\frac{1}{1.2.3.4}+\cdots,$$

et par conséquent

$$1-\frac{1}{e}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{2+\cfrac{3}{3+\cfrac{4}{4+\ddots}}}}}$$

ou, en prenant les inverses de deux membres et retranchant l'unité,

$$\frac{1}{e-1}=\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{2+\cfrac{3}{3+\cfrac{4}{4+\cfrac{5}{5+\ddots}}}}}$$

Expression d'une fonction sous forme de fraction continue.

426. La recherche d'une fraction continue indéfinie équivalente à une fonction donnée est un problème indéterminé, mais qui n'a plus qu'une seule solution lorsque l'on s'impose l'obligation de choisir les fractions intégrantes qui, pour de petites valeurs de la variable, donnent la plus grande approximation possible.

Soit en effet $\varphi(x)$ une fonction de x, et a la valeur qu'elle prend pour $x=0$; posons

$$\varphi(x)=\frac{a}{1+y},$$

y étant nul avec x. Soit b la limite du rapport $\frac{y}{x}$, lorsque x tend vers zéro; posons

$$y=\frac{bx}{1+z}.$$

Soit c la limite de $\frac{z}{x}$ lorsque x tend vers zéro; posons

$$z=\frac{cx}{1+u}.$$

En continuant ainsi indéfiniment, on obtiendra, pour exprimer $\varphi(x)$, une fraction

continue de la forme

$$\cfrac{a}{1+\cfrac{bx}{1+\cfrac{cx}{1+\cfrac{dx}{1+\ddots}}}}$$

qui est la plus avantageuse que l'on puisse employer pour de petites valeurs de x.

Il est bien entendu que si l'une des quantités désignées dans le calcul précédent par y, z, u,..., était comparable à une puissance de x dont l'exposant fût différent de l'unité, c'est-à-dire si l'une des quantités a, b, c,..., était nulle ou infinie, il faudrait la représenter par une fonction de la forme

$$\frac{kx^m}{1+t},$$

et la fraction intégrante correspondante aurait alors pour facteur au numérateur une puissance de x.

427. Considérons, par exemple, la fonction $(1+x)^m$; posons

$$(1+x)^m = \frac{1}{1+y},$$

et par conséquent

$$y = \frac{1-(1+x)^m}{(1+x)^m}.$$

Le dénominateur de cette fraction se réduit à l'unité pour $x=0$, et le rapport $\frac{y}{x}$ a pour limite la dérivée du numérateur, c'est-à-dire a la valeur de

$$-m(1+x)^{m-1},$$

pour $x=0$, ou $-m$.

Posons donc

$$(1+x)^m = \cfrac{1}{1-\cfrac{mx}{1+z}},$$

on en déduit

$$z = -\frac{mx(1+x)^m}{1-(1+x)^m} - 1,$$

en remplaçant $(1+x)^m$ par son développement, on trouve aisément que, pour

$x = 0$, $\frac{z}{x} = \frac{m+1}{2}$, on a donc

$$(1+x)^m = \cfrac{1}{1 - \cfrac{mx}{1 + \cfrac{\frac{(m+1)}{2}x}{1+u}}}$$

La même méthode, indéfiniment applicable, fournira autant de fractions que l'on voudra, mais elle paraît peu propre à montrer la loi de formation que nous obtiendrons bientôt d'une autre manière.

428. Considérons encore la fonction

$$y = \text{arc tang } x.$$

Lorsque x est infiniment petit, y est égal à x; posons donc

$$y = \frac{x}{1+y_1};$$

on en conclut

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+y_1} - \frac{x}{(1+y_1)^2}\frac{dy_1}{dx}.$$

Remplaçons $\frac{dy}{dx}$ par sa valeur $\frac{1}{1+x^2}$, et chassant les dénominateurs, nous aurons

$$x(1+x^2)\frac{dy_1}{dx} - x^2(1+y_1) + y_1(1+y_1) = 0. \tag{1}$$

Pour une valeur infiniment petite de x, on sait que la différence $y - x$ est du troisième ordre; il en résulte que y_1 est infiniment petit du second ordre; mais l'équation précédente suffit pour le démontrer en déterminant en même temps sa valeur approchée. Posons en effet

$$y = \alpha x^m,$$

m étant une constante inconnue et α une fonction de x, qui reste finie lorsque x est infiniment petit. L'équation (1) deviendra (45)

$$x(1+x^2)(m\alpha x^{m-1})(1+\varepsilon) - x^2(1+\alpha x^m) + \alpha x^m(1+\alpha x^m) = 0,$$

ε étant infiniment petit avec x. Si dans cette équation on suppose x infiniment petit, le premier terme est d'ordre m, le second du second ordre, et le troisième d'ordre m. Or il est évident que la somme des coefficients des termes de l'ordre le plus élevé doit être nulle; on doit donc avoir, si m est moindre que 2,

$$1 = 0,$$

ce qui est impossible, et si m surpasse 2,

$$m\alpha + \alpha = 0,$$

ce qui est également impossible puisque α a, par hypothèse, une valeur finie. Il faut donc prendre $m = 2$, et l'on a alors

$$2\alpha - 1 + \alpha = 0,$$

ou

$$\alpha = \frac{1}{3}.$$

La valeur approchée de y_1 est donc $y_1 = \frac{x^2}{3}$ et nous poserons

$$y_1 = \frac{x^2}{3 + y_2},$$

y_2 étant infiniment petit avec x.

On verra sans peine que y_2 satisfait à l'équation

$$x(1 + x^2)\frac{dy_2}{dx} - x^2(4 + y_2) + (3 + y_2)y_2 = 0.$$

On en conclut que, pour une valeur infiniment petite de x, y_2 est du second ordre et a pour valeur approchée $\frac{4}{5}x^2$; posons donc

$$y_2 = \frac{4x^2}{5 + y_3}.$$

On verra de même que y_3 satisfait à l'équation

$$x(1 + x^2)\frac{dy_3}{dx} - (9 + y_3)x^2 - (5 + y_3)y_3 = 0,$$

et l'on en déduira que, pour une valeur infiniment petite de x, la valeur approchée de y_3 est $\frac{9x^2}{7}$; on posera donc

$$y_3 = \frac{9x^2}{7 + y_4},$$

et l'on aura, en continuant de même,

$$\text{arc tang } x = \cfrac{x}{1 + \cfrac{x^2}{3 + \cfrac{4x^2}{5 + \cfrac{9x^2}{7 + \cfrac{16x^2}{9 +}}}}}$$

429. La transformation des séries est souvent la méthode la plus commode pour obtenir les développements sous forme de fraction continue et en étudier la loi. Nous en indiquerons quelques exemples.

Citons d'abord la transformation de la série

$$(1)\qquad \varphi(z)=1+\frac{a}{z}+\frac{1}{2}\frac{a^2}{z(z+1)}+\frac{1}{1.2.3}\frac{a^3}{z(z+1)(z+2)}+\cdots$$

donnée par Legendre dans une Note de sa *Géométrie*, et dont il a déduit des conséquences remarquables.

On déduit de l'équation (1)

$$\varphi(z+1)=1+\frac{a}{z+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2}{(z+1)(z+2)}+\cdots;$$

en retranchant les deux équations membre à membre et effectuant la soustraction des termes correspondants dans les seconds membres, on a

$$\varphi(z)-\varphi(z+1)=\frac{a}{z(z+1)}+\frac{a^2}{z(z+1)(z+2)}+\frac{1}{2}\frac{a^3}{z(z+1)(z+2)(z+3)}+\cdots,$$

c'est-à-dire, d'après la définition de $\varphi(z)$,

$$(2)\qquad \varphi(z)-\varphi(z+1)=\frac{a}{z(z+1)}\varphi(z+2).$$

Divisons par $\varphi(z+1)$ les deux membres de cette équation et posons

$$\frac{a}{z}\frac{\varphi(z+1)}{\varphi(z)}=\psi(z),$$

l'équation (2) devient, comme on le vérifie aisément,

$$(3)\qquad \psi(z)=\frac{a}{z+\psi(z+1)}.$$

En remplaçant successivement dans cette équation z par $z+1$, $z+2$, .., on aura

$$\psi(z+1)=\frac{a}{(z+1)+\psi(z+2)},$$

$$\psi(z+2)=\frac{a}{(z+2)+\psi(z+3)},$$

et par conséquent

$$(4)\qquad \psi(z)=\cfrac{a}{z+\cfrac{a}{(z+1)+\cfrac{a}{(z+2)+\cfrac{a}{(z+3)+}}}}$$

$\psi(z)$, d'après sa définition, représentant le quotient

$$(5)\qquad \frac{a}{z}\,\frac{1+\dfrac{a}{(z+1)}+\dfrac{1}{2}\dfrac{a^2}{(z+1)(z+2)}+\cdots}{1+\dfrac{a}{z}+\dfrac{1}{2}\dfrac{a^2}{z(z+1)}+\cdots}.$$

Si l'on pose $z=\frac{1}{2}$, la fraction continue peut évidemment se mettre sous la forme

$$\cfrac{2a}{1+\cfrac{4a}{3+\cfrac{4a}{5+\cfrac{4a}{7+\cfrac{4a}{9+\ddots}}}}},$$

dans laquelle les numérateurs, excepté le premier, sont égaux à $4a$, et les dénominateurs forment la suite des nombres impairs; quant à la fonction $\psi(z)$ représentée par cette fraction, elle devient, par l'hypothèse $z=\frac{1}{2}$,

$$2a\,\frac{1+\dfrac{4a}{2.3}+\dfrac{16a^2}{2.3.4.5}+\dfrac{64a^3}{2.3\,4.5.6.7}+\cdots}{1+\dfrac{4a}{2}+\dfrac{16a^2}{2.3.4}+\dfrac{64a^3}{2.3.4.5.6}+\cdots}.$$

Il est aisé de voir que cette fraction équivaut à

$$\sqrt{a}\,\frac{e^{2\sqrt{a}}-e^{-2\sqrt{a}}}{e^{2\sqrt{a}}+e^{-2\sqrt{a}}}.$$

On a donc

$$2\sqrt{a}\,\frac{e^{2\sqrt{a}}-e^{-2\sqrt{a}}}{e^{2\sqrt{a}}+e^{-2\sqrt{a}}}=\cfrac{4a}{1+\cfrac{4a}{3+\cfrac{4a}{5+\cfrac{4a}{7+\ddots}}}}$$

Si l'on pose $4a=x^2$, on en conclut

$$\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}=\cfrac{x}{1+\cfrac{x^2}{3+\cfrac{x^2}{5+\cfrac{x^2}{7+\ddots}}}}.$$

Si l'on suppose $x = \frac{1}{2}$, cette formule donne

$$\frac{e^{\frac{1}{2}} - e^{-\frac{1}{2}}}{e^{\frac{1}{2}} + e^{-\frac{1}{2}}} = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{14 + \cdots}}}},$$

ou

$$\frac{e^{\frac{1}{2}} + e^{-\frac{1}{2}}}{e^{\frac{1}{2}} - e^{-\frac{1}{2}}} = 2 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{14 + \cdots}}}.$$

Or on a

$$\frac{e^{\frac{1}{2}} + e^{-\frac{1}{2}}}{e^{\frac{1}{2}} - e^{-\frac{1}{2}}} = 1 + \frac{2e^{-\frac{1}{2}}}{e^{\frac{1}{2}} - e^{-\frac{1}{2}}} = 1 + \frac{2}{e - 1},$$

par conséquent

$$\frac{2}{e-1} = 1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{14 + \cdots}}},$$

et

$$\frac{e-1}{2} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{14 + \cfrac{1}{18 + \cdots + \cfrac{1}{4n+2} + \cdots}}}}}.$$

Cette formule, due à Euler, est la plus avantageuse que l'on puisse employer pour le calcul du nombre e.

430. La méthode précédente a beaucoup d'analogie avec celle que Gauss a suivie pour réduire en fraction continue la série très-générale

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \frac{\alpha.\beta}{1.\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1).\beta(\beta+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)}x^2 + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2).\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1.2.3.\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}x^3 + \ldots,$$

qui, pour des valeurs convenablement choisies de α, β, γ, peut représenter la plupart des développements célèbres obtenus jusqu'ici.

On vérifie aisément, en constatant l'identité des coefficients des mêmes puissances de x dans les deux membres, l'égalité

$$(1) \qquad F(\alpha, \beta+1, \gamma+1, x) - F(\alpha, \beta, \gamma, x) = \frac{\alpha(\gamma-\beta)}{\gamma(\gamma+1)}x.F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+2, x).$$

Si donc on pose

$$\frac{F(\alpha, \beta+1, \gamma+1, x)}{F(\alpha, \beta, \gamma, x)} = G(\alpha, \beta, \gamma, x),$$

on aura aussi, en remarquant que la fonction F est symétrique par rapport aux lettres α et β,

$$\frac{F(\alpha+1, \beta, \gamma+1, x)}{F(\alpha, \beta, \gamma, x)} = \frac{F(\beta, \alpha+1, \gamma+1, x)}{F(\beta, \alpha, \gamma, x)} = G(\beta, \alpha, \gamma, x).$$

L'équation (1), divisée par $F(\alpha, \beta+1, \gamma+1, x)$, prend la forme

$$1 - \frac{1}{G(\alpha, \beta, \gamma, x)} = \frac{\alpha(\gamma-\beta)}{\gamma(\gamma+1)} x\, G(\beta+1, \alpha, \gamma+1, x),$$

ou

$$(2) \qquad G(\alpha, \beta, \gamma, x) = \frac{1}{1 - \dfrac{\alpha(\gamma-\beta)}{\gamma(\gamma+1)} x . G(\beta+1, \alpha, \gamma+1, x)}.$$

La même formule donne par de simples changements de lettres

$$G(\beta+1, \alpha, \gamma+1, x) = \frac{1}{1 - \dfrac{(\beta+1)(\gamma+1-\alpha)}{(\gamma+1)(\gamma+2)} x . G(\alpha+1, \beta+1, \gamma+2, x)}.$$

La fonction G qui figure au dénominateur de cette dernière équation s'exprimera à son tour à l'aide de la même formule, et l'on a enfin

$$(3) \qquad G(\beta, \alpha, \gamma, x) = \cfrac{1}{1 - \cfrac{ax}{1 - \cfrac{bx}{1 - \cfrac{cx}{1 - \cfrac{dx}{1 - \cfrac{ex}{1 - \ddots}}}}}},$$

où l'on a posé

$$a = \frac{\alpha(\gamma-\beta)}{\gamma(\gamma+1)}, \qquad b = \frac{(\beta+1)(\gamma+1-\alpha)}{(\gamma+1)(\gamma+2)},$$

$$c = \frac{(\alpha+1)(\gamma+1-\beta)}{(\gamma+2)(\gamma+3)}, \qquad d = \frac{(\beta+2)(\gamma+2-\alpha)}{(\gamma+3)(\gamma+4)},$$

$$e = \frac{(\alpha+2)(\gamma+2-\beta)}{(\gamma+4)(\gamma+5)}, \qquad f = \frac{(\beta+3)(\gamma+3-\alpha)}{(\gamma+5)(\gamma+6)},$$

....

.....

Si l'on suppose $\beta = 0$, on a évidemment

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1,$$

et l'équation (3) devient par conséquent, en y remplaçant γ par $\gamma - 1$,

$$(4) \qquad F(\alpha, 1, \gamma, x) = \cfrac{1}{1 - \cfrac{ax}{1 - \cfrac{bx}{1 - \cfrac{cx}{1 - \cfrac{dx}{1 - \ddots}}}}},$$

où

$$a = \frac{\alpha}{\gamma}, \qquad b = \frac{\gamma - \alpha}{\gamma(\gamma + 1)},$$

$$c = \frac{(\alpha + 1)\gamma}{(\gamma + 1)(\gamma + 2)}, \qquad d = \frac{2(\gamma + 1 - \alpha)}{(\gamma + 2)(\gamma + 3)},$$

$$e = \frac{(\alpha + 2)(\gamma + 1)}{(\gamma + 3)(\gamma + 4)}, \qquad f = \frac{3(\gamma + 2 - \alpha)}{(\gamma + 4)(\gamma + 5)},$$

et la double loi de formation de a, c, e,..., et de b, d, f,..., est évidente.

431. L'équation précédente fournit le développement de plusieurs fonctions simples.

On a, comme il est facile de s'en assurer,

$$(1 + x)^n = F(-n, 1, 1, -x),$$

et la formule (4) donne par conséquent en y faisant $\alpha = -n$, $\gamma = 1$, et remplaçant x par $-x$,

$$(1 + x)^n = \cfrac{1}{1 - \cfrac{nx}{1 + \cfrac{\frac{(n+1)}{2}x}{1 - \cfrac{\frac{n-1}{2.3}x}{1 + \cfrac{\frac{2(n+2)}{3.4}x}{1 - \cfrac{\frac{2(n-2)}{4\,5}x}{1 - \ddots}}}}}}.$$

432. On a

$$l(1 + x) = x F(1, 1, 2, -x),$$

par conséquent

$$l(1+x)=\cfrac{x}{1+\cfrac{\frac{1}{2}x}{1+\cfrac{\frac{1}{6}x}{1+\cfrac{\frac{2}{6}x}{1+\cfrac{\frac{2}{10}x}{1+\cfrac{\frac{3}{10}x}{1+\cfrac{\frac{3}{14}x}{1+\cdots+\cfrac{\frac{n}{4n-2}x}{1+\cfrac{\frac{n}{4n+2}x}{1+\ddots}}}}}}}}}$$

433. Le développement de e^x est la limite de l'expression

$$\mathrm{F}\left(1, k, 1, \frac{x}{k}\right).$$

Lorsque l'on fait croître k indéfiniment, on en déduit

$$e^x=\cfrac{1}{1-\cfrac{x}{1+\cfrac{\frac{1}{2}x}{1-\cfrac{\frac{1}{6}x}{1+\cfrac{\frac{1}{6}x}{1-\cfrac{\frac{1}{10}x}{1+\cfrac{\frac{1}{10}x}{1+\ddots}}}}}}}$$

EXERCICES.

1. On a

$$e^x = \cfrac{1}{1-\cfrac{x}{1+\cfrac{x}{2-\cfrac{x}{3+\cfrac{2x}{4-\cfrac{2x}{5+\cfrac{3x}{6-\cfrac{3x}{7+\ddots}}}}}}}},$$

l'expression générale des fractions intégrantes étant

$$y_{2r} = \frac{rx}{2r+y_{2r+1}},$$

$$y_{2r+1} = \frac{-rx}{2r+1+y_{2r+2}}.$$

2. On a

$$l(1+x) = \cfrac{x}{1+\cfrac{x}{2+\cfrac{x}{3+\cfrac{2x}{2+\cfrac{2x}{5+\cfrac{3x}{2+\cfrac{3x}{7+\cfrac{4x}{2+\ddots}}}}}}}},$$

l'expression générale des fractions intégrantes étant

$$y_{2r-1} = \frac{rx}{2r+y_{2r}},$$

$$y_{2r} = \frac{rx}{2r+1+y_{2r+1}}.$$

3. On a

$$\operatorname{tang} x = \cfrac{x}{1-\cfrac{x^2}{3-\cfrac{x^2}{5-\cfrac{x^2}{7-\cfrac{x^2}{9-\ddots}}}}}.$$

4. Si l'on pose $\sin \frac{1}{2} x = y$, la fonction

$$\frac{2x - \sin 2x}{\sin^3 x}$$

est équivalente à la série

$$\frac{4}{3} + \frac{4.6}{3.5} y + \frac{4.6.8}{3.5.7} y^2 + \frac{4.6.8.10}{3.5.7.9} y^3 + \dots$$

et à la fraction continue

$$\cfrac{\frac{4}{3}}{1 - \cfrac{\frac{6}{5} y}{1 + \cfrac{\frac{2}{5.7} y}{1 - \cfrac{\frac{5.8}{7.9} y}{1 - \cfrac{\frac{14}{9.11} y}{1 - \cfrac{\frac{7.10}{11.13} y}{1 - \ddots}}}}}}$$

La loi des coefficients $\frac{6}{5}$, $-\frac{2}{5.7}$, $\frac{5.8}{7.9}$, ..., étant la suivante, le $n^{ième}$ terme de cette série est, si n est pair, $\frac{n(n-3)}{(2n+1)(2n+3)}$, et s'il est impair, $\frac{(n+2)(n+5)}{(2n+1)(2n+3)}$.

CHAPITRE VIII.

THÉORIE DES RÉSIDUS.

434. Lorsqu'une fonction $\varphi(x)$ devient infinie pour une valeur particulière a de la variable x dont elle dépend, Cauchy a nommé *résidu* de cette fonction par rapport au nombre a, le coefficient de $\frac{1}{x-a}$ dans le développement de la fonction en série ordonnée suivant les puissances de $x-a$.

Cette définition exige quelques explications. Il peut arriver en effet qu'une même fonction soit représentée par plusieurs séries différentes, toutes ordonnées suivant les puissances positives ou négatives de $x-a$, et dont la convergence corresponde à des limites différentes. Soit, par exemple,

$$\varphi(x)=\frac{1}{x.(x-1)},$$

on a

$$\varphi(x)=\frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{x}}\right)=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^4}+\ldots,$$

et le développement est applicable à toute valeur de x dont le module surpasse l'unité. Mais on a aussi

$$\varphi(x)=-\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}=-\frac{1}{x}-1-x-x^2-x^3-\ldots,$$

cette seconde série étant convergente pour les valeurs de x dont le module est moindre que l'unité. Lors donc qu'on parle sans autre explication du coefficient de $\frac{1}{x}$ dans le développement de la fonction $\frac{1}{x(x-1)}$, on doit hésiter entre 0 et -1, qui multiplient $\frac{1}{x}$ dans les deux développements; l'indétermination dans d'autres cas pourrait être beaucoup plus grande.

Nous ajouterons donc, pour compléter la définition, que le développement auquel elle se rapporte doit être convergent pour de petites valeurs de la différence $x-a$, suivant les puissances de laquelle il est ordonné. Dans l'exemple précédent, le second développement est seul convergent pour de petites valeurs de x, et par conséquent le résidu de $\frac{1}{x(x-1)}$ relatif à $x=0$, est -1, et non pas 0.

435. En général nous admettrons que la fonction considérée $\varphi(x)$ devenant infinie pour $x=a$, il existe un nombre entier m tel, que le produit $(x-a)^m \varphi(x)$ ait une limite finie lorsque x tend vers a. Le théorème de Taylor permet alors de développer ce produit en série ordonnée suivant les puissances positives de $x-a$ et convergente pour de petites valeurs de cette différence. Cette série divisée par $(x-a)^m$ sera le développement dans lequel $\frac{1}{x-a}$ a pour coefficient le résidu de $\varphi(x)$ relatif à la valeur a de x.

Il faut remarquer que, d'après ces explications, il peut arriver qu'une fonction devienne infinie pour $x=a$, sans avoir un résidu correspondant. Ainsi, par exemple, la fonction $\mathrm{l}x$ devient infinie pour $x=0$. Cependant le produit $x^m \mathrm{l}x$ n'est pour aucune valeur de m, développable en série ordonnée suivant les puissances positives de x, car la $(m+1)^{ième}$ dérivée de ce produit devient infinie pour $x=0$. $\mathrm{l}x$ n'admet donc pas de développement ordonné suivant les puissances positives ou négatives de x, et la définition des résidus ne lui est pas applicable. Nous pouvons en dire autant de la fonction $\frac{1}{\sqrt{x}}$ pour $x=0$, de $\frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}$ pour $x=1$, et d'une infinité d'autres. Tous ces cas sont supposés exclus dans les démonstrations données dans ce chapitre. Nous verrons d'ailleurs qu'ils ne peuvent se présenter quand il s'agit d'une fonction bien définie ayant pour chaque valeur de la variable une valeur unique et déterminée. $\mathrm{l}x$ et $\frac{1}{\sqrt{x}}$ ne remplissent pas cette double condition, et (377) il est impossible de la leur faire remplir en restreignant le sens que l'on y attache.

Détermination d'un résidu.

436. Les explications qui précèdent rendent facile la solution du problème suivant : *Trouver le résidu d'une fonction donnée, pour une valeur de la variable qui la rend infinie.*

Soit $x=a$ une racine de l'équation

$$\frac{1}{\varphi(x)}=0.$$

Soit m son degré de multiplicité, en d'autres termes, soit m le nombre entier tel, que le produit $(x-a)^m \varphi(x)$ ait, pour $x=a$, une valeur finie.

Posons

$$(x-a)^m \varphi(x)=\mathrm{F}(x);$$

$\mathrm{F}(x)$, ne devenant pas infini pour $x=a$, peut en général être développé en série

ordonnée suivant les puissances entières et positives de $(x-a)$. Soit

$$F(x)=F(a+x-a)=F(a)+(x-a)F'(a)+\frac{(x-a)^2}{1.2}F''(a)+\ldots+\frac{(x-a)^m}{1.2.3\ldots m}F^m(a)+\ldots;$$

on en déduit

$$\varphi(x)=\frac{F(x)}{(x-a)^m}=\frac{F(a)}{(x-a)^m}+\frac{F'(a)}{(x-a)^{m-1}}+\frac{F''(a)}{1.2.(x-a)^{m-2}}+\ldots$$
$$+\frac{F^{m-1}(a)}{1.2.3\ldots(m-1)(x-a)}+\frac{F^m(a)}{1.2.3\ldots m}+\ldots,$$

et le coefficient de $\frac{1}{x-a}$, c'est-à-dire le résidu de $\varphi(x)$ relatif à la valeur a de x, est

$$\frac{F^{m-1}(a)}{1.2.3\ldots(m-1)}=\frac{1}{1.2.3\ldots(m-1)}\cdot\left\{\frac{d^{m-1}[\varphi(x).(x-a)^m]}{dx^{m-1}}\right\}_{x=a}.$$

Lorsque le nombre m se réduit à l'unité, le résidu de $\varphi(x)$ prend la forme

$$[(x-a)\varphi(x)]_{x=a}.$$

Supposons que, dans ce cas, la fonction $\varphi(x)$ soit une fraction $\frac{f(x)}{\psi(x)}$ dont l'hypothèse $x=a$ annule le dénominateur $\psi(x)$. Le résidu est la limite du produit

$$\frac{f(x)}{\psi(x)}(x-a),$$

lorsque x tend vers a, et cette limite est évidemment

$$\frac{f(a)}{\psi'(a)};$$

le résidu est donc égal au numérateur divisé par la dérivée du dénominateur, mais cette règle n'est applicable qu'au cas où a est une racine simple de l'équation $f(x)=0$.

437. Pour appliquer les règles précédentes, cherchons le résidu de la fonction $\cot\frac{1}{x}$ pour la valeur $x=\frac{1}{n\pi}$ qui la rend infinie.

Le produit

$$\left(x-\frac{1}{n\pi}\right)\cot\frac{1}{x}$$

a, pour $x=\frac{1}{n\pi}$, une limite finie. Si l'on pose en effet

$$x=\frac{1}{n\pi+h},$$

h étant infiniment petit, $\cot\frac{1}{x}$ peut être remplacé par $\frac{1}{h}$, et le produit

$$\frac{1}{h}\left(\frac{1}{n\pi+h}-\frac{1}{n\pi}\right)$$

a évidemment pour limite $-\frac{1}{n^2\pi^2}$, qui est par conséquent le résidu demandé.

Cherchons encore le résidu de

$$\frac{1}{x^2\tang x}, \tag{1}$$

relatif à $x=0$. Le produit de la fonction par x^3 ayant dans ce cas une limite finie, le résidu est la valeur que prend, pour $x=0$, l'expression

$$\frac{1}{1.2}\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{x}{\tang x}\right).$$

Or on a

$$\frac{d}{dx}\cdot\frac{x}{\tang x}=\frac{\tang x-\dfrac{x}{\cos^2 x}}{\tang^2 x}=\frac{\sin x\cos x-x}{\sin^2 x},$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\cdot\frac{x}{\tang x}=\frac{(\cos^2 x-\sin^2 x-1)\sin^2 x-2\sin x\cos x(\sin x\cos x-x)}{\sin^4 x} \tag{2}$$

$$=\frac{-2\sin^4 x-2\sin^2 x\cos^2 x+2x\sin x\cos x}{\sin^4 x}.$$

Lorsque x est très-petit, on a, en négligeant les infiniment petits du cinquième ordre,

$$\sin^4 x=x^4,$$

$$\sin^2 x\cos^2 x=\left(x-\frac{x^3}{6}\right)^2\left(1-\frac{x^2}{2}\right)^2=x^2-\frac{x^4}{3}-x^4=x^2-\frac{4}{3}x^4,$$

$$x\sin x\cos x=x\left(x-\frac{x^3}{6}\right)\left(1-\frac{x^2}{2}\right)=x^2-\frac{x^4}{2}-\frac{x^4}{6}=x^2-\frac{2}{3}x^4,$$

et par la substitution de ces valeurs, la fraction (2) se réduit à $-\frac{2}{3}$ qui est sa limite; le résidu est donc égal à $-\frac{1}{3}$.

Notations de Cauchy.

438. Cauchy a représenté le résidu d'une fonction $\varphi(x)$ par le signe $\int$; mais, comme il importe d'indiquer à quelle racine de l'équation $\frac{1}{\varphi(x)}=0$ se rapporte le

résidu considéré, il a proposé de mettre le facteur en évidence en le plaçant entre doubles parenthèses.

$$\int \frac{\varphi(x).(x-a)}{[(x-a)]}$$

est, d'après cela, le résidu de la fonction $\varphi(x)$ relatif à la valeur $x=a$, pour laquelle cette fonction devient infinie.

En l'absence de toute indication analogue, $\int \varphi(x)$ désigne la somme des résidus relatifs à toutes les racines de l'équation $\frac{1}{\varphi(x)}=0$. Cauchy le désignait sous le nom de *résidu intégral*. Pour indiquer la somme des résidus relatifs à quelques-unes seulement des racines de l'équation $\frac{1}{\varphi(x)}=0$, on place entre parenthèses les facteurs correspondants à ces racines.

$$\int \frac{\varphi(x).(x-a)\,(x-b)\,(x-c)}{[(x-a)]\,[(x-b)]\,[(x-c)]}$$

désigne, d'après cela, la somme des résidus de la fonction $\varphi(x)$, pris successivement par rapport à a, b, c.

Pour indiquer la somme des résidus relatifs à celles des racines dont les parties réelles sont comprises entre deux limites α et α' et les coefficients de $\sqrt{-1}$ entre β et β', on écrit

$$\int_{\beta\ \alpha}^{\beta'\ \alpha'} \varphi(x);$$

mais, en adoptant cette notation, on convient de ne compter que la moitié des résidus relatifs aux racines pour lesquelles une des limites est atteinte, et le quart seulement de ceux pour lesquels la partie réelle et le coefficient de $\sqrt{-1}$ atteignent l'un et l'autre la limite indiquée.

Le but de ces dernières conventions est de permettre l'emploi de la formule suivante, qui sans cela serait soumise à des restrictions :

$$\int_{\beta\ \alpha}^{\beta'\ \alpha'} \varphi(x) = \int_{\beta\ \alpha}^{b\ a} \varphi(x) + \int_{\beta\ a}^{b\ \alpha'} \varphi(x) + \int_{b\ \alpha}^{\beta'\ a} \varphi(x) + \int_{b\ a}^{\beta'\ \alpha'} \varphi(x),$$

où a est supposé compris entre α et α', et b entre β et β'.

Si l'on représente, en effet, une expression imaginaire $x+y\sqrt{-1}$, par le point du plan dont les coordonnées sont x et y, le premier membre de cette égalité est la somme des résidus relatifs aux racines correspondantes à des points situés dans l'in-

térieur d'un certain rectangle, et le second membre est la somme des résidus relatifs aux racines qui correspondent à des points intérieurs respectivement à quatre rectangles plus petits, dans lesquels on peut décomposer le premier. L'égalité est donc évidente, pourvu que l'on ne compte que la moitié des résidus relatifs aux points situés sur les lignes de partage, et qui évidemment figurent deux fois dans la somme, et si la fonction devient infinie pour $x = a + b\sqrt{-1}$, le résidu relatif à cette valeur se trouvant quatre fois dans la somme, devra dans chaque terme, conformément à notre convention, être multiplié par $\frac{1}{4}$.

Théorèmes relatifs aux résidus.

439. *Si la fonction* $\varphi(x)$ *devient infinie pour* $x = a$, *la différence*

$$\varphi(x) - \sum \frac{\varphi(z)(z-a)}{(x-z)((z-a))} \tag{1}$$

a toujours une valeur finie quand on y suppose $x = a$.

En d'autres termes, pour faire disparaître d'une fonction $\varphi(x)$ la partie qui devient infinie pour $x = a$, il suffit d'en retrancher le résidu de $\frac{\varphi(z)}{x-z}$ relatif à $z = a$.

Supposons la fonction $\varphi(x)$ développable en série de la forme

$$\varphi(x) = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_m}{(x-a)^m} + B + B_1(x-a) + B_2(x-a)^2 + \ldots, \tag{2}$$

on a, en remplaçant x par z, et divisant par $x - z$,

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(z)}{x-z} = {} & \frac{A_1}{(z-a)(x-z)} + \frac{A_2}{(z-a)^2(x-z)} + \ldots \\ & + \frac{A_m}{(z-a)^m(x-z)} + \frac{B}{(x-z)} + \frac{B_1(z-a)}{(x-z)} + \ldots ; \end{aligned} \tag{3}$$

$\frac{1}{x-z}$ est, pour des valeurs de z peu différentes de a, développable en série ordonnée suivant les puissances de $z - a$, et l'on a

$$\frac{1}{x-z} = \frac{1}{(x-a)-(z-a)} = \frac{1}{x-a}\left[1 + \frac{z-a}{x-a} + \frac{(z-a)^2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{(z-a)^m}{(x-a)^m} + \ldots\right].$$

en remplaçant $\frac{1}{x-z}$ par ce développement dans chacun des termes du second membre de l'équation (3), on obtiendra une série dans laquelle le coefficient

de $\frac{1}{z-a}$ est évidemment

$$\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{A_m}{(x-a)^m},$$

où l'on reconnaît la somme des termes qui dans le développement de $\varphi(x)$ deviennent infinis pour $x=a$, et puisque cette somme est le résidu de $\frac{\varphi(z)}{x-z}$, le théorème est démontré.

440. D'après la formule qui exprime (436) le résidu d'une fonction, il est aisé de voir que le résidu de

$$\frac{\varphi(z)}{(x-z)}$$

relatif à $z=a$ est une somme de fractions de la forme $\frac{C_p}{(x-a)^p}$; le théorème de Cauchy fait donc connaître une fraction rationnelle qui, retranchée d'une fonction donnée de x, fait disparaître, pour $x=a$, la partie de cette fonction qui devient infinie. Cherchons, par exemple, la fraction rationnelle qui, retranchée de $\frac{1}{1-\cos x}$, laisse une différence finie lorsqu'on y suppose $x=0$. Cette fraction est, d'après le théorème précédent,

$$\mathcal{L}\frac{z}{(1-\cos z)(x-z)\,[(z)]},$$

c'est-à-dire le résidu de $\frac{1}{(x-z)(1-\cos z)}$, relatif à $z=0$. z est une racine double de l'équation $1-\cos z=0$; le résidu est donc (436) la valeur que prend, pour $z=0$, la dérivée,

$$\frac{d}{dz}\frac{z^2}{(x-z)(1-\cos z)};$$

or on a

$$\frac{d}{dz}\frac{z^2}{(x-z)(1-\cos z)}=\frac{2z(1-\cos z)(x-z)+z^2\sin z\,(x-z)+z^2(1-\cos z)}{(1-\cos z)^2(x-z)^2}$$

$$=\left(\frac{1}{x-z}\right)\frac{2z(1-\cos z)+z^2\sin z}{(1-\cos z)^2}+\frac{z^2}{(x-z)^2(1-\cos z)}.$$

Le premier terme du second membre a pour limite zéro, parce que le dénominateur est un infiniment petit du quatrième ordre, et en remplaçant les sinus et cosinus qui figurent au numérateur par les séries qui les représentent, on voit que les premiers termes qui subsistent après les réductions sont du cinquième ordre. D'ail-

leurs $1-\cos z$ étant égal à $2\sin^2\frac{1}{2}z$, $\frac{z^2}{1-\cos z}$ a pour limite 2, et le second terme se réduit, pour $z=0$, à $\frac{2}{x^2}$; telle est la fonction qui, retranchée de $\frac{1}{1-\cos x}$, laisse un reste dont la valeur est finie pour $x=0$. On dit quelquefois, d'une manière expressive mais peu correcte, que $\frac{2}{x^2}$ est la partie infinie de $\frac{1}{1-\cos x}$.

441. *Décomposition des fractions rationnelles en fractions simples.* — Si l'on retranche d'une fraction rationnelle $\varphi(x)$, le résidu intégral $\int\frac{[(\varphi(z))]}{x-z}$ relatif à toutes les racines de l'équation $\frac{1}{\varphi(z)}=0$, la différence

$$\varphi(x)-\int\frac{[(\varphi(z))]}{x-z}$$

ne devient infinie, d'après le théorème précédent, pour aucune des valeurs de x qui rendent infinie la fonction $\varphi(x)$; et comme un résidu n'est jamais infini, cette différence, qui évidemment est une fonction rationnelle de x, ne devient infinie pour aucune valeur finie de la variable : elle se réduit par conséquent à une fonction entière, et le résidu intégral

$$\int\frac{[(\varphi(z))]}{(x-z)},$$

est par suite la somme des fractions simples qui figurent dans la décomposition de $\varphi(x)$. Lorsque dans $\varphi(x)$ le degré du dénominateur surpasse celui du numérateur, l'expression n'a pas de partie entière, et l'on a

$$\varphi(x)=\int\frac{[(\varphi(z))]}{(x-z)}.$$

Soit, par exemple,

$$\varphi(x)=\frac{1}{(x-1)^2(x+1)},$$

on aura

$$\frac{1}{(x-1)^2(x+1)}=\int\frac{1}{(x-z)\,[(z+1)]\,[(z-1)]^2}=\int\frac{1}{(x-z)(z-1)^2\,[(z+1)]}$$
$$+\int\frac{1}{(x-z)(z+1)\,[(z-1)]^2},$$

mais on a (436)

$$\int\frac{1}{(x-z)\,(z-1)^2\,[(z+1)]}=\frac{1}{4(x+1)},$$
$$\int\frac{1}{(x-z)(z+1)\,[(z-1)]^2}=-\frac{1}{4(x-1)}+\frac{1}{2(x-1)^2},$$

par conséquent

$$\frac{1}{(x+1)(x-1)^2} = \frac{1}{4}\frac{1}{(x+1)} - \frac{1}{4(x-1)} + \frac{1}{2(x-1)^2}.$$

Somme des résidus d'une fonction rationnelle.

442. Reprenons l'équation

$$\varphi(x) = \sum \frac{[(\varphi(z))]}{(x-z)}, \tag{1}$$

qui suppose seulement que la fonction rationnelle $\varphi(x)$ s'annule pour une valeur infinie de x. Multiplions les deux membres par x et remarquons que les résidus dont la somme forme le second membre étant pris par rapport aux valeurs de la lettre z qui rendent $\varphi(z)$ infini, la multiplication par x peut s'effectuer sous le signe $\sum$; nous aurons

$$x\varphi(x) = \sum \frac{[\varphi(z)]}{1 - \frac{z}{x}}, \tag{2}$$

et si l'on fait croître x indéfiniment, cette équation devient

$$x\varphi(x) = \sum \varphi(z). \tag{3}$$

Si le produit $x\varphi(x)$ s'annule comme $\varphi(x)$ pour une valeur infinie de x, ou, en d'autres termes, si le degré du dénominateur de $\varphi(x)$ surpasse de plus d'une unité celui du numérateur, on aura donc

$$\sum \varphi(z) = 0, \tag{4}$$

c'est-à-dire que la somme de tous les résidus de la fonction $\varphi(z)$ est égale à zéro. Ce théorème ne diffère que par la forme d'une formule importante due à Euler.

Soit

$$\varphi(x) = \frac{x^p}{F(x)},$$

$F(x)$ étant un polynôme de degré supérieur à $p+1$, et dont nous supposerons tous les facteurs inégaux ; $x-a$ étant l'un de ces facteurs, le résidu correspondant à $x=a$ est (436)

$$\frac{a^p}{F'(a)}.$$

Si donc, a, b, c,..., k, l, sont les racines de l'équation $F(x) = 0$, la formule (4) équivaut à

$$\frac{a^p}{F'(a)} + \frac{b^p}{F'(b)} + \cdots + \frac{l^p}{F'(l)} = 0. \tag{5}$$

Cette équation suppose, il ne faut pas l'oublier, que l'exposant p soit inférieur de deux unités au moins au degré du polynôme $F(x)$. Si la différence entre p et le degré du polynôme $F(x)$ est une unité seulement, le premier membre n'est plus nul, et sa valeur est la limite de $\frac{x^{p+1}}{F(x)}$, c'est-à-dire l'inverse du premier coefficient de $F(x)$.

443. Cauchy a complété le théorème précédent en donnant l'expression de la somme des résidus d'une fonction rationnelle, qui n'est pas nulle pour une valeur infinie de la variable. On a, quelle que soit la fonction rationnelle $\varphi(x)$,

$$\mathcal{S}\,\varphi(x) = \mathcal{S}\,\frac{\varphi\left(\frac{1}{z}\right)}{[(z^2)]},$$

la détermination de la somme de tous les résidus, quel que soit leur nombre, étant par là ramenée au calcul d'un résidu unique relatif, comme l'indique la manière dont il est écrit, à la valeur zéro de la variable z.

On a en effet (439)

$$\frac{\varphi\left(\frac{1}{z}\right)}{z^2} = \mathcal{S}\,\frac{\varphi\left(\frac{1}{u}\right)}{[(u^2)]\,(z-u)} + \varpi(z),$$

$\varpi(z)$ ne devenant pas infini pour $z = 0$. On a d'ailleurs

$$\frac{1}{z-u} = \frac{1}{z}\left(1 + \frac{u}{z} + \frac{u^2}{z^2} + \cdots + \frac{u^p}{z^p} + \cdots\right);$$

donc

$$\frac{\varphi\left(\frac{1}{z}\right)}{z^2} = \mathcal{S}\,\frac{\varphi\left(\frac{1}{u}\right)}{[(u^2)]}\frac{1}{z}\left(1 + \frac{u}{z} + \frac{u^2}{z^2} + \cdots + \frac{u^p}{z^p} + \cdots\right) + \varpi(z).$$

La fonction $\varphi(x)$ devenant infinie avec x, l'équation

$$\frac{1}{\varphi\left(\frac{1}{u}\right)} = 0$$

admet la racine $u = 0$. Soit m son degré de multiplicité : les termes qui dans la parenthèse ont un exposant plus grand que $m+1$, ne sont pas infinis pour $u = 0$,

et n'influent par conséquent pas sur le résidu; on peut donc écrire

$$\frac{\varphi\left(\frac{1}{z}\right)}{z^2} = \sum \frac{\varphi\left(\frac{1}{u}\right)}{[(u^2)]}\frac{1}{z}\left(1+\frac{u}{z}+\frac{u^2}{z^2}+\cdots+\frac{u^{m+1}}{z^{m+1}}\right)+\varpi(z),$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{\varphi\left(\frac{1}{z}\right)}{z^2} = \frac{1}{z}\sum\frac{\varphi\left(\frac{1}{u}\right)}{[(u^2)]}+\frac{1}{z^2}\sum\frac{u\varphi\left(\frac{1}{u}\right)}{[(u^2)]}+\frac{1}{z^3}\sum\frac{u^2\varphi\left(\frac{1}{u}\right)}{[(u^2)]}+\cdots+\frac{1}{z^{m+2}}\sum\frac{u^{m+1}\varphi\left(\frac{1}{u}\right)}{[(u^2)]}+\varpi(z).$$

Si l'on pose $\frac{1}{z}=x$ et $z^2\varpi(z)=\mathrm{F}(x)$, il viendra, en divisant les deux membres par x^2,

$$\varphi(x) = \frac{1}{x}\sum\frac{\varphi\left(\frac{1}{u}\right)}{[(u^2)]}+\sum\frac{u\varphi\left(\frac{1}{u}\right)}{[(u^2)]}+\cdots+x^m\sum\frac{u^{m+1}\varphi\left(\frac{1}{u}\right)}{[(u^2)]}+\mathrm{F}(x).$$

Prenons maintenant les résidus des deux membres de cette équation par rapport à x, et pour toutes les racines de l'équation $\frac{1}{\varphi(x)}=0$, il viendra, en ayant égard aux équations évidentes $\sum\frac{1}{x}=1$, $\sum 1=0,\ldots$, $\sum x=0$, $\sum x^m=0$,

$$\sum\varphi(x)=\sum\frac{\varphi\left(\frac{1}{u}\right)}{[(u^2)]}+\sum\mathrm{F}(x).$$

Or $\mathrm{F}(x)$ désigne ici $z^2\varpi(z)$, le produit $x\mathrm{F}(x)$, est par conséquent égal à $z\varpi(z)$, et s'évanouit par conséquent lorsqu'on suppose x infini, c'est-à-dire z égal à zéro; on a donc (**442**)

$$\sum\mathrm{F}(x)=0,$$

et par conséquent enfin

$$\sum\varphi(x)=\sum\frac{\varphi\left(\frac{1}{u}\right)}{[(u^2)]},$$

comme on l'avait annoncé.

Changement de la variable indépendante.

444. Lorsque l'on change la variable au moyen de laquelle une fonction est exprimée, les résidus de la fonction changent en général de valeur. Que l'on con-

sidère, par exemple, la fonction $\frac{1}{x}$ dont le résidu relatif à $x=0$ est l'unité; si l'on pose $x=z^2$, la fonction devient $\frac{1}{z^2}$, et le résidu correspondant à $z=0$ est nul. Les résidus dépendent donc du choix de la variable. Cauchy a démontré le théorème suivant :

Si la fonction $\varphi(x)$ devient infinie pour $x=a$, et que l'on pose $x=\psi(z)$, z_1 étant la valeur de z qui correspond à $x=a$, on a

$$(1) \qquad \int \frac{\varphi(x)(x-a)}{[(x-a)]} = \int \frac{\varphi(z)\psi'(z)(z-z_1)}{[(z-z_1)]}.$$

Supposons d'abord que le produit $(x-a)\varphi(x)$ ait, pour $x=a$, une valeur finie, on a (436)

$$(2) \qquad \int \frac{\varphi(x)(x-a)}{[(x-a)]} = \lim (x-a)\varphi(x),$$

mais

$$(x-a)\varphi(x) = [\psi(z)-\psi(z_1)]\varphi[\psi(z)] = \frac{\psi(z)-\psi(z_1)}{(z-z_1)}\varphi[\psi(z)](z-z_1).$$

Lorsque x tend vers a, z tend vers z_1, et le rapport

$$\frac{\psi(z)-\psi(z_1)}{z-z_1}$$

a pour limite $\psi'(z_1)$, et le produit

$$\psi'(z)\varphi[\psi(z)](z-z_1),$$

a pour limite le résidu de $\psi'(z)\varphi[\psi(z)]$ relatif à $z=z_1$; on a donc

$$(3) \qquad \int \frac{\varphi(x)(x-a)}{[(x-a)]} = \int \frac{\varphi[\psi(z)]\psi'(z)(z-z_1)}{[(z-z_1)]}.$$

On doit remarquer toutefois que le raisonnement précédent serait en défaut, si pour la valeur z_1 de z, $\psi'(z)$ était nul ou infini. Dans ce cas, en effet, $\psi'(z)$ et $\frac{\psi(z)-\psi(z_1)}{z-z_1}$, devenant nuls tous deux, pour $z=z_1$, ne sont pas pour cela des infiniment petits égaux, et il n'est pas permis de les remplacer l'un par l'autre. Si, par exemple, $\psi(z)=z^\mu$, et $z_1=0$, on a,

$$\frac{\psi(z)-\psi(z_1)}{z-z_1} = z^{\mu-1},$$

$$\psi'(z) = \mu z^{\mu-1},$$

et il faut, pour que la formule (3) reste exacte, diviser le second membre par μ.

Supposons en second lieu que, m étant un nombre entier, le produit $\varphi(x)\,(x-a)^m$ ait, pour $x=a$, une limite finie; posons

$$\varphi(x).(x-a)^m = \mathrm{F}(x), \tag{4}$$

nous aurons

$$\begin{aligned}\varphi(x) = {} & \frac{\mathrm{F}(a)}{(x-a)^m} + \frac{\mathrm{F}'(a)}{(x-a)^{m-1}} + \frac{\mathrm{F}''(a)}{1.2.(x-a)^{m-2}} + \cdots \\ & + \frac{\mathrm{F}^{m-1}(a)}{1.2\ldots(m-1)(x-a)} + \frac{\mathrm{F}^m(a)}{1.2.3\ldots m} + \cdots.\end{aligned} \tag{5}$$

Le terme en $\frac{1}{x-a}$ étant ici celui qui nous importe, désignons par $\varpi(x)$ la somme de tous les autres, et écrivons

$$\varphi(x) = \varpi(x) + \frac{\mathrm{F}^{m-1}(a)}{1.2.3\ldots(m-1)(x-a)}.$$

Cette équation devient, par l'introduction de la variable z,

$$\varphi[\psi(z)] = \varpi[\psi(z)] + \frac{\mathrm{F}^{m-1}(a)}{1.2.3\ldots(m-1)}\,\frac{1}{\psi(z)-\psi(z_1)}. \tag{6}$$

Multiplions les deux membres par $\psi'(z)$, et prenons les résidus relatifs à $z=z_1$, nous aurons

$$\int \frac{\varphi[\psi(z)]\psi'(z).(z-z_1)}{((z-z_1))} = \int \frac{\varpi[\psi(z)]\psi'(z).(z-z_1)}{((z-z_1))} + \frac{\mathrm{F}^{m-1}(a)}{1.2.3\ldots(m-1)} \int \frac{\psi'(z)}{((\psi(z)-\psi(z_1))}. \tag{7}$$

Le premier terme du second membre est égal à zéro. Le résidu de $\varpi(x)$ relatif à la valeur a de la variable est en effet égal à zéro, car pour former $\varpi(x)$ on a retranché du développement de $\varphi(x)$ le terme en $\frac{1}{x-a}$. Il en résulte que $\varpi(x)$ est la dérivée d'une fonction développable suivant les puissances de $x-a$, et par conséquent le produit

$$\varpi[\psi(z)]\,[\psi'(z)]$$

est la dérivée par rapport à z de la même fonction qui sera, en général, développable en série ordonnée suivant les puissances de $z-z_1$, et par conséquent le résidu de cette dérivée est (314) égal à zéro.

L'équation précédente se réduit donc à

$$\int \frac{\varphi[\psi(z)].\psi'(z)(z-z_1)}{[(z-z_1)]} = \frac{\mathrm{F}^{m-1}(a)}{1.2.3\ldots m-1} \int \frac{\psi'(z)}{[(\psi(z)-\psi(z_1)]}. \tag{8}$$

Or $\frac{F^{m-1}(a)}{1.2.3\ldots m-1}$ est précisément (436) le résidu de $\varphi(x)$ relatif à $x=a$, et par conséquent le théorème sera démontré si nous prouvons que l'on a

$$\mathcal{L}\frac{\psi'(z)}{\psi(z)-\psi(z_1)}=1.$$

Pour y parvenir, posons

$$1.\frac{\psi(z)-\psi(z_1)}{z-z_1}=\mathcal{F}(z),$$

et par conséquent

$$\frac{\psi'(z)}{\psi(z)-\psi(z_1)}-\frac{1}{z-z_1}=\mathcal{F}'(z).$$

Le résidu de $\frac{1}{z-z_1}$ est égal à l'unité. Quant à celui de $\mathcal{F}'(z)$, il est nul, car en développant $\mathcal{F}(z)$ suivant les puissances de $\frac{1}{z-z_1}$, la dérivée d'aucun terme ne sera de la forme $\frac{A}{z-z_1}$; on a donc

$$\mathcal{L}\frac{\psi'(z)}{\{[(\psi(z)-\psi(z_1)]\}}=1, \tag{9}$$

et l'équation (8) se réduit à

$$\frac{F^{m-1}(a)}{1.2.3\ldots(m-1)}=\mathcal{L}\frac{\varphi[\psi(z)].\psi'(z)(z-z_1)}{[(z-z_1)]}, \tag{10}$$

elle prouve que le résidu de $\varphi(x)$ relatif à la valeur $x=a$, est égal à celui de la fonction transformée $\varphi[\psi(z)]$ multipliée par la dérivée $\psi'(z)$.

Nous devons remarquer toutefois que cette formule est en défaut, comme la formule (3), lorsque $\psi'(z_1)$ est nul ou infini; dans ce cas, en effet, la fraction

$$\frac{\psi(z)-\psi(z_1)}{z-z_1}$$

devient également nulle ou infinie pour $z=z_1$, et son logarithme n'est pas développable en série ordonnée suivant les puissances de $(z-z_1)$.

Cherchons comment on doit alors modifier la formule (10).

445. Supposons que la fraction

$$\frac{\psi(z)-\psi(z_1)}{(z-z_1)^{\mu}},$$

dans laquelle μ désigne un nombre quelconque, prenne, pour $z=z_1$, une valeur

finie différente de zéro ; posons

$$(1) \qquad 1 . \frac{\psi(z) - \psi(z_1)}{(z - z_1)^{\mu}} = \mathrm{F}(z),$$

et par conséquent

$$(2) \qquad \frac{\psi'(z)}{\psi(z) - \psi(z_1)} = \mathrm{F}'(z) + \frac{\mu}{z - z_1}.$$

Si l'on prend les résidus des deux membres de cette équation (2), par rapport à la valeur $z = z_1$, le résidu de $\mathrm{F}'(z)$ étant nul, et celui de $\frac{\mu}{z - z_1}$ égal à μ, on a

$$(3) \qquad \mathcal{E} \frac{\psi'(z)}{\psi(z) - \psi(z_1)} = \mu.$$

Cette équation doit remplacer l'équation (9) du paragraphe précédent, et par conséquent le premier membre de l'équation (10) doit être multiplié par μ.

446. Si l'équation

$$x = \psi(z),$$

qui lie la variable primitive à celle que l'on veut lui substituer, fournit, pour chaque valeur de x, plusieurs valeurs différentes de z_1, il est clair que dans les formules précédentes, z_1 représente seulement l'une d'entre elles, que l'on pourra d'ailleurs choisir arbitrairement. Si donc on veut transformer le résidu intégral

$$(1) \qquad \mathcal{E} \varphi(x),$$

on ne devra pas le regarder comme égal au résidu intégral

$$(2) \qquad \mathcal{E} \varphi[\psi(z)] \psi'(z),$$

relatif à toutes les valeurs de z, mais au quotient de ce résidu par le nombre des valeurs distinctes de z qui correspondent à une même valeur de x.

Si pour une des racines $x = a$ de l'équation $\frac{1}{\varphi(x)} = 0$, μ valeurs de z deviennent égales entre elles, le résidu correspondant n'entre qu'une seule fois dans l'expression (2) ; mais alors, en vertu du paragraphe précédent, il est égal au produit par μ du résidu relatif à $x = a$ qu'il remplace, et la relation entre les expressions (1) et (2) reste par conséquent la même.

Quelques applications de la théorie des résidus.

447. Cauchy a retrouvé plusieurs formules célèbres et importantes en appliquant à des fonctions quelconques les théorèmes démontrés pour les fractions rationnelles. Malgré le peu de rigueur d'une telle extension, nous en donnerons ici quelques exemples.

Considérons la fonction $\cot\frac{1}{x}$, et appliquons-lui la formule démontrée au § 443. Les racines de l'équation

$$\frac{1}{\cot\frac{1}{x}} = 0$$

sont

$$x = \pm\frac{1}{\pi}, \qquad x = \pm\frac{1}{2\pi}, \cdots, \qquad x = \pm\frac{1}{n\pi}\cdots,$$

et le résidu relatif à $\frac{1}{n\pi}$ est (437) $\frac{1}{n^2\pi^2}$; le résidu de $-\frac{\cot z}{z^2}$, relatif à $z = 0$, est $-\frac{1}{3}$; on en conclut

$$0 = -\frac{1}{3} + \frac{2}{\pi^2} + \frac{2}{4\pi^2} + \cdots + \frac{2}{n^2\pi^2} + \cdots, \tag{1}$$

c'est-à-dire

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2}\cdots \tag{2}$$

La formule du paragraphe (443), appliquée à la même fonction $\cot\frac{1}{x}$, donne

$$\cot\frac{1}{x} = \mathcal{E}\frac{\left[\left(\cot\frac{1}{z}\right)\right]}{x - z} + \mathcal{E}\frac{\cot z}{[(z)](1 - xz)}. \tag{3}$$

Or on a pour la valeur $z = \frac{1}{n\pi}$

$$\mathcal{E}\frac{\cot\frac{1}{z}}{x - z} = -\frac{1}{n^2\pi^2}\frac{1}{x - \frac{1}{n\pi}}, \tag{4}$$

$$\mathcal{E}\frac{\cot z}{[(z)](1 - xz)} = x. \tag{5}$$

La formule (3) devient par conséquent, en réunissant les résidus relatifs à $z = \frac{1}{n\pi}$ et à $z = -\frac{1}{n\pi}$,

$$\cot\frac{1}{x} = x - 2x\left(\frac{1}{\pi^2x^2-1} + \frac{1}{4\pi^2x^2-1} + \frac{1}{5\pi^2x^2-1} + \dots\right),$$

ce qui est d'accord avec la formule déjà trouvée (409).

Calcul des fonctions symétriques.

448. Soit $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ une fraction rationnelle quelconque, et $x_1, x_2, \dots, x_n$ les racines, supposées distinctes, de l'équation $\psi(x) = 0$. Si l'on pose

$$\frac{\varphi(x)}{\psi'(x)} = F(x), \tag{1}$$

on aura, pour une racine quelconque x_p,

$$F(x_p) = \mathcal{L}\frac{\varphi(x)(x-x_p)}{\psi(x)[(x-x_p)]}, \tag{2}$$

et par conséquent

$$F(x_1) + F(x_2) + \dots + F(x_n) = \mathcal{L}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}. \tag{3}$$

Le second membre étant la somme de tous les résidus de la fraction $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$, peut (443) être exprimé par un résidu unique, et l'on obtiendra ainsi l'expression d'une fonction symétrique des racines de l'équation $\psi(x) = 0$.

Soit, par exemple,

$$\psi(x) = x^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + \dots + A_m,$$
$$F(x) = x^n;$$

il faudra prendre

$$\varphi(x) = x^n[mx^{m-1} + (m-1)A_1x^{m-2} + \dots + A_{m-1}] = x^n\psi'(x),$$

et la formule (3) devient

$$x_1^n + x_2^n + \dots + x_m^n = \mathcal{L}\frac{x^n\psi'(x)}{\psi(x)}. \tag{4}$$

Mais on a (443)

$$\mathcal{L}\frac{x^n\psi'(x)}{\psi(x)} = \mathcal{L}\frac{\psi'\left(\frac{1}{z}\right)}{[(z)]^{n+2}\psi\left(\frac{1}{z}\right)} = \mathcal{L}\frac{\frac{m}{z^{m-1}} + \frac{(m-1)A_1}{z^{m-2}} + \dots + A_{m-1}}{[(z^{n+2})]\left(\frac{1}{z^m} + \frac{A_1}{z^{m-1}} + \dots + \frac{A_{m-1}}{z} + A_m\right)},$$

que l'on peut écrire

$$\mathcal{E}\frac{x^n\psi'(x)}{\psi(x)}=\mathcal{E}\frac{m+(m-1)A_1z+\ldots+A_{m-1}z^{m-1}}{[(z^{n+1})](1+A_1z+\ldots+A_mz^m)},$$

c'est-à-dire (436)

$$\mathcal{E}\frac{x^n\psi'(x)}{\psi(x)}=\frac{1}{1.2.3\ldots n}\frac{d^n}{dz^n}\left(\frac{m+(m-1)A_1z+\ldots+A_{m-1}z^{m-1}}{1+A_1z+A_2z^2+\ldots+A_mz^m}\right),$$

la variable z devant être remplacée par zéro après les différentiations effectuées.

449. La formule précédente serait d'une application fort pénible, mais on peut la transformer et la remplacer par une autre beaucoup plus élégante. On a trouvé

$$x_1^n+x_2^n+\ldots+x_m^n=\mathcal{E}\frac{\psi'\left(\frac{1}{z}\right)}{[(z^{n+2})]\psi\left(\frac{1}{z}\right)}.$$

Pour transformer ce résidu, remarquons que, pour $z=0$, l'expression

$$\frac{\psi'\left(\frac{1}{z}\right)}{z\psi\left(\frac{1}{z}\right)}$$

a pour limite m; or on a identiquement

$$\mathcal{E}\frac{\psi'\left(\frac{1}{z}\right)}{[(z^{n+2})]\psi\left(\frac{1}{z}\right)}=\mathcal{E}\frac{1}{[(z^{n+1})]}\left[\frac{\psi'\left(\frac{1}{z}\right)}{z\psi\left(\frac{1}{z}\right)}-m\right]+\mathcal{E}\frac{m}{z^{n+1}},$$

et comme on a évidemment

$$\mathcal{E}\frac{m}{[(z^{n+1})]}=0,$$

cette équation se réduit à

$$\mathcal{E}\frac{\psi'\left(\frac{1}{z}\right)}{[(z^{n+2})]\psi\left(\frac{1}{z}\right)}=\mathcal{E}\frac{1}{[(z^{n+1})]}\left[\frac{\psi'\left(\frac{1}{z}\right)}{z\psi\left(\frac{1}{z}\right)}-m\right];$$

mais

$$\frac{\psi'\left(\frac{1}{z}\right)}{z^2\psi\left(\frac{1}{z}\right)}-\frac{m}{z}=-\frac{d\,l.z^m\psi\left(\frac{1}{z}\right)}{dz},$$

donc

$$\mathcal{E}\frac{\psi'\left(\frac{1}{z}\right)}{[(z^{n+2})]\psi\left(\frac{1}{z}\right)}=-\mathcal{E}\frac{1}{z^n}\frac{d\,l.z^m\psi\left(\frac{1}{z}\right)}{dz}=\frac{1}{1.2.3\ldots n-1}\cdot\left[\frac{d^n l.z^m\psi\left(\frac{1}{z}\right)}{dz^n}\right]_{z=0}.$$

Pour calculer la valeur que prend, pour $z=0$, la dérivée $n^{ième}$ de $l\,z^m\psi\left(\frac{1}{z}\right)$, il suffit de développer en série la fonction

$$l\left[z^m\psi\left(\frac{1}{z}\right)\right]=l\,(A_m z^m+A_{m-1}z^{m-1}+\ldots+A_1 z+1),$$

et de multiplier par $1.2.3\ldots n$ le coefficient de z^n; or, en posant

$$u=A_m z^m+A_{m-1}z^{m-1}+\ldots+A_1 z,$$

on a

$$l\,(1+A_1 z+\ldots+A_m z^m)=l\,(1+u)=u-\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}+\ldots+\frac{(-1)^n}{n}u^n+\ldots.$$

Or en nommant p, q, r,..., des nombres entiers inférieurs à n, le coefficient de z^n dans $\frac{(-1)^k u^k}{k}$ est la somme des fractions de la forme

$$\frac{(-1)^k}{k}\frac{1.2.3\ldots k}{(1.2.3\ldots p)(1.2.3\ldots q)\ldots(1.2.3\ldots t)}A_1^p A_2^q\ldots A_m^t,$$

dans lesquelles on a

$$p+q+\ldots+t=k,$$
$$p+2q+\ldots+mt=n,$$

et par conséquent le résidu cherché, c'est-à-dire

$$x_1^n+x_2^n+\ldots+x_m^n,$$

est exprimé par la somme

$$n\sum\frac{(-1)^{p+q+\ldots+t}}{p+q+\ldots+t}\frac{1.2.3\ldots(p+q+\ldots+t)}{(1.2.3\ldots p)(1.2.3\ldots q)\ldots(1.2.3\ldots t)}A_1^p A_2^q\ldots A_n^t.$$

$p, q, \ldots, t$ étant m nombres entiers tels, que

$$p + 2q + \ldots + mt = n.$$

450. La théorie des résidus peut aussi s'appliquer au calcul de quelques fonctions symétriques des solutions d'un système de deux équations à deux inconnues. Soient $\varphi(x, y) = 0$, $\psi(x, y) = 0$, deux équations données entre x et y. Cherchons la somme des valeurs que prend la fonction

$$(1) \qquad \frac{\mathcal{F}(x, y)}{\frac{d\varphi}{dx}\frac{d\psi}{dy} - \frac{d\psi}{dy}\frac{d\varphi}{dx}},$$

pour tous les systèmes de valeurs de x et de y qui satisfont aux deux équations. Le numérateur $\mathcal{F}(x, y)$ étant une fonction quelconque de x et de y, il est digne de remarque que cette somme est toujours nulle, quelle que soit la fonction $\mathcal{F}$, pourvu que son degré soit inférieur de plus de deux unités à la somme des degrés des fonctions φ et ψ.

Si nous attribuons en effet à x une valeur déterminée, l'équation $\varphi(x, y) = 0$ fournira pour y un certain nombre de valeurs correspondantes $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Posons

$$(2) \qquad \frac{f(x, y_1)}{\psi(x, y_1)} + \frac{f(x, y_2)}{\psi(x, y_2)} + \ldots + \frac{f(x, y_n)}{\psi(x, y_n)} = \mathrm{F}(x).$$

On sait que $\mathrm{F}(x)$ est une fonction rationnelle de x; cherchons le résidu intégral de cette fonction $\mathrm{F}(x)$: nous aurons

$$(3) \qquad \int \mathrm{F}(x) = \int \frac{f(x, y_1)}{\psi(x, y_1)} + \int \frac{f(x, y_2)}{\psi(x, y_2)} + \ldots + \int \frac{f(x, y_n)}{\psi(x, y_n)}.$$

Les résidus doivent être pris pour toutes les valeurs de x qui rendent les fonctions infinies, soit en annulant le dénominateur, soit en rendant le numérateur infini.

Les valeurs de x qui annulent les dénominateurs $\psi(x, y_1), \psi(x, y_2), \ldots, \psi(x, y_n)$ forment avec les valeurs correspondantes de $y_1, y_2, \ldots, y_n$ toutes les solutions du système

$$\varphi(x, y) = 0, \quad \psi(x, y) = 0.$$

Calculons d'abord les résidus qui leur correspondent. Soit α l'une de ces valeurs de x, et β la valeur correspondante de y, on a

$$(4) \qquad \int \frac{f(x, y_p)(x - \alpha)}{\psi(x, y_p)\,[(x - \alpha)]} = \frac{f(\alpha, \beta)}{\left[\frac{d\psi(x, y_p)}{dx}\right]_\alpha}.$$

Dans le calcul de la dérivée $\frac{d\psi(x,y_p)}{dx}$, il faut observer que y_p est une fonction de x définie par l'équation $\varphi(x,y)=0$; on a par conséquent

$$\frac{d\psi}{dx}=\frac{d\psi}{dx}+\frac{d\psi}{dy}\frac{dy}{dx},$$

$\frac{dy}{dx}$ étant fourni par l'équation

$$\frac{d\varphi}{dx}+\frac{d\varphi}{dy}\frac{dy}{dx}=0;$$

on en conclut

$$\frac{d\psi}{dx}=\frac{\frac{d\varphi}{dy}\frac{d\psi}{dx}-\frac{d\varphi}{dx}\frac{d\psi}{dy}}{\frac{d\varphi}{dy}},$$

et le résidu relatif à $x=\alpha$ devient

$$\text{(5)}\qquad \mathcal{L}\frac{f(x,y_p)(x-\alpha)}{\psi(x,y_p)[(x-\alpha)]}=\frac{f(\alpha,\beta)\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)_{\alpha,\beta}}{\left(\frac{d\varphi}{dy}\frac{d\psi}{dx}-\frac{d\varphi}{dx}\frac{d\psi}{dy}\right)_{\alpha,\beta}}.$$

Les lettres α, β, placées à droite des parenthèses, indiquent que l'on doit, après les opérations, remplacer x par α et y par β. La fonction $f(x,y)$ est jusqu'ici arbitraire; si nous posons

$$f(x,y)=\frac{\bar{\varphi}(x,y)}{\frac{d\varphi}{dy}},$$

le résidu deviendra

$$\frac{\bar{\varphi}(\alpha,\beta)}{\left(\frac{d\varphi}{dy}\frac{d\psi}{dx}-\frac{d\varphi}{dx}\frac{d\psi}{dy}\right)_{\alpha,\beta}},$$

et la somme de ces résidus est précisément la fonction symétrique que l'on veut calculer.

Le second nombre de l'équation (3) contient encore les résidus relatifs aux valeurs de x qui rendent infini l'un des numérateurs. D'après le choix fait pour la fonction $f(x,y)$ ces valeurs sont celles pour lesquelles on a $\frac{d\varphi}{dy}=0$, et pour lesquelles par conséquent deux racines de l'équation $\varphi(x,y)=0$ deviennent égales entre elles. Or nous allons montrer que les fractions qui répondent à ces deux racines, et qui toutes deux deviennent infinies, ont une somme finie; il sera évi-

dent alors que la somme de leurs résidus est égale à zéro, et par conséquent le second membre de l'équation (3) se réduit à la somme des résidus déjà calculés, c'est-à-dire à la fonction symétrique dont nous cherchons la valeur.

Soient

$$(6) \qquad \frac{\mathcal{F}(x, y_1)}{\frac{d\varphi}{dy_1}\psi(x, y_1)} + \frac{\mathcal{F}(x, y_2)}{\frac{d\varphi}{dy_2}\psi(x, y_2)},$$

les deux termes de (2) qui, pour une même valeur de x, $x = x'$, deviennent infinis en même temps. Si l'on pose $x = x' + \varepsilon$, ε étant infiniment petit, les racines y_1 et y_2, qui, par hypothèse, deviennent égales pour $x = x'$, différeront infiniment peu. Soit

$$y_1 = y' + \eta_1,$$
$$y_2 = y' + \eta_2,$$

$y_1, y_2, \ldots, y_n$ étant déduites de l'équation $\varphi(x, y) = 0$, on aura

$$\varphi(x' + \varepsilon, y' + \eta_1) = 0,$$
$$\varphi(x' + \varepsilon, y' + \eta_2) = 0,$$

et puisque ε, η_1 et η_2 sont infiniment petits, et que l'on a par hypothèse

$$\varphi(x', y') = 0,$$
$$\frac{d\varphi}{dy'} = 0,$$

ces équations se réduisent à

$$\frac{d\varphi}{dx'}\varepsilon + \frac{1}{2}\frac{d^2\varphi}{dy'^2}\eta_1^2 = 0,$$

$$\frac{d\varphi}{dx'}\varepsilon + \frac{1}{2}\frac{d^2\varphi}{dy'^2}\eta_2^2 = 0,$$

par ou l'où voit que η_1 et η_2 peuvent être regardés comme égaux et de signes contraires et infiniment grands par rapport à ε qui est comparable à leur carré. Il résulte de là que les facteurs $\frac{d\varphi}{dy_1}$ et $\frac{d\varphi}{dy_2}$, qui figurent aux dénominateurs des formules (6), sont proportionnels à η_1 et à η_2; $\frac{d\varphi}{dy}$ étant nul en effet pour $x = x', y = y'$, lorsque x' devient $x' + \varepsilon$, et y' $y' + \eta$, il prend la valeur

$$\frac{d^2\varphi}{dy'\,dx'}\varepsilon + \frac{d^2\varphi}{dy'^2}\eta,$$

qui, en négligeant le terme en ε, se réduit à

$$\frac{d^2\varphi}{dy'^2}\eta_1.$$

Si donc on désigne par β_1 et β_2 les fractions

$$\frac{\mathcal{F}(x, y_1)}{\psi(x, y_1)}, \quad \frac{\mathcal{F}(x, y_2)}{\psi(x, y_2)},$$

la somme des deux fractions (6) se réduit à

$$\frac{\beta_1 - \beta_2}{\frac{d^2\varphi}{dy'^2}\eta_1};$$

β_1 et β_2 sont des fonctions de x, qui, pour $x = x'$, prennent la même valeur, et si leur différence est de même ordre que η_1, la somme (6) a une limite finie. Or il en est évidemment ainsi, car, pour obtenir β_1 et β_2, il faut, dans une même fonction, remplacer x par x' et y par $y' + \eta_1, y' - \eta_1$, et il est clair que la différence des valeurs obtenues est proportionnelle à η_1.

Nous pouvons donc réduire le second membre de (3) à la somme des résidus relatifs aux valeurs de x, qui annulent les dénominateurs, et l'on a enfin

$$\int \mathrm{F}(x) = \sum \frac{\mathcal{F}(\alpha, \beta)}{\frac{d\varphi}{d\beta}\frac{d\psi}{d\alpha} - \frac{d\varphi}{d\alpha}\frac{d\psi}{d\beta}}.$$

On sait (442) que le résidu total $\int \mathrm{F}(x)$ est nul pourvu que le produit $x\mathrm{F}(x)$ se réduise à zéro pour une valeur infinie de x; cherchons dans quel cas cette condition est remplie. On a

$$\mathrm{F}(x) = \frac{\mathcal{F}(x, y_1)}{\frac{d\varphi}{dy_1}\psi(x, y_1)} + \frac{\mathcal{F}(x, y_2)}{\frac{d\varphi}{dy_2}\psi(x, y_2)} + \ldots + \frac{\mathcal{F}(x, y_n)}{\frac{d\varphi}{dy_n}\psi(x, y_n)}.$$

Lorsque x augmente indéfiniment, $y_1, y_2, \ldots, y_n$, s'approchent d'être les racines d'une équation homogène en x et y, et leurs rapports à x tendent, en général, vers des limites finies, en sorte que l'ordre de grandeur des diverses fractions qui composent le second membre est celui d'une puissance de x, ayant pour exposant l'excès du degré du numérateur sur celui du dénominateur. Si m est le degré de ψ, et n celui de φ, le dénominateur est de degré $m+n-1$. Si donc $\mathcal{F}$ est de degré $m+n-3$, le second membre est comparable à $\frac{1}{x^2}$, et son produit par x tend vers zéro lors-

que x augmente; on a donc

$$\int F(x) = 0,$$

et par conséquent

$$\sum \frac{\mathfrak{F}(\alpha, \beta)}{\frac{d\varphi}{d\beta}\frac{d\psi}{d\alpha} - \frac{d\varphi}{d\alpha}\frac{d\psi}{d\beta}} = 0.$$

EXERCICES.

1. $\varphi(z)$ désignant une fonction quelconque de z, on a

$$\int [(\varphi(z))] = \int \frac{\varphi\left(\frac{1}{z}\right)}{[(z^2)]}.$$

Si l'on substitue à $\varphi(z)$ la fraction $\frac{f(z)}{z-x}$, on déduit de cette formule

$$f(x) = \int \frac{[(\varphi(z))]}{z-x} + \int \frac{\varphi\left(\frac{1}{z}\right)}{[(z)](1-zx)}.$$

En faisant $f(x) = \cot\frac{1}{x}$, cette formule donne

$$\cot\frac{1}{x} = x - 2x\left(\frac{1}{\pi^2x^2-1} + \frac{1}{4\pi^2x^2-1} + \frac{1}{9\pi^2x^2-1} + \dots\right).$$

2. En appliquant à l'équation $\frac{\sin\pi z}{z} = 0$, la méthode générale indiquée (449) pour obtenir la somme des puissances de degré $-2n$ de ses racines, on a

$$1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \dots = -\frac{\frac{1}{2}}{1.2.3\dots(n-1)} \cdot \left(\frac{d^n.1.\frac{\sin\pi z}{z}}{dz^n}\right)_{z=0};$$

la somme est par conséquent le coefficient de z^n dans le développement du produit

$$-\frac{n}{2}\pi^n 1.\ \frac{z}{\sin z}$$

en série ordonnée suivant les puissances de z.

3. $\varphi(x)$ désignant une fonction paire de la variable x, on a

$$\varphi(0) + \varphi(1) + \varphi(2) + \dots + \varphi(n) + \dots = \int \frac{\varphi(z)}{z} \cdot \left[\left(\frac{z\pi\cos\pi z}{\sin\pi z}\right)\right].$$

On déduit de la formule précédente

$$1+\frac{1}{2^{2m}}+\frac{1}{3^{2m}}+\ldots=-\frac{1}{2}\int\frac{d\,l.\sin\pi z}{dz}\,\frac{1}{((z^{2m}))},$$

$$1+\frac{1}{3^{2m}}+\frac{1}{5^{2m}}+\ldots=-\frac{1}{(2n+1)^{2m}}+\ldots=-\int\frac{d.l\sin\pi z}{dz}\,\frac{1}{(4z+1)^{2m}},$$

$$\frac{1}{s^m}+\frac{1}{(s+1)^m}+\frac{1}{(s-1)^m}+\frac{1}{(s+2)^m}+\ldots=-\int\frac{d.l\sin\pi z}{dz}\,\frac{1}{((s+z))^m}.$$

5. En supposant dans la formule précédente $m=1$, elle se réduit à

$$\frac{1}{s}+\frac{1}{s-1}+\frac{1}{s+1}+\frac{1}{s-2}+\frac{1}{s+2}+\ldots=\pi\cot\pi s.$$

CHAPITRE IX.

ÉTUDE DES EXPRESSIONS DONT LA FORME EST INDÉTERMINÉE ET THÉORIE DES POINTS SINGULIERS.

Fractions qui se présentent sous la forme $\frac{0}{0}$.

451. Lorsque les deux termes d'une fraction, étant fonctions d'une même variable x, deviennent en même temps nuls ou infinis, la fraction prend une forme indéterminée, et il importe souvent de savoir calculer sa véritable valeur, c'est-à-dire la limite vers laquelle elle converge lorsque x approche de la valeur particulière pour laquelle la difficulté se présente.

Soit

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$$

la fraction considérée, et x_0 la valeur particulière pour laquelle on a

$$\varphi(x_0)=0, \quad \psi(x_0)=0;$$

on a (**273**) dans cette hypothèse

$$\frac{\varphi(x_0+h)}{\psi(x_0+h)}=\frac{\varphi'(x_0+\theta h)}{\psi'(x_0+\theta_1 h)},$$

θ et θ_1 étant l'un et l'autre moindres que l'unité; on en conclut, en faisant tendre h vers zéro,

$$\lim \frac{\varphi(x_0+h)}{\psi(x_0+h)}=\frac{\varphi'(x_0)}{\psi'(x_0)}.$$

La limite cherchée est donc égale au rapport des dérivées des deux termes de la fraction considérée.

Si les dérivées $\varphi'(x_0)$ et $\psi'(x_0)$ étaient nulles en même temps que $\varphi(x_0)$ et $\psi(x_0)$, on devrait, pour calculer la limite de la fraction

$$\frac{\varphi(x_0+h)}{\psi(x_0+h)},$$

employer un plus grand nombre de termes de la série de Taylor. Soient pour les

deux fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(x)$, $\varphi^p(x)$ et $\psi^q(x)$ les premières dérivées qui ne s'annulent pas pour $x = x_0$. Le théorème de Taylor donnera

$$\frac{\varphi(x_0+h)}{\psi(x_0+h)} = \frac{\dfrac{h^p}{1.2.3\ldots p}\varphi^p(x_0+\theta h)}{\dfrac{h^q}{1.2.3\ldots q}\psi^q(x_0+\theta h)},$$

et il est clair que, h tendant vers zéro, la limite du second membre est nulle si p surpasse q, infinie si p est moindre que q, et égale à

$$\frac{\varphi^p(x_0)}{\psi^p(x_0)},$$

si l'on a $p = q$.

De là nous déduirons la règle suivante : *Lorsqu'une fraction* $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ *se présente sous la forme* $\frac{0}{0}$ *quand on y suppose* $x = x_0$, *sa véritable valeur est égale au rapport des dérivées* $\frac{\varphi'(x_0)}{\psi'(x_0)}$; *si ce rapport se présente lui-même sous la forme* $\frac{0}{0}$, *il faut y substituer le rapport des secondes dérivées* $\frac{\varphi''(x_0)}{\psi''(x_0)}$, *et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on obtienne deux dérivées qui ne soient pas nulles toutes les deux, leur rapport, qui peut être nul ou infini, est la véritable valeur de* $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$.

La démonstration précédente suppose que la valeur x_0 pour laquelle la fraction considérée prend la forme indéterminée soit une quantité finie ; s'il en était autrement, on ne pourrait pas en effet substituer à la fraction proposée le rapport $\frac{\varphi(x_0+h)}{\psi(x_0+h)}$, et faire tendre ensuite h vers zéro, car x_0 étant infini ne peut pas figurer dans les calculs comme une quantité déterminée. Pour éviter cette difficulté, il suffit de changer de variable. Si l'on pose $x = \frac{1}{y}$, la fraction $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ devient $\dfrac{\varphi\left(\frac{1}{y}\right)}{\psi\left(\frac{1}{y}\right)}$, et c'est alors pour $y = 0$ qu'elle prend la forme indéterminée. On peut alors lui appliquer le théorème général dont la démonstration n'est plus en défaut, et l'on a

$$\lim \frac{\varphi\left(\frac{1}{y}\right)}{\psi\left(\frac{1}{y}\right)} = \lim \frac{-\frac{1}{y^2}\varphi'\left(\frac{1}{y}\right)}{-\frac{1}{y^2}\psi'\left(\frac{1}{y}\right)} = \lim \frac{\varphi'\left(\frac{1}{y}\right)}{\psi'\left(\frac{1}{y}\right)} = \lim \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)},$$

et la règle ne subit par conséquent aucun changement.

452. Lorsqu'une fraction prend la forme $\frac{0}{0}$ pour des valeurs attribuées simulta-

nément à deux variables x et y, elle est, en général, absolument indéterminée, et sa limite dépend de la loi suivant laquelle les deux variables s'approchent des valeurs pour lesquelles la difficulté se présente.

Soit en effet

$$\frac{\varphi(x, y)}{\psi(x, y)}$$

une fraction qui, pour $x=x_0, y=y_0$ prend la forme $\frac{0}{0}$, posons $x=x_0+h, y=y_0+k$, nous aurons, en remarquant que $\varphi(x_0, y_0)$ et $\psi(x_0, y_0)$ sont nuls,

$$\frac{\varphi(x, y)}{\psi(x, y)} = \frac{\varphi(x_0+h, y_0+k)}{\psi(x_0+h, y_0+k)} = \frac{\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)_0 h + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)_0 k + \mathrm{R}}{\left(\frac{d\psi}{dx}\right)_0 h + \left(\frac{d\psi}{dy}\right)_0 k + \mathrm{R}_1}.$$

Lorsque h et k sont infiniment petits, R et R_1 peuvent être négligés, et l'on a

$$\lim \frac{\varphi(x, y)}{\psi(x, y)} = \lim \frac{\frac{d\varphi}{dx} h + \frac{d\varphi}{dy} k}{\frac{d\psi}{dx} h + \frac{d\psi}{dy} k} = \lim \frac{\frac{d\varphi}{dx} + \frac{k}{h}\frac{d\varphi}{dy}}{\frac{d\psi}{dx} + \frac{k}{h}\frac{d\psi}{dy}},$$

et cette expression dépend du rapport $\frac{k}{h}$ qui est entièrement arbitraire.

Fractions qui se présentent sous la forme $\frac{\infty}{\infty}$.

453. Lorsque les deux termes d'une fraction $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ deviennent infinis pour une valeur $x=x_0$ de la variable, on peut écrire cette fraction sous la forme

$$\frac{\left[\frac{1}{\psi(x)}\right]}{\left[\frac{1}{\varphi(x)}\right]}, \tag{1}$$

et alors les deux termes devenant nuls, on rentre dans le cas précédent.

En appliquant la règle on trouve

$$\lim \frac{\frac{1}{\psi(x)}}{\frac{1}{\varphi(x)}} = \lim \frac{-\frac{\psi'(x)}{\psi(x)^2}}{-\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)^2}} = \lim \frac{\psi'(x)}{\varphi'(x)} \cdot \frac{\varphi(x)^2}{\psi(x)^2}. \tag{2}$$

Soit A la limite cherchée de la fraction $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$, l'équation précédente équivaut à

$$\mathrm{A} = \mathrm{A}^2 \lim \frac{\psi'(x)}{\varphi'(x)}, \tag{3}$$

on en conclut

$$A = \lim \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)},$$

et par conséquent la fraction $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ qui se présente sous la forme $\frac{\infty}{\infty}$, peut être remplacée par le rapport des dérivées $\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$.

Le raisonnement précédent est en défaut lorsque la quantité désignée par A est nulle ou infinie : il n'est pas permis en effet, dans ce cas, de supprimer le facteur commun aux deux membres de l'équation (3), on peut s'assurer cependant que la règle reste exacte.

Soit $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ une fraction qui, pour $x = x_0$, prend la forme $\frac{\infty}{\infty}$, et dont la limite est égale à zéro.

Considérons l'expression

$$\frac{\varphi(x) + a\psi(x)}{\psi(x)},$$

qui évidemment se présente aussi sous la forme $\frac{\infty}{\infty}$; il est clair qu'elle a pour limite le nombre arbitraire a; la règle lui est donc applicable et l'on a

$$\lim \frac{\varphi'(x) + a\psi'(x)}{\psi'(x)} = a,$$

et par conséquent

$$\lim \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} = 0,$$

ce qui prouve l'exactitude de la règle.

Si le rapport $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ devient infini, le rapport inverse $\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$ a pour limite zéro, il en est par conséquent de même de $\frac{\psi'(x)}{\varphi'(x)}$, et $\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$ devient infini.

454. On doit remarquer que la règle précédente donne seulement le moyen de substituer une difficulté à une autre. En effet, si pour $x = x_0$, une fonction $\varphi(x)$ devient infinie, sa dérivée devient en même temps infinie, et lorsque le rapport de deux fonctions se présente sous la forme $\frac{\infty}{\infty}$, pour une valeur finie $x = x_0$ de la variable, le rapport des dérivées prend nécessairement la même forme indéterminée.

Soit en effet $x_0 - h$ une valeur fixe de x, aussi voisine que l'on voudra de x_0, et $x_0 - h'$ une valeur variable que nous ferons tendre vers x_0; on a

$$\frac{\varphi(x_0 - h') - \varphi(x_0 - h)}{h - h'} = \varphi'[x_0 - h + \theta(h - h')].$$

Si h' tend vers zéro, h restant fixe, le premier membre augmente indéfiniment; il doit donc en être de même du second, et la dérivée $\varphi'(x)$ devient par conséquent aussi grande que l'on veut pour une valeur de x comprise entre $x_0 - h$ et x_0, et il en résulte évidemment qu'elle est infinie pour $x = x_0$.

455. La démonstration que nous avons donnée suppose l'existence d'une limite déterminée pour la fraction considérée $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$; elle cesse d'être applicable lorsque la quantité désignée par A (453) est en réalité indéterminée. Il peut arriver aussi que le rapport des dérivées soit indéterminé, lors même que la fraction a une limite déterminée. Par exemple

$$\frac{x - \sin x}{x + \cos x}$$

tend évidemment vers l'unité lorsque x augmente indéfiniment, et le rapport des dérivées

$$\frac{1 - \cos x}{1 - \sin x}$$

est tout à fait indéterminé.

Autres formes indéterminées.

456. Lorsqu'une fonction prend pour une valeur particulière de la variable l'une des formes ∞^0, 1^∞, 0^0, $0 \times \infty$, il est toujours facile de ramener aux deux cas précédents la recherche de la véritable valeur. En effet, le logarithme de la fonction se présente évidemment sous la forme $0 \times \infty$ qui se ramène immédiatement à $\frac{0}{0}$ ou à $\frac{\infty}{\infty}$. Il n'y a donc pas là de question véritablement nouvelle.

Quelques exemples.

457. Il nous reste à donner quelques exemples du calcul de la véritable valeur d'une fonction, en les choisissant de manière à montrer comment dans un grand nombre de cas il est avantageux de substituer, aux méthodes générales, des artifices suggérés par l'habitude du calcul.

Déterminer la valeur de $\frac{2}{x} - \cot\frac{1}{2}x$ *pour* $x = 0$. — On a

$$\frac{2}{x} - \cot\frac{1}{2}x = \frac{2 - x\cot\frac{1}{2}x}{x}.$$

Or $x \cot\frac{1}{2}x = \frac{x}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}x}$ qui, pour $x = 0$, a évidemment pour limite 2. La fonction

prend donc la forme $\frac{0}{0}$; le rapport des dérivées est

$$\frac{-\cot\frac{1}{2}x+\dfrac{\frac{1}{2}x}{\sin^2\frac{1}{2}x}}{1}.$$

Le dénominateur ayant une valeur finie, il suffit de chercher, pour $x=0$, la véritable valeur du numérateur qui se présente encore sous la forme indéterminée $\infty-\infty$. Or on a

$$-\cot\frac{1}{2}x+\frac{\frac{1}{2}x}{\sin^2\frac{1}{2}x}=\frac{x-\sin x}{2\sin^2\frac{1}{2}x},$$

et sans recourir à l'emploi des dérivées on voit que $x-\sin x$ ayant pour valeur approchée $\frac{x^3}{6}$, le numérateur est infiniment petit par rapport au dénominateur; la véritable valeur est donc zéro, et, pour $x=0$, la différence $\frac{2}{x}-\cot\frac{1}{2}x$ se réduit à zéro.

458. *Déterminer, pour $x=0$, la véritable valeur de* $\dfrac{\sqrt{a^2+ax+x^2}-\sqrt{a^2-ax+x^2}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}$.

— Au lieu de prendre les dérivées des deux termes, il est plus simple de les développer par la formule du binôme en séries ordonnées suivant les puissances de x, dont l'inspection fera immédiatement connaître la valeur cherchée. On a

$$\sqrt{a^2+ax+x^2}=a\sqrt{1+\frac{x}{a}+\frac{x^2}{a^2}}=a\left(1+\frac{x}{2a}+\frac{3}{8}\frac{x^2}{a^2}+\dots\right),$$

$$\sqrt{a^2-ax+x^2}=a\sqrt{1-\frac{x}{a}+\frac{x^2}{a^2}}=a\left(1-\frac{x}{2a}+\frac{3}{8}\frac{x^2}{a^2}+\dots\right),$$

$$\sqrt{a+x}=\sqrt{a}\sqrt{1+\frac{x}{a}}=\sqrt{a}\left(1+\frac{x}{2a}-\frac{x^2}{8a^2}+\dots\right),$$

$$\sqrt{a-x}=\sqrt{a}\sqrt{1-\frac{x}{a}}=\sqrt{a}\left(1-\frac{x}{2a}+\frac{x^2}{8a^2}+\dots\right).$$

La fonction proposée devient donc, en réduisant les séries à leurs premiers termes,

$$\frac{x}{\frac{x}{\sqrt{a}}}=\sqrt{a},$$

et la véritable valeur est par conséquent $\sqrt{a}$.

459. *Déterminer, pour $x=0$, la véritable valeur de* $\dfrac{l(1+x+x^2)+l(1-x+x^2)}{\sec x-\cos x}$. — Cette fraction, pour $x=0$, se présente sous la forme $\frac{0}{0}$, et il en est de même du rapport des dérivées de ses deux termes. La règle générale prescrirait donc ici deux différentiations; on peut les éviter en remarquant que l'on a

$$\frac{l(1+x+x^2)+l(1-x+x^2)}{\sec x-\cos x}=\frac{\cos x\, l(1+x^2+x^4)}{\sin^2 x}.$$

Le facteur $\cos x$ tendant vers l'unité, n'exerce aucune influence sur la limite ; $\dfrac{\sin^2 x}{x^2}$ tendant vers l'unité, on peut remplacer le dénominateur par x^2, et la limite cherchée est égale à celle de

$$\frac{l(1+x^2+x^4)}{x^2}.$$

Or on a

$$l(1+x^2+x^4)=x^2+x^4-\frac{(x^2+x^4)^2}{2}+\dots,$$

que l'on peut, pour une valeur infiniment petite de x, réduire au premier terme x^2; la limite cherchée est donc l'unité.

460. *Déterminer, pour $x=0$, la véritable valeur de* $\dfrac{x.\sin(\sin x)-\sin^2 x}{x^6}$. — Pour appliquer à cette fraction la règle générale, il faudrait prendre six fois la dérivée de chaque terme; le développement en série du numérateur conduit au même but par un calcul plus facile. On a

$$\sin(\sin x)=\sin x-\frac{\sin^3 x}{6}+\frac{\sin^5 x}{120}-\dots.$$

Dans chacun des termes du second membre, remplaçons $\sin x$ par la série qui le représente, et supprimons les termes dont le degré surpasse 5, et qui, multipliés par x et divisés par x^6, doivent donner un quotient dont la limite est nulle; nous aurons

$$\sin(\sin x)=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-\frac{1}{6}\left(x^3-\frac{x^5}{2}\right)+\frac{x^5}{120}=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{10}.$$

On a aussi, en négligeant cette fois les termes en x^7,

$$\sin^2 x=\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}\right)^2=x^2-\frac{x^4}{3}+\frac{2x^6}{45},$$

et par conséquent, en négligeant toujours les termes en x^7,

$$x\sin(\sin x)-\sin^2 x=x^6\left(\frac{1}{10}-\frac{2}{45}\right)=\frac{x^6}{18};$$

le quotient

$$\frac{x\sin(\sin x)-\sin^2 x}{x^6}$$

a donc pour limite $\frac{1}{18}$.

461. *Déterminer, pour* $x=0$, *la véritable valeur de* $\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$. — L'application directe de la règle générale conduirait dans ce cas à substituer indéfiniment au problème proposé un autre plus compliqué et de même nature. La solution est au contraire très-simple si l'on a recours à des artifices analogues à ceux que nous avons employés dans les cas précédents. En appliquant d'abord la règle générale, on substitue à la fonction proposée le rapport des dérivées

$$\frac{\frac{1}{x}(1+x)^{\frac{1}{x}-1}-(1+x)^{\frac{1}{x}}\frac{l(1+x)}{x^2}}{1}; \tag{1}$$

l'hypothèse $x=0$ rend les deux termes du numérateur infinis, et l'on n'a fait, comme on voit, que substituer une difficulté à une autre.

Pour calculer la véritable valeur de l'expression (1), donnons-lui la forme

$$(1+x)^{\frac{1}{x}-1}\cdot\left[\frac{1}{x}-\frac{(1+x)\,l(1+x)}{x^2}\right].$$

$(1+x)^{\frac{1}{x}-1}$ ayant évidemment pour limite e, il suffit de chercher la véritable valeur de

$$\frac{1}{x}-\frac{(1+x)\,l(1+x)}{x^2}.$$

Remplaçons $l(1+x)$ par la série qui la représente, en négligeant dans le produit $(1+x)\,l(1+x)$ les termes en x^3, nous aurons

$$\frac{1}{x}-\frac{(1+x)\,l(1+x)}{x^2}=\frac{1}{x}-\frac{x+\frac{x^2}{2}}{x^2}=-\frac{1}{2};$$

la limite cherchée est donc $-\frac{1}{2}$, et l'on a par conséquent

$$\lim\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}=-\frac{e}{2}. \tag{2}$$

Cherchons encore la limite de la fonction

$$\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e+\frac{ex}{2}}{x^2}, \tag{3}$$

qui, d'après le calcul précédent, prend pour $x = 0$, la forme $\frac{0}{0}$. Le rapport des dérivées des deux termes est

$$(4) \qquad \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}-1}\left[\frac{1}{x} - \frac{(1+x)\,l(1+x)}{x^2}\right] + \frac{e}{2}}{2x}.$$

Le dénominateur étant ici $2x$, nous pouvons, sans altérer la limite, dans le calcul du numérateur, négliger les termes en x^2.

Occupons-nous d'abord du facteur

$$\frac{1}{x} - \frac{(1+x)\,l(1+x)}{x^2}.$$

En y remplaçant $l(1+x)$ par son développement, on voit que ce facteur, quand on y néglige les termes en x^2, se réduit à $-\frac{1}{2} + \frac{x}{6}$. Le multiplicateur $(1+x)^{\frac{1}{x}-1}$ ayant une limite finie, nous pouvons nous borner à cette approximation; mais il n'est pas permis de remplacer ce multiplicateur par sa limite e, l'erreur commise serait en effet comparable à x, et ne doit pas être négligée. On a, en négligeant les termes en x^2,

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = e - \frac{ex}{2};$$

par conséquent, au même degré d'approximation,

$$(1+x)^{\frac{1}{x}-1} = \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{x}}(1-x) = e - \frac{3}{2}ex.$$

L'expression (4) devient ainsi

$$\frac{\left(e - \frac{3}{2}ex\right)\left(-\frac{1}{2} + \frac{x}{6}\right) + \frac{e}{2}}{2x},$$

dont la limite est $\frac{11e}{24}$, et l'on a enfin

$$\lim \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e + \frac{ex}{2}}{x^2} = \frac{11e}{24}.$$

La valeur approchée de $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ lorsque x est très-petit et que l'on néglige les termes en x^3, est par conséquent

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = e - \frac{ex}{2} + \frac{11ex^2}{24}.$$

Ce sont les trois premiers termes du développement de la fonction.

On parviendrait plus directement au même but par le développement direct. Posons

$$y=(1+x)^{\frac{1}{x}},$$

on a

$$\mathrm{l}y=\frac{1}{x}\mathrm{l}(1+x)=\frac{1}{x}\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\dots\right),$$

donc

$$y=e^{1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+\dots}=e.e^{\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+\dots\right)},$$

et par conséquent

$$y=e\left[1-\left(\frac{x}{2}-\frac{x^2}{3}+\frac{x^3}{4}-\dots\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}-\frac{x^2}{3}+\frac{x^3}{4}-\dots\right)^2\right]-\dots,$$

et les premiers termes sont évidemment

$$y=e\left(1-\frac{x}{2}+\frac{11x^2}{24}\right).$$

Les suivants, qui s'obtiennent sans difficulté, font connaître les limites des expressions

$$\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e+\frac{ex}{2}-\frac{11ex^2}{24}}{x^3},$$

$$\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e+\frac{ex}{2}-\frac{11ex^2}{24}+\frac{11ex^3}{24}}{x^4},$$

dont la première est $\frac{11e}{24}$, et la seconde $\frac{1221}{2880}e$.

THÉORIE DES POINTS SINGULIERS.

Définitions.

462. Un cercle de rayon infiniment petit ayant son centre situé sur une courbe plane, coupe en général celle-ci en deux points que l'on peut regarder comme diamétralement opposés, en ce sens que les rayons qui s'y terminent forment un angle infiniment peu différent de deux droits. Toutes les fois qu'il en est autrement, le centre du cercle est regardé comme un *point singulier*. Cette dénomination comprend :

Les *points de rebroussement*, tels, que le cercle infiniment petit décrit de ces points

comme centre coupe la courbe en deux points dont les rayons forment un angle infiniment petit; on les distingue en points de rebroussement de première et de seconde espèce, suivant que les deux branches de courbe sont situées de côtés différents (*fig.* 1), ou d'un même côté (*fig.* 2), par rapport à la tangente commune;

Fig. 1.

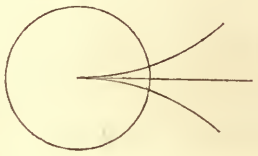
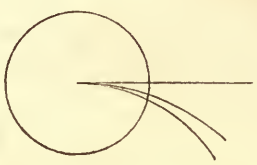


Fig. 2.



Les *points d'arrêt*, tels, que le cercle ne coupe la courbe qu'en un seul point;

Les *points anguleux*, tels, que le cercle coupe la courbe en deux points dont les rayons forment un angle fini.

Les *points multiples*, où se croisent plusieurs branches de courbe, tangentes ou non les unes aux autres, et tels, par conséquent, que le cercle coupe la courbe en plus de deux points;

Les *points isolés*, qui ne sont voisins d'aucun autre, et tels, par conséquent, que le cercle infiniment petit dont on a parlé ne coupe la courbe en aucun point réel.

Caractère analytique des points singuliers.

463. Les points singuliers d'une classe nombreuse de courbes peuvent être découverts à l'aide du théorème suivant :

Si l'équation d'une courbe est $F(x, y) = 0$, *la fonction* F *étant continue et parfaitement déterminée pour des valeurs données de* x *et de* y, *les coordonnées d'un point singulier satisfont nécessairement aux deux équations*

$$\frac{dF}{dx} = 0, \quad \frac{dF}{dy} = 0. \tag{1}$$

Soient en effet a et b les coordonnées d'un point M de la courbe, pour lequel les équations (1) ne soient pas toutes deux satisfaites; soient $\alpha + h$, $\beta + k$, les coordonnées du point d'intersection de la courbe avec un cercle de rayon R ayant son centre en M; posons

$$h = R\cos u, \quad k = R\sin u,$$

ce qui revient à nommer R et u les coordonnées polaires du point d'intersection; en prenant le point M pour pôle et une parallèle à l'axe des X pour axe polaire, on aura

$$F(a + R\cos u,\ b + R\sin u) = 0. \tag{2}$$

En appliquant le théorème de Taylor, et remarquant que l'on a $F(a, b) = 0$, l'équation (2) devient

$$0 = \frac{dF}{da} R\cos u + \frac{dF}{db} R\sin u + MR^2, \tag{3}$$

M ayant une limite finie lorsque R tend vers zéro; l'équation (3) peut s'écrire

$$0 = \frac{dF}{da}\cos u + \frac{dF}{db}\sin u + MR,$$

et la valeur de u qui y satisfait, lorsque R est infiniment petit, diffère évidemment fort peu de la valeur u_1 pour laquelle on a

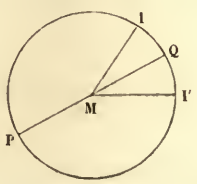
$$\frac{dF}{da}\cos u_1 + \frac{dF}{db}\sin u_1 = 0,$$

c'est-à-dire

$$\operatorname{tang} u_1 = -\frac{\frac{dF}{da}}{\frac{dF}{db}},$$

qui correspond à une direction unique et déterminée, puisque, par hypothèse, $\frac{dF}{da}$ et $\frac{dF}{db}$ ne sont pas nuls tous deux.

Les rayons vecteurs qui réunissent le point M aux points d'intersection, font, d'après cela, des angles infiniment petits avec une même droite, et la courbe a par conséquent en M une tangente unique. Mais cela n'exclut pas encore tous les genres de points singuliers, et il faut prouver qu'il n'y a en M, ni point de rebroussement, ni point multiple, où se croisent plusieurs branches de courbe ayant même tangente. Pour cela nous démontrerons que la tangente, dont l'existence a été démontrée, coupant le cercle de rayon R en deux points diamétralement opposés P et Q, la courbe proposée le coupe elle-même en deux points seulement, dont l'un est infiniment voisin de P et l'autre de Q.



Considérons, en effet, à droite et à gauche du point Q, et sur le cercle PQ, deux points I et I′ correspondant à des rayons MI, MI′, inclinés sur MQ d'un angle donné α; faisons varier u, d'une manière continue, depuis la valeur $u_1 - \alpha$ qui correspond au point I′, jusqu'à $u_1 + \alpha$ qui correspond au point I, et examinons la

variation correspondante du premier membre de (3). Il devient pour $u = u_1 - \alpha$

$$\frac{dF}{da}\cos(u_1 - \alpha) + \frac{dF}{db}\sin(u_1 - \alpha) + MR,$$

et pour $u = u_1 + \alpha$

$$\frac{dF}{da}\cos(u_1 + \alpha) + \frac{dF}{db}\sin(u_1 + \alpha) + M'R.$$

Posons

$$\frac{dF}{da} = k\sin u_1, \quad \frac{dF}{db} = -k\cos u_1,$$

ce qui est toujours possible, puisque $\frac{dF}{da}$ et $\frac{dF}{db}$ ne sont pas nuls, et que l'on a

$$-\frac{\frac{dF}{da}}{\frac{dF}{db}} = \operatorname{tang} u_1,$$

l'équation de la courbe devient

$$k\sin(u_1 - u) + MR = 0, \tag{4}$$

R étant infiniment petit, si l'on fait varier u de $u_1 - \alpha$ à $u_1 + \alpha$, ou de $\pi + u_1 - \alpha$ à $\pi + u_1 + \alpha$, le premier membre change évidemment de signe dans chacun de ces intervalles, et de plus il ne change qu'une fois, car la dérivée par rapport à u

$$-k\cos(u_1 - u) + R\frac{dM}{du}$$

ne change de signe dans aucun des deux intervalles, et par conséquent le premier membre de (4), étant toujours croissant ou toujours décroissant, ne peut s'annuler qu'une fois.

464. Lorsque les deux équations

$$\frac{dF}{da} = 0, \quad \frac{dF}{db} = 0,$$

sont satisfaites en un point, les termes du premier degré étant nuls dans le développement de

$$F(a + R\cos u,\ b + R\sin u) \tag{1}$$

on peut, après ce développement, supprimer le facteur R^2 dans l'équation de la courbe, qui devient ainsi

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d^2F}{da^2}\cos^2 u + 2\frac{d^2F}{da\,db}\sin u\cos u + \frac{d^2F}{db^2}\sin^2 u\right) + MR = 0, \tag{2}$$

M étant un facteur que le développement de Taylor fait connaître, et qui dépend de u et de R.

Les valeurs de u qui satisfont à l'équation (2) diffèrent évidemment infiniment peu des racines de l'équation

$$\frac{d^2F}{da^2}\cos^2 u + 2\frac{d^2F}{da\,db}\sin u\cos u + \frac{d^2F}{db^2}\cos^2 u = 0. \tag{3}$$

Si ces racines sont imaginaires, l'équation (2) est impossible, et le point considéré est un point isolé. Si elles sont réelles et inégales, le point est un point double où se croisent deux branches de courbe qui, considérées isolément, ne présentent aucune singularité. On le démontrera pour chacune d'elles absolument comme on l'a fait pour la branche unique étudiée dans le paragraphe précédent.

Lorsque l'équation (3) a deux racines égales, la courbe n'a, au point considéré, qu'une seule tangente, mais nous allons montrer qu'elle a, en général, un point de rebroussement.

L'équation de la courbe peut en effet être mise alors sous la forme

$$(A\sin u + B\cos u)^2 + MR^2 = 0; \tag{4}$$

A et B étant des constantes données, on peut toujours poser

$$A = k\cos u_1, \quad B = -k\sin u_1,$$

et l'équation devient

$$k^2\sin^2(u_1 - u) + MR^2 = 0. \tag{5}$$

Si dans cette équation (5), on fait varier u de la valeur $u_1 - \alpha$ jusqu'à $u_1 + \alpha$, α désignant un très-petit angle, le premier terme du premier membre aura le même signe aux deux limites, et il en sera de même du premier membre tout entier, pourvu que R soit suffisamment petit. Il en est de même lorsque u varie de $\pi + u_1 - \alpha$ à $\pi + u_1 + \alpha$, et par suite, dans chacun de ces intervalles, l'équation a un nombre pair de racines. Il est aisé de voir tout d'abord que ce nombre pair ne peut surpasser 2. La seconde dérivée du premier membre par rapport à u a en effet une valeur finie aussi bien pour $u = u_1$ que pour $u = \pi - u_1$; elle ne change donc de signe dans aucun des deux intervalles considérés, dont chacun ne peut par conséquent contenir plus de deux racines, et le nombre des points d'intersection dans chaque intervalle est égal à 2 ou à zéro; or aucun des deux termes dont se compose l'équation (5) ne change de signe lorsque u varie de $u_1 - \alpha_1$ à $u_1 + \alpha_1$, ou de $\pi + u_1 - \alpha_1$ à $\pi + u_1 + \alpha_1$. Si donc dans l'un de ces intervalles ils sont de même signe, il n'y a pas de solution; s'ils sont de signes

contraires, on peut faire R assez petit pour que le premier terme l'emporte pour les valeurs extrêmes de u, le second donne au contraire son signe pour la valeur intermédiaire de u qui rend le premier rigoureusement nul : il y a donc deux changements de signes, et par suite deux racines. Or les termes qui donnent leur signe à R sont de troisième degré en sin u et cos u; $u = u_1$ et $u = \pi + u_1$ leur donnent par conséquent des signes différents; et si les deux termes de l'équation (5) sont de mêmes signes lorsque u varie de $u_1 - \alpha_1$ à $u_1 + \alpha_1$, ils sont de signes contraires lorsqu'il varie de $\pi + u_1 + \alpha_1$ à $\pi + u_1 - \alpha_1$, et réciproquement. Il y a donc deux points d'intersection dans l'un des deux intervalles, et aucun dans l'autre, ce qui indique évidemment un rebroussement; et comme la valeur de $u = u_1$ ou $u = \pi + u_1$ qui correspond à la tangente, donne au premier membre un signe opposé à celui qu'il prend pour celles qui correspondent aux extrémités du petit intervalle considéré, les points d'intersection sont situés de part et d'autre de la tangente, et le rebroussement est de première espèce.

Il est prouvé par ce qui précède que dans le cas où l'équation (3) a deux racines égales, la courbe présente en général un rebroussement de première espèce; mais le raisonnement repose sur une supposition qui peut, dans des cas exceptionnels, se trouver inexacte. Nous avons admis en effet que les termes indépendants de R qui donnent leur signe à la fonction M ont, pour $u = u_1$, une somme différente de zéro, et changent par conséquent de signe sans changer de valeur, quand on suppose successivement $u = u_1$, $u = \pi + u_1$. S'il arrivait que la somme de ces termes fût égale à zéro lorsque $u = u_1$, nos conclusions seraient changées, et la courbe couperait, *en général*, deux fois le cercle dans chacun des intervalles que nous avons étudiés, se composant par conséquent de deux branches tangentes l'une à l'autre et dont chacune n'offre aucune singularité.

465. Il peut arriver aussi que deux des points d'intersection disparaissent, et que la courbe présente un rebroussement de seconde espèce, mais cela exige une nouvelle équation de condition.

Pour étudier la forme de la courbe et démontrer ces assertions, il est avantageux de substituer au cercle considéré jusqu'ici, deux droites parallèles à l'axe des Y et situées de part et d'autre du point M à une distance infiniment petite, que nous désignerons par h; il est clair que les intersections de ces parallèles avec la courbe feront connaître le nombre et la situation des branches de celle-ci. Posons donc

$$x = a + h, \quad y = b + k,$$

l'équation de la courbe deviendra, en employant les notations adoptées et ayant égard aux conditions admises,

$$\frac{1}{2}(\mathrm{A}h^2 + 2\mathrm{B}hk + \mathrm{C}k^2) + \varphi_1(h, k) = 0, \tag{1}$$

$\varphi_1(h,k)$ contenant des termes dont le degré est égal ou supérieur à 3. Si l'on divise l'équation par k^2 et que l'on pose $\frac{h}{k} = u$, cette équation devient

$$(2) \qquad Au^2 + 2Bu + C + hf_1(u) + h^2 f_2(u) + h^3 f_3(u) + \ldots = 0,$$

$f_1(u), f_2(u), f_3(u)$, étant des fonctions entières de u, la première du troisième degré, la seconde du quatrième, et ainsi de suite.

Dans le cas que nous étudions, les trois premiers termes de cette équation forment un carré parfait, elle se réduit à la forme

$$(3) \qquad A(u-u_1)^2 + hf_1(u) + h^2 f_2(u) + \ldots = 0;$$

h étant très-petit, les solutions sont évidemment très-peu différentes de u_1, et il n'y a par conséquent qu'une seule tangente formant avec l'axe des X un angle dont la tangente est u_1. Si $f_1(u_1)$ est de même signe que A, il y a deux solutions si h est négatif, et il n'y en a pas si h est positif; le contraire a lieu si $f_1(u_1)$ est de signe contraire à A; la courbe présente dans les deux cas un rebroussement de première espèce. Nous ne reviendrons pas sur cette discussion, qui a été faite par la considération du cercle. Le cas singulier qui reste à examiner est celui où l'on a $f_1(u_1) = 0$. Posons alors

$$(4) \qquad f_1(u) = (u-u_1)\psi(u),$$

et remplaçons l'inconnue u par $u_1 + \lambda h$, λ étant une inconnue nouvelle. L'équation (3) deviendra

$$(5) \qquad A\lambda^2 h^2 + h^2\lambda\psi(u_1+\lambda h) + h^2 f_2(u_1+\lambda h) + \ldots = 0;$$

en supprimant le facteur h^2 et développant $\psi(u_1+\lambda h)$, $f_2(u_1+\lambda h)$, par le théorème de Taylor, il vient

$$(6) \qquad A\lambda^2 + \lambda\psi(u_1) + f_2(u_1) + Ph + Qh^2 + \ldots = 0;$$

h étant infiniment petit, les valeurs de λ diffèrent infiniment peu de celles qui satisfont à l'équation

$$(7) \qquad A\lambda^2 + \lambda\psi(u_1) + \psi(u_1) = 0.$$

Si cette équation a deux racines réelles λ_1 et λ_2, il est aisé de voir que l'équation (5) admettra, pour une valeur infiniment petite de h, une solution comprise entre $\lambda_1 - \varepsilon$ et $\lambda_1 + \varepsilon$, et une autre entre $\lambda_2 - \varepsilon$ et $\lambda_2 + \varepsilon$, ε étant aussi petit que l'on voudra.

La courbe se compose donc de deux branches ayant même tangente, et dont chacune ne présente aucune singularité. Si l'équation (7) a ses racines égales, en nommant λ_0 leur valeur commune, on peut écrire la relation (6) sous la forme

$$A(\lambda-\lambda_0)^2 + Ph + Qh^2 + \ldots = 0.$$

Cette équation ne peut être satisfaite que pour une valeur de λ telle, que le terme du premier degré en h soit de signe contraire à celui de A. Si donc l'une des parallèles à l'axe des Y menées de part et d'autre du point M coupe la courbe, l'autre ne la coupe pas, et il y a rebroussement. Ce rebroussement est de seconde espèce, car les deux valeurs de λ sont l'une et l'autre peu différentes de λ_0, et, comme on a posé

$$u = u_0 + \lambda h,$$

les deux valeurs de u correspondent à deux directions situées du même côté par rapport à la tangente dont le coefficient angulaire est u_0.

466. La discussion complète de la question présenterait un bien plus grand nombre de cas. Nous nous sommes bornés, en effet, à celui où les termes du second degré dans le développement de Taylor ne sont pas identiquement nuls. Si ces termes disparaissaient en même temps que ceux du premier degré, nos conclusions seraient en défaut, mais nous ne développerons pas la discussion de ces cas particuliers dans lesquels trois branches de courbe se réunissent, en général, au point singulier considéré.

467. Pour déter[illegible]es points singuliers de la courbe représentée par l'équation

$$F(x, y) = 0, \tag{1}$$

on doit, d'après la théorie précédente, chercher d'abord les valeurs de x et de y qui satisfont, s'il est possible, aux trois équations

$$F(x, y) = 0, \quad \frac{dF}{dx} = 0, \quad \frac{dF}{dy} = 0. \tag{2}$$

Pour les obtenir, on devra éliminer une inconnue, y par exemple, entre les deux premières équations, et l'on obtiendra une équation finale en x, parmi les racines de laquelle se trouveront les valeurs cherchées de x. M. Padula a remarqué que ces valeurs sont toujours des racines multiples, et qu'il n'existe par conséquent pas de points singuliers lorsque l'équation finale n'a pas de racines égales.

Pour éliminer en effet y entre les deux premières équations (2), on peut concevoir que l'on résolve la seconde par rapport à y, et qu'après en avoir déduit

$$y = f(x),$$

on remette cette valeur dans la première, qui devient ainsi

$$F[x, f(x)] = \varphi(x) = 0;$$

$\varphi(x)$ est l'équation finale, et l'on a évidemment

$$\varphi'(x) = \frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy} f'(x).$$

Si donc on a à la fois $\frac{dF}{dx} = 0$ et $\frac{dF}{dy} = 0$, il en résulte $\varphi'(x) = 0$, et la valeur de x est une racine multiple de l'équation à laquelle elle satisfait.

468. Il faut remarquer que la théorie précédente, reposant sur le développement de Taylor, est absolument insuffisante pour l'étude des courbes dont l'équation conduit à des dérivées infinies ou indéterminées.

On doit étudier ces cas, lorsqu'ils se présentent, d'après la connaissance des fonctions singulières qui figurent dans l'équation.

Soit, par exemple, l'équation

$$y = \frac{1}{\log x};$$

la fonction $\frac{1}{\log x}$ devenant imaginaire lorsque x est négatif, la courbe a un point d'arrêt à l'origine des coordonnées.

Soit encore

$$y = \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}};$$

la courbe représentée par cette équation passe par l'origine; pour $x = 0$ la fonction $e^{\frac{1}{x}}$ est discontinue; elle est infiniment petite lorsque x est infiniment petit et négatif, et infiniment grande lorsqu'il est infiniment petit et positif. Le coefficient angulaire $\frac{dy}{dx}$, qui à l'origine des coordonnées est, comme on sait, égal à la limite du rapport $\frac{y}{x}$, a donc deux valeurs, l'une égale à l'unité et l'autre à zéro; la courbe a par conséquent un point anguleux.

Points singuliers des surfaces.

469. La théorie précédente s'étend aux surfaces : nous nous bornerons à démontrer le théorème suivant :

Si $F(x, y, z) = 0$ *est l'équation d'une surface, et qu'en un point de cette surface les trois équations*

$$\frac{dF}{dx} = 0, \quad \frac{dF}{dy} = 0, \quad \frac{dF}{dz} = 0,$$

ne soient pas satisfaites en même temps, si de plus la fonction $F(x, y, z)$ *est finie*

et continue ainsi que toutes ses dérivées, le point considéré ne présente aucune singularité.

Nous regardons un point comme ne présentant aucune singularité, lorsque la sphère infiniment petite dont il est le centre coupe la surface suivant une courbe fermée infiniment peu différente d'un grand cercle.

Soient a, b, c, les coordonnées d'un point M, situé sur la surface dont l'équation est $F(x, y, z)=0$. Si $a+x_1$, $b+y_1$, $c+z_1$, sont les coordonnées d'un point infiniment voisin situé sur la même surface, on aura

$$F(a+x_1, b+y_1, c+z_1)=0, \tag{1}$$

ou, d'après le théorème de Taylor, et en ayant égard à ce que le point M est lui-même situé sur la surface,

$$x_1\frac{dF}{da}+y_1\frac{dF}{db}+z_1\frac{dF}{dc}+M=0, \tag{2}$$

M désignant une somme de termes tous du second degré, au moins, par rapport à x_1, y_1, z_1.

Soit R le rayon de la sphère par laquelle on veut couper la surface, α, β, γ, les angles formés avec les axes par le rayon vecteur qui réunit le point M à l'un des points d'intersection ; on aura

$$x_1=R\cos\alpha, \quad y_1=R\cos\beta, \quad z_1=R\cos\gamma,$$

et l'équation (2) devient, en supprimant le facteur R,

$$\cos\alpha\frac{dF}{da}+\cos\beta\frac{dF}{db}+\cos\gamma\frac{dF}{dc}+RM_1=0, \tag{3}$$

M_1 étant une fonction de α, β, γ et de R, qui, en général, a une valeur finie quand on suppose $R=0$.

L'équation (3) nous apprend que la somme

$$\cos\alpha\frac{dF}{da}+\cos\beta\frac{dF}{db}+\cos\gamma\frac{dF}{dc},$$

est infiniment petite avec R, et comme la normale à la surface fait avec les axes des angles dont les cosinus sont proportionnels à $\frac{dF}{da}$, $\frac{dF}{db}$, $\frac{dF}{dc}$, on voit que le rayon vecteur qui forme les angles α, β, γ, fait avec cette normale un angle infiniment peu différent d'un droit, et que le point où il perce la sphère est à une distance infiniment petite du grand cercle suivant lequel elle est coupée par le plan tangent.

Il reste à prouver que l'intersection de la sphère et de la surface est une courbe

fermée. Pour cela posons

$$\frac{dF}{da} = k\cos\lambda,$$

$$\frac{dF}{db} = k\cos\mu,$$

$$\frac{dF}{dc} = k\cos\nu,$$

et nommons φ l'angle formé par l'un des rayons vecteurs avec la direction de la normale. On aura

$$\cos\varphi = \cos\alpha\cos\lambda + \cos\beta\cos\mu + \cos\gamma\cos\nu,$$

et l'équation (3) deviendra

$$k\cos\varphi + M_1 R = 0.$$

Or il est clair que si un point se meut sur la sphère de rayon R en décrivant un arc de courbe tel, que les valeurs de φ relatives à ses extrémités soient $\frac{\pi}{2} - \varepsilon$ et $\frac{\pi}{2} + \varepsilon$, ε étant aussi petit que l'on voudra, pour une valeur suffisamment petite de R, l'équation (4) sera satisfaite en un point de cet arc, qui par conséquent coupe la courbe d'intersection de la surface avec la sphère de rayon R. Toute courbe qui traverse le grand cercle dont l'équation est $\varphi = \frac{\pi}{2}$, traverse donc aussi l'intersection de la sphère avec la surface; il faut pour cela que cette ligne soit fermée et qu'elle diffère infiniment peu d'un grand cercle; la surface ne présente donc aucune singularité.

470. Lorsque les trois équations

$$\frac{dF}{da} = 0, \quad \frac{dF}{db} = 0, \quad \frac{dF}{dc} = 0, \tag{1}$$

sont satisfaites, le point correspondant M de la surface peut présenter diverses singularités, nous nous bornerons à déterminer dans ce cas, et en supposant qu'aucune autre condition exceptionnelle ne se présente, le cône formé par les droites qui touchent au point M les courbes tracées sur la surface.

En désignant par $a + x_1$, $b + y_1$, $c + z_1$, les coordonnées d'un point de la surface voisin du point singulier dont les coordonnées sont a, b, c, et en ayant égard aux conditions (1), le théorème de Taylor permettra de mettre l'équation $F(x, y, z) = 0$ sous la forme

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d^2F}{da^2}x_1^2 + \frac{d^2F}{db^2}y_1^2 + \frac{d^2F}{dc^2}z_1^2 + 2\frac{d^2F}{da\,db}x_1y_1 + 2\frac{d^2F}{da\,dc}x_1z_1 + 2\frac{d^2F}{db\,dc}y_1z_1\right) + M = 0,$$

M contenant des termes du troisième ordre, ou d'ordre supérieur, par rapport à x_1, y_1, z_1. Si l'on coupe la surface par une sphère de rayon infiniment petit R, ayant son centre au point M, on aura, en désignant par α, β, γ les angles formés par les axes de coordonnées avec le rayon vecteur qui aboutit à l'un des points d'intersection

$$x_1 = \mathrm{R}\cos\alpha, \quad y_1 = \mathrm{R}\cos\beta, \quad z_1 = \mathrm{R}\cos\gamma.$$

Par la substitution de ces valeurs, le facteur R^3 figurera à tous les termes de M, et l'équation deviendra, en supprimant ce facteur,

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d^2\mathrm{F}}{da^2}\cos^2\alpha + \frac{d^2\mathrm{F}}{db^2}\cos^2\beta + \frac{d^2\mathrm{F}}{dc^2}\cos^2\gamma + 2\frac{d^2\mathrm{F}}{da\,db}\cos\alpha\cos\beta + 2\frac{d^2\mathrm{F}}{db\,dc}\cos\beta\cos\gamma + 2\frac{d^2\mathrm{F}}{da\,dc}\cos\alpha\cos\gamma\right) + \mathrm{M}_1\mathrm{R} = 0,$$

et les angles α, β, γ, sont donc tels, que le polynôme placé entre parenthèses soit infiniment petit avec R; il en résulte évidemment que toutes les courbes tracées sur la surface sont tangentes aux génératrices du cône lieu des droites pour lesquelles cette condition est remplie, et qui a pour équation

$$x_1^2\frac{d^2\mathrm{F}}{da^2} + y_1^2\frac{d^2\mathrm{F}}{db^2} + z_1^2\frac{d^2\mathrm{F}}{dc^2} + 2x_1y_1\frac{d^2\mathrm{F}}{da\,db} + 2y_1z_1\frac{d^2\mathrm{F}}{db\,dc} + 2x_1z_1\frac{d^2\mathrm{F}}{da\,dc} = 0,$$

c'est un cône du second degré. S'il est imaginaire, la surface n'a pas de tangentes au point M, qui est par conséquent un point isolé.

471. Il existe sur certaines surfaces, des *lignes singulières* suivant lesquelles elles sont touchées par un même plan, et dont la recherche se rattache naturellement au sujet traité dans ce chapitre.

Soit

$$z = \varphi(x, y) \tag{1}$$

l'équation d'une surface. Si l'on pose

$$\frac{dz}{dx} = p, \quad \frac{dz}{dy} = q,$$

l'équation du plan tangent est

$$v - z = p(t - x) + q(u - y). \tag{2}$$

Les coordonnées du point de contact en variant infiniment peu, deviennent $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$; les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'équation (2) reste la même, sont évidemment

$$dz = p\,dx + q\,dy \qquad dp = 0, \quad dq = 0.$$

La première est toujours satisfaite. Quant aux deux suivantes, elles peuvent s'écrire

$$\begin{aligned} &\frac{dp}{dx}\,dx+\frac{dp}{dy}\,dy=0,\\ &\frac{dq}{dx}\,dx+\frac{dq}{dy}\,dy=0, \end{aligned} \tag{4}$$

et pour qu'elles soient compatibles, on doit avoir

$$\frac{dp}{dx}\cdot\frac{dq}{dy}=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dq}{dx}.$$

Si l'on pose

$$\frac{d^2z}{dx^2}=r,\qquad \frac{d^2z}{dy^2}=t,\qquad \frac{d^2z}{dx\,dy}=s,$$

cette équation équivaut à

$$rt-s^2=0; \tag{5}$$

elle détermine sur la surface la courbe suivant laquelle elle peut être touchée par un plan. Il faut bien remarquer que si l'on a trouvé sur une surface une courbe pour les points de laquelle l'équation (5) soit satisfaite, il n'est pas certain pour cela que le plan tangent soit le même en tous les points de cette courbe; il faut encore, en effet, que les deux équations (4) soient satisfaites, lorsque dx et dy désignent les déplacements infiniment petits effectués sur cette courbe. Lorsque l'équation $rt-s^2=0$ est satisfaite pour tous les points d'une surface, on peut trouver en chaque point une direction suivant laquelle on peut déplacer le point de contact du plan tangent, sans que celui-ci change de position; chaque plan tangent touche alors la surface suivant une ligne, et celle-ci étant l'enveloppe d'un plan mobile dont l'équation ne contient évidemment qu'un seul paramètre, est une surface développable.

EXERCICES.

1. Aucune courbe algébrique ne présente de points d'arrêt; en d'autres termes, le cercle infiniment petit ayant pour centre un point d'une courbe algébrique, ne coupe jamais la courbe en un point unique.

2. Aucune courbe algébrique ne présente de points anguleux; en d'autres termes, le cercle infiniment petit ayant pour centre un point d'une courbe algébrique, ne coupe jamais la courbe en deux points séparés par un arc dont la limite diffère de zéro ou d'une demi-circonférence.

3. La courbe représentée par l'équation

$$y^{2n+2}-(x-1)^{2n+1}x=0,$$

où n désigne un nombre entier quelconque, n'a pas de point singulier, quoique les dérivées du premier membre s'annulent toutes deux pour $y=0$, $x=1$.

4. La courbe représentée par l'équation

$$4y^4 - 16xy^3 + 144x^4 + 4y^3 - 24x^2y - 48x^3 + y^2 + 4xy + 4x^2 = 0$$

a trois points de rebroussement, dont l'un est situé à l'origine des coordonnées, l'un sur l'axe des x, l'autre sur l'axe des y.

5. La surface dont l'équation est

$$(x^2+y^2+z^2)^2 = a^2x^2 + b^2y^2 - c^2z^2,$$

a un point singulier à l'origine. Trouver l'équation du cône, lieu des tangentes aux courbes passant par ce point et situées sur la surface.

6. La surface des ondes représentée par l'équation

$$(x^2+y^2+z^2)(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2) - a^2(b^2+c^2)x^2 - b^2(a^2+c^2)y^2 - c^2(a^2+b^2)z^2 + a^2b^2c^2 = 0$$

a quatre points singuliers ayant pour coordonnées

$$y=0, \quad x=\pm c\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}}, \quad z=\pm a\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}},$$

trouver le cône formé par les tangentes à la surface d'un de ces points.

7. L'héliçoïde développable représenté par l'équation

$$x\sin\left(\frac{2\pi z}{h} - \frac{\sqrt{x^2+y^2-a^2}}{a}\right) + y\cos\left(\frac{2\pi z}{h} - \frac{\sqrt{x^2+y^2-a^2}}{a}\right) = a$$

a une infinité de points singuliers qui forment son arête de rebroussement et sont définis par les équations

$$x = a\sin\frac{2\pi z}{h}, \quad y = a\cos\frac{2\pi z}{h}.$$

CHAPITRE X.

THÉORIE DES MAXIMA ET MINIMA.

Maxima et minima des fonctions d'une seule variable.

472. Lorsqu'une fonction $\varphi(x)$, pour une valeur a de la variable, est plus grande que pour toute valeur infiniment voisine, plus grande ou plus petite que a, on dit qu'elle est *maxima*. Si au contraire la fonction est moindre que pour toute valeur de la variable infiniment peu différente de a, on dit qu'elle est *minima*. Nous avons déjà remarqué que la variable croissant d'une manière continue, la dérivée de la fonction, positive lorsque celle-ci est croissante, négative lorsqu'elle est décroissante, est égale à zéro pour les valeurs qui correspondent aux maxima et aux minima. C'est là le théorème fondamental de la théorie qui nous occupe, mais il doit être complété par l'étude des caractères qui distinguent le maximum du minimum et des cas dans lesquels, la dérivée étant nulle, il n'y a cependant ni maximum ni minimum.

473. Soit $\varphi(x)$ une fonction continue de la variable x; en nommant h un petit accroissement attribué à x, on a

$$(1) \qquad \varphi(x+h)-\varphi(x)=h\varphi'(x)+\frac{h^2}{1.2}\varphi''(x+\theta h),$$

où θ est un nombre compris entre zéro et l'unité. Si $\varphi'(x)$ n'est pas nul, et que $\varphi''(x)$ reste fini pour les valeurs considérées de la variable, il est clair que, h étant infiniment petit, le terme du premier degré en h donne son signe au second membre de l'équation (1), la différence $\varphi(x+h)-\varphi(x)$ change par conséquent de signe avec h, et la valeur de x ne correspond ni à un maximum ni à un minimum. La condition commune au maximum et au minimum est donc, comme nous le savions, que la dérivée $\varphi'(x)$ soit égale à zéro. En supposant cette condition remplie pour la valeur particulière $x=a$, le théorème de Taylor donne

$$(2) \qquad \varphi(a+h)-\varphi(a)=\frac{h^2}{1.2}\varphi''(a)+\frac{h^3}{1.2.3}\varphi'''(a+\theta h).$$

Si $\varphi''(a)$ n'est pas nul, le premier terme, pour de petites valeurs de h, donne son signe au second nombre, et la différence $\varphi(a+h)-\varphi(a)$ est par conséquent, quel

que soit le signe de h, de même signe que $\varphi''(a)$. Il y a donc minimum si $\varphi''(a)$ est positif et maximum dans le cas contraire.

Lorsque $\varphi''(a)$ est nul en même temps que $\varphi'(a)$, le théorème de Taylor donne

$$(3) \qquad \varphi(a+h)-\varphi(a)=\frac{h^3}{1.2.3}\varphi'''(a)+\frac{h^4}{1.2.3.4}\varphi^{IV}(a+\theta h).$$

Si $\varphi'''(a)$ n'est pas nul, le premier terme donnant pour de petites valeurs de h son signe au second membre, le signe de la différence $\varphi(a+h)-\varphi(a)$ change avec celui de h, et il n'y a ni maximum ni minimum.

Le même raisonnement montre que si $\varphi'''(a)$ est nul en même temps que $\varphi''(a)$ et $\varphi'(a)$, il y a maximum lorsque $\varphi^{IV}(a)$ est négatif, et minimum lorsqu'il est positif.

En général, pour que la fonction $\varphi(x)$ soit maxima ou minima pour la valeur $x=a$ de la variable, il faut que dans la suite des dérivées $\varphi'(a)$, $\varphi''(a)$, $\varphi'''(a)$,..., la première qui ne s'annule pas soit d'ordre pair; si cette dérivée est négative, il y a maximum, et si elle est positive, minimum.

Appliquons la règle qui précède à la solution de quelques problèmes.

474. Problème I. — *Trouver la plus courte distance d'une courbe plane donnée par son équation* $y=\varphi(x)$, *à un point donné dans son plan par les coordonnées* (α, β).

Le carré de la distance que l'on veut rendre minima est

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2.$$

y étant donné en fonction de x, cette expression ne dépend que d'une seule variable. La règle précédente est donc applicable. En égalant sa dérivée à zéro, on a

$$(1) \qquad x-\alpha+(y-\beta)\frac{dy}{dx}=0.$$

Cette condition commune au maximum et au minimum exprime que le point donné, dont les coordonnées sont α et β, est situé sur la normale menée à la courbe par le point dont les coordonnées sont x et y. Pour distinguer le maximum du minimum, il faut examiner le signe de la seconde dérivée

$$(2) \qquad 1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+(y-\beta)\frac{d^2y}{dx^2}.$$

Il y a maximum si cette expression est négative, et minimum si elle est positive. Lorsqu'elle est nulle, il n'y a, en général, ni maximum ni minimum.

Si le point représenté par les coordonnées α, β, se meut sur une normale de la courbe donnée, x et y étant les coordonnées du pied de cette normale, l'expression (2) ne changera de signe qu'une seule fois, et ce sera pour la valeur de β qui

la rend nulle. Il existe donc sur chaque normale un point qui sépare ceux dont la distance à la courbe comptée sur cette normale est un minimum, de ceux dont la distance est un maximum. La normale comptée à partir de ce point n'est ni maxima ni minima, en sorte que le cercle tangent à la courbe décrit de ce point comme centre n'est ni complétement intérieur dans le voisinage du point de contact, car la distance serait minima, ni complétement extérieur, car elle serait maxima; mais les distances de son centre aux points de la courbe étant les unes plus grandes, les autres plus petites que son rayon, il traverse la courbe, à laquelle il est cependant tangent, puisque son centre est situé sur la normale au point qui leur est commun. Ce cercle remarquable, que l'on nomme *cercle osculateur*, joue un grand rôle dans la théorie des courbes, et nous aurons à l'étudier sous d'autres points de vue.

475. Les résultats précédents s'étendent aisément aux courbes à double courbure. Soient $y=\varphi(x)$, $z=\psi(x)$, les équations d'une telle courbe, et α, β, γ les coordonnées d'un point quelconque de l'espace, le carré de la distance de ce point à un point de la courbe ayant pour coordonnées x, y, z, est

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2.$$

Pour que cette distance soit maxima ou minima, il faut que la dérivée soit nulle, la condition commune aux deux cas est donc

$$(1) \qquad (x-\alpha)+(y-\beta)\frac{dy}{dx}+(z-\gamma)\frac{dz}{dx}=0.$$

Cette équation exprime que le point α, β, γ est situé dans le plan normal à la courbe menée par le point x, y, z. La ligne maxima ou minima est par conséquent une normale comme dans le cas précédent. Le signe de la seconde dérivée

$$(2) \qquad 1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+(y-\beta)\frac{d^2y}{dx^2}+(z-\gamma)\frac{d^2z}{dx^2}$$

apprendra si la distance est maxima ou minima. Le pied de la normale étant donné, les points du plan normal dont la distance à ce pied est un minimum, sont séparés de ceux pour lesquels elle est minimum par une droite dont l'une des équations s'obtient en égalant à zéro l'expression (2). L'autre équation est évidemment celle du plan normal. Le caractère des points de cette droite est que leurs distances au point x, y, z, quoique normales à la courbe, ne sont ni maxima ni minima; elle est, comme nous le verrons plus tard, l'axe du cercle osculateur de la courbe à double courbure.

476. Le problème que nous venons de résoudre présente dans un cas particulier

une difficulté qu'il est bon de signaler; supposons que la courbe donnée soit un cercle ayant pour équation

$$x^2 + y^2 = R^2,$$

et que le point donné, situé sur l'axe des X, ait α pour abscisse, le carré de la distance considérée est

$$(x - \alpha)^2 + y^2 = R^2 - 2\alpha x + \alpha^2.$$

En égalant sa dérivée à zéro, on trouve

$$-2\alpha = 0,$$

équation impossible. Faut-il conclure de là, contrairement à l'évidence, que la distance considérée n'est pas susceptible de minimum? La méthode générale est évidemment en défaut dans le cas actuel. La démonstration même que nous en avons donnée rend raison de ce cas d'exception. Nous avons admis en effet que, $\varphi(a)$ étant minimum, la différence $\varphi(a+h) - \varphi(a)$ est positive, quel que soit le signe de la quantité très-petite h. Or dans le cas actuel, la variable x désignant l'abscisse d'un point du cercle, est comprise entre $-R$ et $+R$. Si donc on lui attribue une de ces valeurs extrêmes, le signe de son accroissement est déterminé, et le raisonnement fondé sur ce que ce signe est arbitraire, cesse d'être applicable. Il peut donc, dans ce cas, y avoir maximum ou minimum de la distance, sans que la dérivée soit nulle, et c'est ce qui a lieu pour les points où la courbe rencontre l'axe des X, et dont les abscisses sont $\pm R$.

477. Problème II. — *Deux portions d'un plan sont séparées par une ligne droite indéfinie* OX; *la lumière se meut en ligne droite dans chacun des deux milieux, avec une vitesse qui varie, suivant une loi connue, avec la direction du rayon. On demande quel chemin elle doit suivre pour parvenir d'un point* A *du premier milieu, à un point* B *du second, dans le moindre temps possible.*

Soit a la distance du point A au-dessus de la ligne OX, et b celle du point B au-dessous de cette même ligne. Si M est le point où le rayon de lumière doit traverser OX, de telle sorte que la route la plus rapidement parcourue soit AMB, on a, en nommant d la distance PQ comprise entre les projections des points A et B sur OX, et φ et ψ les angles formés par MA et MB avec la normale à OX,

$$a \operatorname{tang}\varphi + b \operatorname{tang}\psi = d; \tag{1}$$

de plus, u et v désignant les vitesses de la lumière lorsqu'elle suit les directions AM et MB, le temps employé à passer de A en B est

$$\frac{a}{u\cos\varphi} + \frac{b}{v\cos\psi}; \tag{2}$$

c'est cette somme qu'il faut rendre minima. Elle ne dépend évidemment que d'une seule variable, car φ et ψ sont liés par l'équation (1), et u et v en sont des fonctions données. On trouve en différentiant l'équation (1)

$$\frac{ad\varphi}{\cos^2\varphi} + \frac{bd\psi}{\cos^2\psi} = 0, \tag{3}$$

et puisque la différentielle de l'expression (2) est nulle quand il y a minimum, on doit avoir en même temps

$$\frac{ad\varphi\sin\varphi}{u\cos^2\varphi} - \frac{adu}{u^2\cos\varphi} + \frac{bd\psi\sin\psi}{v\cos^2\psi} - \frac{bdv}{v^2\cos^2\psi} = 0, \tag{4}$$

ce qui, en vertu de l'équation (3), se réduit à

$$\frac{\sin\varphi}{u} - \frac{\cos\varphi}{u^2\dfrac{d\varphi}{du}} = \frac{\sin\psi}{v} - \frac{\cos\psi}{v^2\dfrac{d\psi}{dv}}. \tag{5}$$

Cette équation, jointe à la relation (1), détermine les angles φ et ψ; elle est susceptible d'une interprétation géométrique remarquable. L'inverse du premier membre est

$$u\,\frac{-u\dfrac{d\varphi}{du}}{-u\dfrac{d\varphi}{du}\sin\varphi + \cos\varphi}. \tag{6}$$

Si l'on considère u et φ comme les coordonnées polaires d'un point, le pôle étant placé en M, et l'axe polaire perpendiculaire à OX, le lieu des points correspondants aux diverses valeurs de φ est une courbe que l'on peut considérer comme donnée, et dont la tangente fait avec le rayon vecteur un angle V défini par l'équation

$$\operatorname{tang} V = u\frac{d\varphi}{du};$$

l'expression (6) devient alors

$$\frac{-u\operatorname{tang} V}{-\operatorname{tang} V\sin\varphi + \cos\varphi} = \frac{-u\sin V}{\cos(V+\varphi)}.$$

Or $\dfrac{u\sin V}{\cos(V+\varphi)}$ est la portion de la perpendiculaire à l'axe polaire comprise entre le pôle et la tangente à la courbe, c'est-à-dire la distance du point M au point où la droite XX′ est coupée par la tangente menée à la courbe par le point où elle rencontre le rayon MB.

Si l'on construit de même et du même côté de la ligne de séparation la courbe

dont les rayons vecteurs sont proportionnels à la vitesse de propagation dans le second milieu, le second membre de l'équation (6) représente la distance comprise entre le point M et le point où la tangente à cette seconde courbe coupe XX′; il résulte de là que les deux tangentes doivent se rencontrer sur XX′, et l'on est conduit au théorème suivant :

En admettant que la lumière se propage suivant une loi telle, que le temps du trajet soit un minimum, pour connaître le rayon réfracté correspondant à un rayon incident AM, on prolongera AM jusqu'à la rencontre de la courbe dont les rayons vecteurs représentent les vitesses dans le premier milieu, puis par le point d'intersection, la tangente à cette courbe, du point où cette tangente perce la ligne de séparation, on mène enfin une tangente à la seconde courbe dont les rayons vecteurs représentent les vitesses de propagation dans le second milieu. Le point de contact de cette tangente est situé sur le rayon réfracté.

478. Problème III. — *Trouver les deux axes de la section d'un ellipsoïde par un plan donné passant par son centre, en les considérant comme les rayons vecteurs maxima et minima de cette section.*

Soit

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{1}$$

l'équation de l'ellipsoïde. Le rayon vecteur r qui forme avec les axes les angles α, β, γ, est donné par la formule

$$\frac{1}{r^2}=\frac{\cos^2\alpha}{a^2}+\frac{\cos^2\beta}{b^2}+\frac{\cos^2\gamma}{c^2}. \tag{2}$$

Il ne dépend que d'une seule variable, car en nommant l, m, n, les angles formés avec les axes par la normale au plan de la section considérée, on a évidemment

$$\begin{aligned}&\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1,\\ &\cos\alpha\cos l+\cos\beta\cos m+\cos\gamma\cos n=0.\end{aligned} \tag{3}$$

$\frac{1}{r^2}$ étant maximum lorsque r est minimum et réciproquement, nous résoudrons le problème en égalant à zéro la différentielle de $\frac{1}{r^2}$, et considérant $\cos\beta$ et $\cos\gamma$ comme des fonctions de $\cos\alpha$, définies par les équations (3); on aura

$$\frac{\cos\alpha\, d\cos\alpha}{a^2}+\frac{\cos\beta\, d\cos\beta}{b^2}+\frac{\cos\gamma\, d\cos\gamma}{c^2}=0. \tag{4}$$

La différentiation des équations (3) donne d'ailleurs

$$\begin{aligned}&\cos\alpha\, d\cos\alpha+\cos\beta\, d\cos\beta+\cos\gamma\, d\cos\gamma=0,\\ &\cos l\, d\cos\alpha+\cos m\, d\cos\beta+\cos n\, d\cos\gamma=0.\end{aligned}\tag{5}$$

Il faut de ces deux dernières équations déduire $d\cos\beta$ et $d\cos\gamma$ et les substituer dans (4); celle-ci se réduira alors au produit de $d\cos\alpha$ par un coefficient qu'il faudra égaler à zéro; or ce calcul revient évidemment à éliminer $d\cos\alpha$, $d\cos\beta$, $d\cos\gamma$, entre les équations (4) et (5). Pour y parvenir, la méthode la plus simple consiste à ajouter ces équations après avoir multiplié deux d'entre elles par deux facteurs indéterminés λ_1, λ_2, puis à égaler à zéro les coefficients des trois différentielles; deux des équations ainsi obtenues servent à déterminer les multiplicateurs λ_1 et λ_2, tels, que l'addition fasse disparaître deux des différentielles, et la troisième équation est alors précisément le résultat de l'élimination. On obtient ainsi les relations

$$\begin{aligned}&\frac{\cos\alpha}{a^2}+\lambda_1\cos\alpha+\lambda_2\cos l=0,\\ &\frac{\cos\beta}{b^2}+\lambda_1\cos\beta+\lambda_2\cos m=0,\\ &\frac{\cos\gamma}{c^2}+\lambda_1\cos\gamma+\lambda_2\cos n=0.\end{aligned}\tag{6}$$

En éliminant entre elles λ_1 et λ_2, on obtiendra la relation qui convient aux rayons vecteurs maxima et minima.

En ajoutant les équations (6) après les avoir respectivement multipliées par $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, il vient, en ayant égard à (1) et (3),

$$\frac{1}{r^2}+\lambda_1=0,\tag{7}$$

et les équations deviennent, en remplaçant λ_1 par $-\frac{1}{r^2}$,

$$\begin{aligned}&\cos\alpha\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{r^2}\right)+\lambda_2\cos l=0,\\ &\cos\beta\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{r^2}\right)+\lambda_2\cos m=0,\\ &\cos\gamma\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{r^2}\right)+\lambda_2\cos n=0,\end{aligned}\tag{8}$$

d'où l'on déduit, en ayant égard à la seconde équation (3),

$$\frac{\cos^2 l}{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{r^2}}+\frac{\cos^2 m}{\frac{1}{b^2}-\frac{1}{r^2}}+\frac{\cos^2 n}{\frac{1}{c^2}+\frac{1}{r^2}}=0.$$

Cette équation, qui est du second degré en $\frac{1}{r^2}$, détermine les longueurs des deux axes; r étant regardé comme connu, les équations (8) font connaître $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$; elles donnent en effet

$$\frac{\cos l}{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{r^2}} = \frac{\cos m}{\frac{1}{b^2}-\frac{1}{r^2}} = \frac{\cos n}{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{r^2}} = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = \frac{\cos\beta}{\cos\gamma},$$

et la somme des carrés des trois cosinus étant égale à l'unité, ils peuvent être regardés comme connus.

Solution géométrique de quelques problèmes.

479. Lorsqu'une fonction devient maxima ou minima, sa différentielle est nulle, et la variation correspondante à un accroissement infiniment petit de la variable dont elle dépend, se réduit à zéro quand on néglige les infiniment petits du second ordre. Cette considération peut s'appliquer directement dans un grand nombre de cas et fournir souvent une réponse très-simple aux questions de maxima et de minima.

Reprenons, par exemple, le problème déjà étudié (474): *Trouver la plus courte distance d'un point à une courbe.*

Soit O le point donné, et OM la distance minima. Si l'on nomme M′ un point infiniment voisin de M, situé sur la courbe, il faut que la différence OM′ — OM soit nulle, lorsqu'on néglige les infiniment petits du second ordre. Or cette différence est égale (21) au produit de MM′ par le cosinus de l'angle formé par OM avec MM′; ce cosinus doit donc être nul, et par conséquent la ligne de longueur minima ou maxima est une normale.

Cherchons pour second exemple un point situé sur une courbe donnée, et tel que la somme de ses distances à deux points donnés soit minima ou maxima.

M étant le point cherché, et A, B les points donnés, il faut que la somme AM + BM soit égale, en négligeant les infiniment petits du second ordre, à la somme AM′ + BM′, relative à un point infiniment voisin. Or les accroissements de AM et de BM sont égaux (21) aux produits de MM′ par les cosinus des angles formés par sa direction avec les lignes AM et BM; ces cosinus doivent donc être égaux et de signes contraires, et par conséquent la somme AM + BM est minimum lorsque les deux lignes AM et BM forment des angles égaux avec la courbe donnée sur laquelle se trouve le point M.

Maxima et minima des fonctions de deux variables.

480. Soit $\varphi(x, y)$ une fonction de deux variables indépendantes x et y, les valeurs maxima et minima sont telles, que la différence

$$\varphi(x+h, y+k) - \varphi(x, y)$$

conserve le même signe, quelles que soient les valeurs très-petites, positives ou négatives, attribuées à h et à k. Le théorème de Taylor donne

$$\varphi(x+h, y+k) - \varphi(x, y) = h\frac{d\varphi}{dx} + k\frac{d\varphi}{dy} + \mathrm{R}, \tag{1}$$

et pour des valeurs infiniment petites de h et de k, R est négligeable par rapport aux deux premiers termes, toutes les fois que ceux-ci sont différentes de zéro. Or ces termes, qui déterminent les signes du second membre, changent de signe sans changer de valeur quand on change h en $-h$ et k en $-k$; l'accroissement de la fonction ne peut donc avoir un signe invariable que si l'on a à la fois

$$\frac{d\varphi}{dx} = 0, \quad \frac{d\varphi}{dy} = 0; \tag{2}$$

ce sont les conditions communes au maximum et au minimum.

On peut remarquer que la fonction $\varphi(x, y)$, étant maximum ou minimum lorsque x et y sont l'un et l'autre variables, doit l'être *à fortiori* si on laisse l'une de ces quantités constantes. La règle relative aux fonctions d'une seule variable devient alors applicable et permet d'écrire immédiatement les équations (2). Mais ces deux équations ne sont pas suffisantes; en les supposant satisfaites, le théorème de Taylor donne

$$\varphi(x+h, y+k) - \varphi(x, y) = \frac{h^2}{1.2}\frac{d^2\varphi}{dx^2} + hk\frac{d^2\varphi}{dx\,dy} + \frac{k^2}{1.2}\frac{d^2\varphi}{dy^2} + \mathrm{R}, \tag{3}$$

R étant pour de petites valeurs de h et de k, négligeable par rapport aux trois premiers termes du second membre. Si donc les trois dérivées $\frac{d^2\varphi}{dx^2}$, $\frac{d^2\varphi}{dx\,dy}$, $\frac{d^2\varphi}{dy^2}$, ne sont pas nulles, le signe du second membre, pour des valeurs infiniment petites de h et de k, sera le même que celui du trinôme

$$\frac{h^2}{2}\frac{d^2\varphi}{dx^2} + hk\frac{d^2\varphi}{dx\,dy} + k^2\frac{d^2\varphi}{dy^2}; \tag{4}$$

il y aura maximum ou minimum si cette somme reste toujours négative ou toujours

positive pour toutes les valeurs très-petites attribuées à h et à k; or, en écrivant l'expression (4) de la manière suivante :

$$\frac{h^2}{2}\left[\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{k}{h}\frac{d^2\varphi}{dx\,dy}+\left(\frac{k}{h}\right)^2\frac{d^2\varphi}{dy^2}\right],$$

on voit que son signe dépend seulement du second facteur, lequel est une fonction du rapport $\frac{k}{h}$, qui peut varier de $-\infty$ à $+\infty$, et pour que le trinôme conserve toujours le même signe, on doit avoir

$$\left(\frac{d^2\varphi}{dx\,dy}\right)^2-\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right)\left(\frac{d^2\varphi}{dy^2}\right)<0. \tag{5}$$

Cette condition exige évidemment que $\frac{d^2\varphi}{dx^2}$ et $\frac{d^2\varphi}{dy^2}$ aient le même signe; s'ils sont négatifs, le trinôme (4) est négatif, et il y a maximum; il y a minimum, au contraire, lorsque, l'inégalité (5) étant satisfaite, $\frac{d^2\varphi}{dx^2}$ et $\frac{d^2\varphi}{dy^2}$ sont positifs.

Lorsque les valeurs de x et de y qui annulent $\frac{d\varphi}{dx}$ et $\frac{d\varphi}{dy}$, donnent

$$\left(\frac{d^2\varphi}{dx\,dy}\right)^2-\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right)\left(\frac{d^2\varphi}{dy^2}\right)=0,$$

le trinôme (4) ne peut pas changer de signe, mais il peut devenir nul, et si l'on donne au rapport $\frac{k}{h}$ une valeur convenable, les termes du second ordre disparaissent dans le second membre de l'équation (3), et ce sont ceux du troisième dont la somme impose son signe au développement; or ces termes changent de signe sans changer de valeur, lorsque, laissant $\frac{k}{h}$ invariable, on change h en $-h$, et k en $-k$; il n'y a donc ni maximum ni minimum si, pour la valeur considérée du rapport $\frac{k}{h}$, leur somme est différente de zéro; lorsque la somme des termes du troisième ordre est nulle en même temps que celle des termes du second, ce sont ceux du quatrième ordre qui, pour cette valeur du rapport $\frac{k}{h}$, imposent leur signe au développement, et comme ils ne changent pas de signe lorsque h se change en $-h$ et k en $-k$, il suffira, pour qu'il y ait maximum ou minimum, que ce signe soit le même que celui que conserve la somme des termes du second ordre pour les valeurs de $\frac{k}{h}$ qui ne l'annulent pas.

481. Si les trois dérivées du second ordre $\frac{d^2\varphi}{dx^2}$, $\frac{d^2\varphi}{dy^2}$, $\frac{d^2\varphi}{dx\,dy}$, sont nulles en même

temps que celles du premier, il faut, pour qu'il y ait maximum ou minimum, que les quatre dérivées du troisième ordre soient nulles aussi pour les mêmes valeurs des variables, et qu'en outre l'ensemble des termes du quatrième degré en h et k dans le développement de Taylor ait un signe invariable : cette dernière condition sera remplie si, en égalant à zéro la somme de ces termes, l'équation du quatrième degré en $\frac{k}{h}$ qui en résulte a toutes ses racines imaginaires.

Fonctions d'un plus grand nombre de variables.

482. L'étude des maxima et minima d'une fonction d'un plus grand nombre de variables repose sur des considérations entièrement semblables aux précédentes. Soit $\varphi(x, y, z)$ une fonction de trois variables indépendantes; pour qu'elle soit maxima ou minima, il faut que la différence

$$\varphi(x+h, y+k, z+l) - \varphi(x, y, z)$$

conserve le même signe, quelles que soient les valeurs très-petites attribuées aux accroissements h, k, l. Or on a (395)

$$\varphi(x+h, y+k, z+l) - \varphi(x, y, z) = h\left(\frac{d\varphi}{dx}\right) + k\left(\frac{d\varphi}{dy}\right) + l\left(\frac{d\varphi}{dz}\right) + \mathrm{R},$$

R étant, pour de très-petites valeurs de h, k, l, aussi petit que l'on veut par rapport à la somme des trois premiers termes, qui par conséquent influent seuls sur le signe du second membre. Ce signe ne peut être invariable que si l'on a

$$\frac{d\varphi}{dx} = 0, \quad \frac{d\varphi}{dy} = 0, \quad \frac{d\varphi}{dz} = 0.$$

Ces conditions étant supposées remplies, le théorème de Taylor donne

$$\varphi(x+h, y+k, z+l) - \varphi(x, y, z)$$
$$= \frac{h^2}{2}\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{l^2}{2}\frac{d^2\varphi}{dz^2} + hk\frac{d^2\varphi}{dx\,dy} + hl\frac{d^2\varphi}{dx\,dz} + kl\frac{d^2\varphi}{dy\,dz} + \mathrm{R},$$

R étant, pour de très-petites valeurs de h, k, l, aussi petit que l'on voudra par rapport aux termes qui le précèdent. Il faut donc, pour qu'il y ait maximum ou minimum, que le polynôme

$$\frac{h^2}{2}\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{l^2}{2}\frac{d^2\varphi}{dz^2} + hk\frac{d^2\varphi}{dx\,dy} + hl\frac{d^2\varphi}{dx\,dz} + kl\frac{d^2\varphi}{dy\,dz}$$

conserve le même signe, quelles que soient les valeurs très-petites attribuées à h, k et l.

Or il est permis de supprimer cette condition relative à la petitesse des accroissements. En mettant en effet en facteur la quantité positive h^2, on voit que le signe du polynôme ne dépend que des rapports $\frac{k}{h}$ et $\frac{l}{h}$ qui sont entièrement arbitraires et peuvent varier de $-\infty$ à $+\infty$. Cela posé, la condition cherchée se trouvera de la manière suivante. Soit le polynôme

$$(1) \qquad Ah^2 + Bk^2 + Cl^2 + 2Dhk + 2Ehl + 2Fkl.$$

Pour exprimer que son signe reste invariable, quelles que soient les valeurs attribuées à h, k, l, on commencera par réunir tous les termes qui contiennent h, auxquels on ajoutera les termes nécessaires pour compléter un carré, lesquels bien entendu seront ensuite retranchés; l'expression (1) devient ainsi

$$(2) \qquad A\left(h + \frac{Ek}{A} + \frac{Fl}{A}\right)^2 + \left(C - \frac{F^2}{A}\right) l^2 + \left(B - \frac{F^2}{A}\right) k^2 + 2\left(D - \frac{EF}{A}\right) kl.$$

On réunira ensuite dans les termes qui suivent le premier, tous ceux qui contiennent k, en leur ajoutant les termes nécessaires pour compléter un carré. L'expression (2) devient ainsi

$$(3) \quad A\left(h + \frac{Ek}{A} + \frac{Fl}{A}\right)^2 + \left(C - \frac{F^2}{A}\right)\left(l - \frac{D - \frac{EF}{A}}{C - \frac{F^2}{A}} k\right)^2 + k^2\left[B - \frac{E^2}{A} - \frac{\left(D - \frac{EF}{A}\right)^2}{C - \frac{F^2}{A}}\right];$$

elle est par conséquent mise sous la forme

$$(4) \qquad A(h + mk + nl)^2 + A'(l + pk)^2 + A''k^2,$$

A, A′, A″, m, n, p, étant des constantes connues. Il est clair qu'une condition suffisante pour que le signe de (4) soit invariable, est que A, A′, A″, soient de mêmes signes; cette condition est en même temps nécessaire, car, h, k, l étant arbitraires, on peut réduire à zéro deux quelconques des trois carrés qui multiplient A, A′, A″, sans y réduire le troisième, dont le coefficient donnera par conséquent son signe à la somme totale, et si ces trois coefficients n'ont pas le même signe, la somme peut, suivant les valeurs de h, k, l, prendre des signes différents.

483. La théorie précédente s'étend sans difficulté aux fonctions d'un nombre quelconque de variables. La condition commune au maximum et au minimum est que les dérivées de la fonction par rapport à chacune des variables dont elle dépend soient toutes égales à zéro; il faut en outre que le polynôme homogène formé par les termes du second ordre dans le développement de l'accroissement de la fonction ait un signe invariable quels que soient les accroissements des variables; cette con-

dition s'exprimera comme dans le cas de trois variables, en mettant le polynôme sous la forme d'une somme de carrés multipliés par des coefficients constants qui devront avoir tous le même signe. Il y a maximum lorsque tous sont négatifs, et minimum lorsqu'ils sont tous positifs. S'ils sont de signes différents, il n'y a ni maximum ni minimum.

Au lieu de dire que les dérivées de la fonction sont toutes nulles pour les valeurs des variables qui correspondent au maximum ou au minimum, on peut dire que la différentielle totale de la fonction est égale à zéro. Cette différentielle étant la somme des produits des dérivées par les accroissements arbitraires attribués aux variables, les deux énoncés sont évidemment équivalents. Le second est pourtant, dans certains cas, d'une application plus facile.

Maxima et minima des fonctions implicites.

484. La théorie précédente s'applique sans changement aux fonctions implicites; on peut concevoir en effet que des opérations algébriques les transforment en fonctions explicites; les conditions relatives au maximum ou au minimum s'exprimeront alors au moyen de dérivées que l'on peut calculer à l'avance par la méthode connue pour la différentiation des fonctions implicites. La manière la plus commode de former dans ce cas les conditions communes au maximum et au minimum consiste à égaler à zéro la différentielle totale de la fonction considérée.

Soit $\varphi(x_1, x_2, x_3 \ldots x_{m+n})$ une fonction de $m+n$ variables entre lesquelles on donne n relations, $L_1 = 0$, $L_2 = 0 \ldots$, $L_n = 0$. La condition commune au maximum et au minimum est

$$\frac{d\varphi}{dx_1}dx_1 + \frac{d\varphi}{dx_2}dx_2 + \frac{d\varphi}{dx_3}dx_3 + \ldots + \frac{d\varphi}{dx_{m+n}}dx_{m+n} = 0. \tag{1}$$

Les variables $x_1, x_2, \ldots, x_{m+n}$, étant liées par n équations, leurs différentielles satisfont à n équations du premier degré:

$$\begin{aligned}
&\frac{dL_1}{dx_1}dx_1 + \frac{dL_1}{dx_2}dx_2 + \ldots + \frac{dL_1}{dx_{m+n}}dx_{m+n} = 0,\\
&\frac{dL_2}{dx_1}dx_1 + \frac{dL_2}{dx_2}dx_2 + \ldots + \frac{dL_2}{dx_{m+n}}dx_{m+n} = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{dL_n}{dx_1}dx_1 + \frac{dL_n}{dx_2}dx_2 + \ldots + \frac{dL_n}{dx_{m+n}}dx_{m+n} = 0.
\end{aligned} \tag{2}$$

Si par le moyen de ces n équations, on élimine du premier membre de l'équation (1) un nombre égal de différentielles, dx_1, dx_2, . . ., dx_n par exemple, toutes celles qui resteront pourront alors être considérées comme arbitraires, et l'on égalera ensuite à zéro les coefficients de chacune d'elles. On obtiendra ainsi m équations

qui, jointes aux n équations données, détermineront les valeurs des $m+n$ inconnues pour lesquelles il peut y avoir maximum ou minimum.

485. Pour éliminer les différentielles $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$, on peut ajouter les équations (1) et (2) après avoir multiplié les dernières par des facteurs $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, que l'on déterminera de manière à rendre nuls les coefficients de ces différentielles : on devra ensuite, comme il a été dit, égaler à zéro les coefficients des différentielles restantes, en sorte que, pour des raisons différentes il est vrai, tous les coefficients auront été égalés à zéro, et l'on aura $m+n$ relations entre les n multiplicateurs et les inconnues primitives, sans que le choix arbitraire des différentielles éliminées ait altéré en rien la symétrie des formules. Les équations ainsi obtenues sont

$$\begin{aligned}
&\frac{d\varphi}{dx_1}+\lambda_1\frac{dL_1}{dx_1}+\lambda_2\frac{dL_2}{dx_1}+\ldots+\lambda_n\frac{dL_n}{dx_1}=0,\\
&\frac{d\varphi}{dx_2}+\lambda_1\frac{dL_1}{dx_2}+\lambda_2\frac{dL_2}{dx_2}+\ldots+\lambda_n\frac{dL_n}{dx_2}=0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{d\varphi}{dx_{m+n}}+\lambda_1\frac{dL_1}{dx_{m+n}}+\lambda_2\frac{dL_2}{dx_{m+n}}+\ldots+\lambda_n\frac{dL_n}{dx_{m+n}}=0.
\end{aligned}$$

Il faudra leur adjoindre les n équations données $L_1=0, L_2=0, \ldots, L_n=0$, et le nombre total des équations se trouvera égal à celui des inconnues auxquelles il faut adjoindre les multiplicateurs $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

486. Comme application de la théorie des maxima des fonctions implicites, nous chercherons le polygone de plus grande surface que l'on puisse faire avec des côtés donnés.

Soient $x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n$, les coordonnées inconnues des sommets du polygone, la surface qu'il s'agit de rendre minima a pour expression

$$(1)\qquad S=\frac{1}{2}(x_1-x_2)(y_2+y_1)+\frac{1}{2}(x_2-x_3)(y_3+y_2)+\ldots+\frac{1}{2}(x_n-x_1)(y_1+y_n),$$

c'est-à-dire

$$(2)\qquad \frac{1}{2}[y_1(x_n-x_2)+y_2(x_1-x_3)+y_3(x_2-x_4)+\ldots+y_n(x_{n-1}-x_1)].$$

Les relations données entre les $2n$ variables $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$, sont

$$(3)\qquad \begin{aligned}
a_1^2&=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2,\\
a_2^2&=(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
a_n^2&=(x_n-x_1)^2+(y_n-y_1)^2.
\end{aligned}$$

La condition du maximum, $dS = 0$, est ici

$$dy_1(x_n - x_2) + dy_2(x_1 - x_3) + \ldots + dy_n(x_{n-1} - x_1) + y_1 d(x_n - x_2) + y_2 d(x_1 - x_3) + \ldots$$

$$+ y_n d(x_{n-1} - x_1) = 0, \tag{4}$$

les différentielles qui y figurent étant liées par les n équations

$$\begin{aligned}
&(x_1 - x_2)\, d(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)\, d(y_1 - y_2) = 0,\\
&(x_2 - x_3)\, d(x_2 - x_3) + (y_2 - y_3)\, d(y_2 - y_3) = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&(x_n - x_1)\, d(x_n - x_1) + (y_n - y_1)\, d(y_n - y_1) = 0,
\end{aligned} \tag{5}$$

au moyen desquelles on peut éliminer de l'équation (4) les différentielles dx_1, $dx_2, \ldots, dx_n$; chacune d'elles figurant dans trois équations seulement, les multiplicateurs qu'il faut adopter pour que l'élimination se fasse par addition sont faciles à trouver, et l'on obtient une équation de la forme

$$K_1 dy_1 + K_2 dy_2 + \ldots + K_n dy_n = 0, \tag{6}$$

où l'on a

$$\begin{aligned}
K_1 &= x_n - x_2 + (y_n + y_1)\frac{y_n - y_1}{x_n - x_1} - (y_1 + y_2)\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2},\\
K_2 &= x_1 - x_3 + (y_1 + y_2)\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} - (y_2 + y_3)\frac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3},\\
K_3 &= x_2 - x_4 + (y_2 + y_3)\frac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3} - (y_3 + y_4)\frac{y_3 - y_4}{x_3 - x_4},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
K_n &= x_{n-1} - x_1 + (y_{n-1} + y_n)\left(\frac{y_{n-1} - y_n}{x_{n-1} - x_n}\right) - (y_n + y_1)\frac{y_n - y_1}{x_n - x_1}.
\end{aligned}$$

L'application de la règle générale conduirait à égaler maintenant à zéro chacun des coefficients $k_1, k_2, \ldots, k_n$, mais ce serait commettre une grave erreur. Les n équations données entre $x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n$, ne laissent pas en effet $y_1, y_2, \ldots, y_n$ entièrement arbitraires, et les différentielles $dy_1, dy_2, \ldots, dy_n$ sont liées par une relation nécessaire, en sorte que l'équation (6) peut être satisfaite sans que chacun de ses coefficients soit nul. Si en effet on déduit des équations (3) les valeurs de $x_1 - x_2, x_2 - x_3, \ldots, x_n - x_1$, leur somme doit être nulle, et cette condition donne une relation entre $y_1, y_2, \ldots, y_n$. La relation correspondante entre $dy_1, dy_2, \ldots, dy_n$, s'obtiendra en ajoutant les différences $dx_1 - dx_2$, $dx_2 - dx_3, \ldots, dx_n - dx_1$, déduites des équations (5). L'équation ainsi obtenue est

$$H_1 dy_1 + H_2 dy_2 + \ldots + H_n dy_n = 0, \tag{7}$$

où

$$\Pi_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} - \frac{y_n - y_1}{x_n - x_1},$$

$$\Pi_2 = \frac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3} - \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots \quad \cdots\cdots$$

$$\Pi_n = \frac{y_n - y_1}{x_n - x_1} - \frac{y_{n-1} - y_n}{x_{n-1} - x_n}.$$

L'équation (6) devant avoir lieu pour toutes les valeurs de $dy_1, dy_2, \ldots, dy_n$, qui satisfont à l'équation (7), il est nécessaire et suffisant que l'on ait

$$\frac{K_1}{\Pi_1} = \frac{K_2}{\Pi_2} = \frac{K_3}{\Pi_3} \cdots = \frac{K_n}{\Pi_n}. \tag{8}$$

Telles sont les conditions nécessaires pour que la surface du polygone soit maxima. Il est facile de les interpréter géométriquement. Si l'on écrit en effet que les perpendiculaires élevées sur les milieux des côtés, $(x_n, y_n)(x_1, y_1)$, $(x_1, y_1)(x_2, y_2)$, $(x_2, y_2)(x_3, y_3)$, concourent en un même point, on retrouvera l'équation

$$\frac{K_1}{\Pi_1} = \frac{K_2}{\Pi_2},$$

et l'on voit aisément que l'équation continue (8) exprime que toutes les perpendiculaires élevées sur les milieux des côtés concourent en un seul et même point, et que par conséquent le polygone est inscriptible dans un cercle.

487. Cherchons, comme seconde application, le polygone de plus grande surface entre tous les polygones isopérimètres d'un nombre donné de côtés.

En désignant, comme dans la question précédente, les coordonnées des sommets par $x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n$, l'expression de la surface qu'il faut rendre maxima est

$$S = \frac{1}{2}[y_1(x_n - x_2) + y_2(x_1 - x_3) + \ldots + y_n(x_{n-1} - x_n)], \tag{1}$$

et si l'on pose encore

$$\begin{aligned} a_1^2 &= (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2, \\ a_2^2 &= (x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_n^2 &= (x_n - x_1)^2 + (y_n - y_1)^2, \end{aligned} \tag{2}$$

la seule équation de condition donnée entre les $2n$ coordonnées est

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = l, \tag{3}$$

d'où l'on déduit

$$da_1 + da_2 + \ldots + da_n = 0, \tag{4}$$

c'est-à-dire, en remplaçant $da_1, da_2, \ldots, da_n$ par leurs valeurs,

$$0 = \frac{(x_1-x_2)\,d(x_1-x_2)+(y_1-y_2)\,d(y_1-y_2)}{a_1} + \frac{(x_2-x_3)\,d(x_2-x_3)+(y_2-y_3)\,d(y_2-y_3)}{a_3} + \ldots$$
$$+ \frac{(x_n-x_1)\,d(x_n-x_1)+(y_n-y_1)\,d(y_n-y_1)}{a_n}. \tag{5}$$

L'équation $dS = 0$, qui exprime la condition du maximum, est, comme dans le problème précédent,

$$0 = dy_1(x_n-x_2)+dy_2(x_1-x_3)+\ldots+dy_n(x_{n-1}-x_1)-dx_1(y_n-y_2)-dx_2(y_1-y_3)-\ldots$$
$$-dx_n(y_{n-1}-y_1). \tag{6}$$

Si l'on écrit l'équation (5) sous la forme

$$A_1dx_1+A_2dx_2+\ldots+A_ndx_n+B_1dy_1+B_2dy_2+\ldots+B_ndy_n=0, \tag{7}$$

il faut évidemment, pour que l'équation (6) en soit une conséquence, que les coefficients des $2n$ différentielles soient proportionnels dans l'une et dans l'autre, et les équations qui expriment le maximum sont par conséquent

$$\frac{A_1}{y_n-y_2}=\frac{A_2}{y_1-y_3}=\frac{A_3}{y_2-y_4}=\ldots=\frac{A_n}{y_{n-1}-y_n},$$
$$\frac{B_1}{x_n-x_2}=\frac{B_2}{x_1-x_3}=\frac{B_3}{x_2-x_4}=\ldots=\frac{B_n}{x_{n-1}-x_n}, \tag{8}$$
$$\frac{A_1}{B_1}=-\frac{x_n-x_2}{y_n-y_2}.$$

Si α_p est l'inclinaison sur l'axe des X du côté a_p, et β_p, l'angle formé avec le même axe par la diagonale qui joint les points (x_{p-1}, y_{p-1}), (x_{p+1}, y_{p+1}), l'équation

$$\frac{A_1}{B_1}=-\frac{x_n-x_2}{y_n-y_2} \tag{9}$$

devient, en y remplaçant A_1 et B_1 par leurs valeurs,

$$\frac{\sin\alpha_1-\sin\alpha_n}{\cos\alpha_1-\cos\alpha_n}=-\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}, \tag{10}$$

c'est-à-dire

$$\frac{\cos\left(\frac{\alpha_1+\alpha_n}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha_1+\alpha_n}{2}\right)}=\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1},$$

ou enfin,

$$\frac{\alpha_1+\alpha_n}{2}=\beta_1+n\pi. \tag{11}$$

La direction déterminée par l'angle β_1 forme donc des angles égaux avec les côtés a_n et a_1 ; cette direction est celle de la base du triangle dont a_n et a_1 sont les côtés, celui-ci est donc isocèle, et l'on a

$$a_n = a_1 ;$$

on verra de même que tous les côtés sont égaux. En les regardant comme donnés, le problème rentre dans le précédent, le polygone doit donc être inscriptible dans un cercle, et est par conséquent régulier. On prouverait aisément que les équations dont nous n'avons pas fait usage expriment qu'en admettant l'égalité des côtés, les angles aussi doivent être égaux; mais il est inutile d'insister sur ces développements élémentaires qui ne peuvent offrir de difficulté.

Recherche de l'expression, de forme donnée, qui, entre certaines limites, s'écarte le moins possible d'une fonction donnée.

488. M. Tchebitcheff a appliqué la théorie des maxima et minima à la solution d'un problème très-intéressant en lui-même, et qui donne lieu à des artifices analytiques remarquables.

Une fonction $\varphi(x)$ étant donnée, on propose de la représenter approximativement par une expression P de forme donnée, et contenant un certain nombre de paramètres qu'il faut déterminer par la condition que la plus grande valeur que prend entre des limites données la différence $\varphi(x) - \mathrm{P}$ s'écarte le moins possible de zéro.

Soient $-h$ et $+h$ les limites données entre lesquelles reste comprise la variable x. Nommons L la plus grande valeur que prenne, entre ces limites, la différence $\varphi(x) - \mathrm{P}$, et supposons qu'elle réponde à $x = x_1$: il faut évidemment que $x = x_1$ rende cette différence minima, à moins que x_1 ne soit précisément l'une des deux limites $-h$ et $+h$. Si donc on pose

$$\varphi(x) - \mathrm{P} = \mathrm{F}(x), \tag{1}$$

x_1 doit vérifier l'équation

$$(x^2 - h^2)\,\mathrm{F}'(x) = 0, \tag{2}$$

et toutes les valeurs de x, qui font acquérir à $\mathrm{F}(x)$ sa valeur maxima $\pm \mathrm{L}$, satisfont à l'équation (2). Si l'on désigne ces valeurs par $x_1, x_2, \ldots, x_\mu$, elles sont solutions communes des deux équations

$$\mathrm{F}(x)^2 = \mathrm{L}^2, \quad (x^2 - h^2)\,\mathrm{F}'(x) = 0.$$

Soient $p_1, p_2, \ldots, p_n$, les paramètres arbitraires qui figurent dans P, et qu'il faut déterminer de manière à rendre L un minimum ; nous allons démontrer que les va-

leurs de ces paramètres doivent être telles, que les équations du premier degré

$$
(3)\quad
\begin{cases}
\lambda_1 \dfrac{dF(x_1)}{dp_1} + \lambda_2 \dfrac{dF(x_1)}{dp_2} + \ldots + \lambda_n \dfrac{dF(x_1)}{dp_n} = F(x_1),\\
\lambda_1 \dfrac{dF(x_2)}{dp_1} + \lambda_2 \dfrac{dF(x_2)}{dp_2} + \ldots + \lambda_n \dfrac{dF(x_2)}{dp_n} = F(x_2),\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\lambda_1 \dfrac{dF(x_\mu)}{dp_1} + \lambda_2 \dfrac{dF(x_\mu)}{dp_2} + \ldots + \lambda_n \dfrac{dF(x_\mu)}{dp_n} = F(x_\mu),
\end{cases}
$$

soient incompatibles et ne puissent être satisfaites par aucun système de valeurs de $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Supposons en effet que le problème soit résolu, et que l'on ait trouvé des valeurs de $p_1, p_2, \ldots, p_n$, telles, que la fonction $F(x)$, égale à $\pm L$ pour $x = x_1$, $x = x_2, \ldots$, $x = x_\mu$, soit moindre que L pour toute autre valeur de x comprise entre les limites, et que pour toute autre valeur des paramètres, elle puisse au contraire surpasser L. S'il est possible de satisfaire aux équations (3), les conditions précédentes ne sauraient être satisfaites. Admettons en effet que $F(x)$ devienne égale à $\pm L$ pour $x = x_1$, $x = x_2, \ldots, x = x_\mu$, et qu'il soit moindre que L pour toute autre valeur de la variable. Je dis que l'on pourra changer les paramètres de manière à rendre le maximum de $F(x)$ moindre que L : il suffira de remplacer $p_1, p_2, \ldots, p_n$, respectivement par $p_1 - \lambda_1 \omega$, $p_2 - \lambda_2 \omega, \ldots, p_n - \lambda_n \omega$, ω étant infiniment petit et positif. La variation infiniment petite de $F(x)$ est en effet

$$
-\frac{dF(x)}{dp_1}\lambda_1\omega - \frac{dF(x)}{dp_2}\lambda_2\omega - \ldots - \frac{dF(x)}{dp_n}\lambda_n\omega,
$$

et pour $x = x_1$, $x = x_2, \ldots, x = x_n$, elle se réduit, en vertu des équations (3), à

$$
-F(x)\omega :
$$

elle est donc de signe contraire à la fonction, dont par conséquent la valeur absolue diminue. La valeur absolue de $F(x)$ diminuant pour $x = x_1$, et pour les valeurs voisines, devient plus petite que L; il est clair d'ailleurs que la fonction variant infiniment peu, elle reste aussi moindre que L pour les valeurs de x, dont la différence avec $x_1, x_2, \ldots, x_\mu$ est finie; $F(x)$ est donc, après la variation des paramètres, moindre que L, pour toute valeur de x comprise entre les limites $-h$ et $+h$, et par conséquent les valeurs $p_1, p_2, \ldots, p_n$, qu'on leur avait attribuées primitivement, ne sont pas celles qui rendent le maximum de la fonction le plus petit possible.

Il est donc démontré que les équations (3) doivent être incompatibles pour que les conditions proposées soient satisfaites.

489. Appliquons les considérations qui précèdent à la solution du problème suivant : Trouver le polynôme de degré n de la forme

$$\varphi(x) = x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \ldots + p_{n-1} x + p_n,$$

qui, entre deux limites données $-h$ et $+h$, s'écarte le moins possible de zéro, c'est-à-dire dont la plus grande différence avec zéro ait la moindre valeur possible.

En nommant L la plus grande valeur absolue de cette fonction, lorsque x varie de $-h$ à $+h$, les valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_\mu$ de x, auxquelles correspond cette valeur L, satisfont aux deux équations

$$\varphi(x)^2 - L^2 = 0,$$
$$(x^2 - h^2)\, F'(x) = 0.$$

Le nombre μ de ces solutions communes est au moins égal à $n+1$; on a vu en effet que les équations

$$\begin{aligned}
&\frac{dF(x_1)}{dp_1}\lambda_1 + \frac{dF(x_1)}{dp_2}\lambda_2 + \ldots + \frac{dF(x_1)}{dp_n}\lambda_n = F(x_1),\\
&\frac{dF(x_2)}{dp_1}\lambda_1 + \frac{dF(x_2)}{dp_2}\lambda_2 + \ldots + \frac{dF(x_2)}{dp_n}\lambda_n = F(x_2),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{dF(x_\mu)}{dp_1}\lambda_1 + \frac{dF(x_\mu)}{dp_2}\lambda_2 + \ldots + \frac{dF(x_\mu)}{dp_n}\lambda_n = F(x_n),
\end{aligned}$$

doivent être incompatibles. Or ces équations deviennent, quand on y remplace la fonction F par sa valeur :

$$\begin{aligned}
&\lambda_1 x_1^{n-1} + \lambda_2 x_1^{n-2} + \ldots + \lambda_{n-1} x_1 + \lambda_n = F(x_1),\\
&\lambda_1 x_2^{n-1} + \lambda_2 x_2^{n-2} + \ldots + \lambda_{n-1} x_2 + \lambda_n = F(x_2),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\lambda_1 x_\mu^{n-1} + \lambda_2 x_\mu^{n-2} + \ldots + \lambda_{n-1} x_\mu + \lambda_n = F(x_\mu).
\end{aligned} \tag{4}$$

Or un polynôme de degré $n-1$ peut, par un choix convenable des coefficients, prendre des valeurs données pour des valeurs données de la variable, en nombre égal ou inférieur à n ; les équations (4) sont donc compatibles toutes les fois que μ est moindre que $n+1$, et pour que le problème soit résolu il faut par conséquent que μ soit égal ou supérieur à $n+1$. Les solutions communes aux équations

$$F(x)^2 - L^2 = 0, \quad (x^2 - h^2)\, F'(x) = 0 \tag{5}$$

sont nécessairement racines doubles de l'équation

$$(x - h^2)[F(x)^2 - L^2] = 0 ; \tag{6}$$

x_1 désignant en effet l'une d'elles, $x = x_1$ annule évidemment le premier membre de (6), et il annule aussi la dérivée

$$2(x^2 - h^2)\,\mathrm{F}(x)\,\mathrm{F}'(x) + 2x\,[\mathrm{F}(x)^2 - \mathrm{L}^2],$$

car on a, en vertu des équations (5),

$$(x_1^2 - h^2)\,\mathrm{F}'(x_1) = 0,$$
$$\mathrm{F}(x_1)^2 - \mathrm{L}^2 = 0.$$

Le nombre des racines auxquelles s'applique la remarque précédente étant $n+1$ au moins, le produit

$$(x^2 - h^2)\,[\mathrm{F}(x)^2 - \mathrm{L}^2]$$

est divisible par $(n+1)$ facteurs de la forme

$$(x - x_1)^2 (x - x_2)^2 \ldots (x - x_n)^2 (x - x_{n+1})^2,$$

et comme ce produit est précisément de degré $2n+2$, il est égal à une constante multipliée par le produit de ces facteurs, et l'on a

$$(7) \qquad (x^2 - h^2)\,[\mathrm{F}(x)^2 - \mathrm{L}^2] = \mathrm{C}\,(x - x_1)^2 (x - x_2)^2 \ldots (x - x_{n+1})^2.$$

Cette équation exige évidemment que $x = -h$ et $x = +h$ soient l'un et l'autre au nombre des racines $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$. En supprimant les facteurs correspondants, l'équation (7) devient

$$(8) \qquad \mathrm{F}(x)^2 - \mathrm{L}^2 = (x^2 - h^2)\,\varphi(x)^2,$$

où

$$\varphi(x) = \sqrt{\mathrm{C}}\,(x - x_3)(x - x_4)\ldots(x - x_{n+1}).$$

L'équation (8) donne

$$(9) \qquad \left[\mathrm{F}(x) - \varphi(x)\sqrt{x^2 - h^2}\right]\left[\mathrm{F}(x) + \varphi(x)\sqrt{x^2 - h^2}\right] = \mathrm{L}^2,$$

et par suite

$$\mathrm{F}(x) - \varphi(x)\sqrt{x^2 - h^2} = \frac{\mathrm{L}^2}{\mathrm{F}(x) + \varphi(x)\sqrt{x^2 - h^2}},$$

ou

$$\frac{\mathrm{F}(x)}{\varphi(x)} - \sqrt{x^2 - h^2} = \frac{\mathrm{L}^2}{\varphi(x)\left[\mathrm{F}(x) + \varphi(x)\sqrt{x^2 - h^2}\right]}.$$

La différence $\dfrac{\mathrm{F}(x)}{\varphi(x)} - \sqrt{x^2 - h^2}$ tend donc vers zéro lorsque x augmente, et, pour de très-grandes valeurs de x, elle est de l'ordre $\dfrac{1}{x^{2n-1}}$: sachant d'ailleurs que les

deux termes de la fraction $\frac{F(x)}{\varphi(x)}$ étant deux polynômes entiers, l'un est de degré n et l'autre de degré $n-1$, cette condition suffit pour les déterminer l'un et l'autre; il est impossible en effet que deux fractions différentes

$$\frac{F(x)}{\varphi(x)}, \quad \frac{F_1(x)}{\varphi_1(x)},$$

dont les dénominateurs sont de degrés k et k', aient, pour x infini, une différence infiniment petite d'ordre supérieur à celui de $\frac{1}{x^{k+k'}}$. Si donc $\varphi(x)$ et $\varphi_1(x)$ étaient, l'un et l'autre, de degré $n-1$, la différence des deux fractions serait, au plus, de l'ordre $\frac{1}{x^{2n-2}}$, et il serait par conséquent impossible que toutes deux eussent avec $\sqrt{x^2-h^2}$ une différence de même ordre que $\frac{1}{x^{2n-1}}$.

Le problème est donc ramené à trouver une fraction $\frac{F(x)}{\varphi(x)}$, dont le numérateur soit de degré n, et le dénominateur de degré $n-1$, et dont la différence avec $\sqrt{x^2-h^2}$ soit, pour une valeur infinie de x, un infiniment petit de même ordre que $\frac{1}{x^{2n-1}}$.

Pour résoudre ce problème, il faut réduire $\sqrt{x^2-h^2}$ en fraction continue, et celle des réduites dont le numérateur est de degré n est la fraction cherchée qui, nous l'avons démontré, est unique.

On a

$$\sqrt{x^2-h^2} = x - \frac{h^2}{x+\sqrt{x^2-h^2}},$$

donc

$$\sqrt{x^2-h^2} - x = -\frac{h^2}{x+\sqrt{x^2-h^2}} = -\frac{h^2}{2x+(\sqrt{x^2-h^2}-x)},$$

on en conclut

$$\sqrt{x^2-h^2} - x = -\frac{h^2}{2x-\frac{h^2}{2x+(\sqrt{x^2-h^2}-x)}} = -\frac{h^2}{2x-\frac{h^2}{2x-\frac{h^2}{2x+(\sqrt{x^2-h^2}-x)}}},$$

et l'on a évidemment, en répétant la même transformation un nombre quelconque de fois,

$$\sqrt{x^2-h^2} - x = -\cfrac{h^2}{2x-\cfrac{h^2}{2x-\cfrac{h^2}{2x-\cfrac{h^2}{2x}\ddots}}} \ddots - \frac{h^2}{2x+(\sqrt{x^2-h^2}-x)}.$$

Si l'on nomme $\frac{P_1}{Q_1}, \frac{P_2}{Q_2}, \ldots, \frac{P_n}{Q_n}$, les réduites de la fraction continue

$$x - \cfrac{h^2}{2x - \cfrac{h^2}{2x - \cfrac{h^2}{2x - \cfrac{h^2}{2x - \ddots}}}}$$

chaque réduite se déduisant comme on sait de deux précédentes, on a, en général,

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} = \frac{2x\,P_n - h^2 P_{n-1}}{2x\,Q_n - h^2 Q_{n-1}},$$

et si, dans le calcul de $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$, on remplace $2x$ par $2x + (\sqrt{x^2 - h^2} - x)$, c'est-à-dire par $x + \sqrt{x^2 - h^2}$, la réduite deviendra la fraction terminée qui représente $\sqrt{x^2 - h^2}$; on a donc

$$\sqrt{x^2 - h^2} = \frac{P_n(x + \sqrt{x^2 - h^2}) - h^2 P_{n-1}}{Q_n(x + \sqrt{x^2 - h^2}) - h^2 Q_{n-1}}.$$

En chassant les dénominateurs et transposant, cette équation peut s'écrire

$$P_n - Q_n\sqrt{x^2 - h^2} = (x - \sqrt{x^2 - h^2})(P_{n-1} - Q_{n-1}\sqrt{x^2 - h^2});$$

on en déduit, en remplaçant successivement n par $2, 3, 4, \ldots$,

$$\begin{aligned}
P_2 - Q_2\sqrt{x^2 - h^2} &= (x - \sqrt{x^2 - h^2})(P_1 - Q_1\sqrt{x^2 - h^2}),\\
P_3 - Q_3\sqrt{x^2 - h^2} &= (x - \sqrt{x^2 - h^2})(P_2 - Q_2\sqrt{x^2 - h^2}),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
P_n - Q_n\sqrt{x^2 - h^2} &= (x - \sqrt{x^2 - h^2})(P_{n-1} - Q_{n-1}\sqrt{x^2 - h^2}).
\end{aligned}$$

On déduit de ces équations, en les multipliant membre à membre,

$$P_n - Q_n\sqrt{x^2 - h^2} = (x - \sqrt{x^2 - h^2})^{n-1}(P_1 - Q_1\sqrt{x^2 - h^2}).$$

La première réduite $\frac{P_1}{Q_1}$ étant égale à $\frac{x}{1}$, on a enfin

$$P_n - Q_n\sqrt{x^2 - h^2} = (x - \sqrt{x^2 - h^2})^n.$$

En changeant le signe de $\sqrt{x^2 - h^2}$, ce qui est évidemment permis, puisqu'une équation telle que la précédente exige l'égalité des parties rationnelles et des parties irrationnelles dans les deux membres, on aura

$$P_n + Q_n\sqrt{x^2 - h^2} = (x + \sqrt{x^2 - h^2})^n,$$

et par conséquent

$$P_n = \frac{(x+\sqrt{x^2-h^2})^n + (x-\sqrt{x^2-h^2})^n}{2}.$$

La fraction $\frac{P_n}{Q_n}$ est la fraction cherchée $\frac{F(x)}{\varphi(x)}$ dont le numérateur est de degré n, et la différence avec $\sqrt{x^2-h^2}$ d'ordre $\frac{1}{x^{2n+1}}$ lorsque x est infini. On a trouvé en effet

$$\sqrt{x^2-h^2} = \frac{P_n(x+\sqrt{x^2-h^2}) - h^2 P_{n-1}}{Q_n(x+\sqrt{x^2-h^2}) - h^2 Q_{n-1}},$$

par conséquent

$$\sqrt{x^2-h^2} - \frac{P_n}{Q_n} = \frac{h^2(P_n Q_{n-1} - P_{n-1} Q_n)}{Q_n[Q_n(x+\sqrt{x^2-h^2}) - h^2 Q_{n-1}]}.$$

Or le dénominateur du second membre est évidemment comparable à x^{2n+1}, et le numérateur est constant, parce que les équations

$$P_{n+1} = 2xP_n - h^2 P_{n-1},$$
$$Q_{n+1} = 2xQ_n - h^2 Q_{n-1},$$

donnent

$$P_{n+1} Q_n - P_n Q_{n+1} = h^2(Q_{n-1} P_n - P_{n-1} Q_n),$$

et comme $P_1 Q_2 - P_2 Q_1$ est indépendant de x, cette relation prouve que les différences analogues, relatives aux valeurs successives de n, le sont également. Le produit de $\frac{P_n}{Q_n}$ par un facteur constant étant la fraction cherchée, la valeur trouvée pour P_n représente le numérateur $F(x)$, c'est-à-dire le polynôme qui, entre les limites $-h$ et $+h$, s'écarte le moins possible de zéro, et la solution du problème proposé est

$$F(x) = C[(x+\sqrt{x^2-h^2})^n + (x-\sqrt{x^2-h^2})^n].$$

Il est aisé de voir que les termes en $\sqrt{x^2-h^2}$ se détruisent dans la somme des deux développements, et que $F(x)$ est, comme l'exige l'énoncé, un polynôme entier et rationnel de degré n. Pour que le coefficient du terme en x^n soit l'unité, il faut donner à C la valeur $\frac{1}{2^n}$, et l'on a enfin

$$F(x) = \frac{(x+\sqrt{x^2-h^2})^n + (x-\sqrt{x^2-h^2})^n}{2^n}.$$

La valeur maxima que prend $F(x)$ entre les limites $-h$ et $+h$ de la variable est atteinte, nous l'avons dit, pour $x = \pm h$; cette valeur est par conséquent égale

à $\frac{h^n}{2^{n-1}}$, et tout autre polynôme de degré n dont le premier terme est x^n doit par conséquent sortir des limites $-\frac{h^n}{2^{n-1}}$ et $+\frac{h^n}{2^{n-1}}$ entre lesquelles $F(x)$ reste compris.

490. La fonction

$$F(x)=\frac{(x+\sqrt{x^2-h^2})^n+(x-\sqrt{x^2-h^2})^n}{2^n}$$

peut s'exprimer simplement : si l'on pose

$$x=h\cos\varphi,$$

elle devient

$$F(x)=\frac{h^n(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi)^n+h^n(\cos\varphi-\sqrt{-1}\sin\varphi)^n}{2^n}=\frac{h^n\cos n\varphi}{2^{n-1}},$$

et en remplaçant φ par sa valeur, arc cos $\frac{x}{h}$, on a

$$F(x)=\frac{h^n.\cos\left(n\operatorname{arc\,cos}\frac{x}{h}\right)}{2^{n-1}}.$$

Telle est la fonction entière et rationnelle de x, de degré n, qui, lorsque x varie de $-h$ à $+h$, s'écarte le moins possible de zéro.

491. M. Tchebitchef a appliqué le résultat précédent à la théorie de l'interpolation. Soit $F(x)$ une fonction que l'on cherche à représenter, pour des valeurs de la variable comprises entre $-h$ et $+h$, par un polynôme de la forme

$$(1)\qquad A+Bx+Cx^2+\ldots+Hx^{n-1};$$

on détermine, comme on sait, les coefficients A, B, C,..., H, par la condition que pour n valeurs $x_1, x_2,\ldots, x_n$ de x, comprises entre $-h$ et $+h$, la fonction soit égale au polynôme. Le choix des valeurs $x_1, x_2,\ldots, x_n$ est regardé comme indifférent, et l'on trouve plus simple habituellement de les prendre équidistantes; mais le raisonnement suivant montre qu'il est plus avantageux de les choisir autrement.

La fonction $F(x)$ étant égale au polynôme (1) pour les valeurs $x_1, x_2,\ldots, x_n$ de x, si l'on pose

$$(2)\qquad F(x)-A-Bx-Cx^2\ldots-Hx^{n-1}=P\frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{1.2.3\ldots n},$$

le facteur P sera, pour chaque valeur de x, égal à l'une des valeurs que prend la $n^{ième}$ dérivée de $F(x)$, lorsque x varie de $-h$ à $+h$; supposons, en effet, que l'on

attribue à P une valeur telle, que l'équation (2) soit exacte pour une valeur x_{n+1} de x, comprise entre $-h$ et $+h$, l'équation

$$F(x) - A - Bx - Cx^2 \ldots - Hx^{n-1} - P\frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{1.2.3\ldots n} = 0.$$

Admettant les $n+1$ racines $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$, toutes comprises entre $-h$ et $+h$, la dérivée du premier membre s'annule n fois entre les mêmes limites; la seconde dérivée s'annule $n-1$ fois,..., et la $n^{ième}$ dérivée une fois au moins. On a, par conséquent, pour une valeur de x comprise entre $-h$ et $+h$,

$$F^n(x) - P = 0.$$

P est donc, comme nous l'avons annoncé, l'une des valeurs que prend $F^n(x)$, lorsque x varie de $-h$ à $+h$.

L'erreur commise en remplaçant la fonction $F(x)$ par le polynôme (1) peut, d'après ce qui précède, être représentée par

$$\frac{F^n(\alpha)}{1.2.3\ldots n}(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n),$$

α désignant une valeur inconnue, variable avec x, mais toujours comprise entre $-h$ et $+h$.

Lorsque h est très-petit, si la dérivée $F^{n+1}(x)$ a pour $x=0$ une valeur finie et déterminée, le facteur $\frac{F^n(\alpha)}{1.2.3\ldots n}$ varie peu, et le rapport de ses valeurs extrêmes est peu différent de l'unité; on doit donc, pour obtenir la meilleure représentation possible, choisir les valeurs de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de telle sorte que le produit

$$(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$$

s'écarte le moins possible de zéro, et l'on prendra par conséquent pour $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les racines de l'équation

$$(3) \qquad (x+\sqrt{x^2-h^2})^n + (x-\sqrt{x^2-h^2})^n = 0.$$

Ces racines sont d'ailleurs faciles à obtenir; si l'on fait $x = h\cos\varphi$, l'équation (3) devient

$$\cos n\varphi = 0,$$

et l'on en tire

$$\varphi = \cos\frac{(2k+1)\pi}{2n};$$

les valeurs de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont par conséquent

$$h\cos\frac{\pi}{2n}, \quad h\cos\frac{3\pi}{2n}, \ldots, \quad h\cos\frac{2n-1}{2n}\pi.$$

Elles s'interprètent géométriquement d'une manière élégante. Si l'on considère, en effet, sur l'axe des x, l'intervalle auquel répondent les valeurs considérées, et dont les extrémités ont pour abscisses $-h$ et $+h$, en décrivant, sur cet intervalle comme diamètre, une demi-circonférence que l'on partagera en $2n$ parties égales, les projections des points de division, pris de deux en deux, auront pour abscisses les valeurs de x pour lesquelles la fonction est égale au polynôme du degré n qui la représente le mieux.

EXERCICES.

1. De tous les polygones circonscrits à une courbe convexe, celui qui a l'aire minima est touché par la courbe au point milieu de chaque côté.

2. Déterminer les plans passant par le centre d'un ellipsoïde, et coupant la surface suivant un cercle, par la condition que la distance maxima du centre à un point de la section soit indéterminée.

3. Appliquer la même méthode à la détermination des sections circulaires de la courbe

$$(x^2+y^2+z^2)^2 = ax^2+by^2+cz^2.$$

4. De tous les triangles sphériques de même surface, celui qui est équilatéral a le plus petit périmètre.

5. Examiner si, pour $x=0$, $y=0$, l'expression

$$a^2x^2y - 2ax^3y + x^4y - 2ax^2y^2 + 2x^3y^2 + x^2y^3$$

est maxima ou minima.

6. La normale en un point d'une surface est la distance minima ou maxima de l'un de ses points à la surface. Montrer que, sur chaque normale, il existe deux points tels, que la distance des points intermédiaires n'est ni maxima ni minima.

7. Pour que le polynôme

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2Fyz+2Gxz+2Hxy$$

conserve le même signe, quelles que soient les valeurs attribuées à x, y, z, il faut que l'on ait

$$BC-F^2<0, \quad CA-G^2<0, \quad AB-H^2<0,$$

et que, de plus, l'expression

$$ABC - AF^2 - BG^2 - CH^2 + 2FGH,$$

soit de même signe que A, B et C.

8. Les conditions précédentes sont remplies lorsque les expressions

$$BC + CA + AB - F^2 - G^2 - H^2,$$
$$(A + B + C)(ABC - AF^2 - BG^2 - CH^2 + 2FGH),$$

sont toutes deux positives.

LIVRE TROISIÈME.

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES.

CHAPITRE PREMIER.

COURBURE DES LIGNES PLANES.

Sens de la courbure.

492. Le mot *courbure* indique la déviation de la forme rectiligne. Lorsqu'une ligne n'est pas droite ou composée de lignes droites, elle est courbe et a en chaque point une courbure dirigée vers l'une des deux portions du plan qui sont séparées par la tangente. On dit que la courbe tourne sa concavité vers cette région, et sa convexité vers l'autre : la détermination du sens de la courbure est le premier problème que nous devons résoudre.

Si nous rapportons les points du plan à deux axes de coordonnées rectangulaires, une courbe a sa concavité tournée dans le sens des Y positifs lorsque, dans le voisinage du point de contact, son ordonnée est plus grande que celle de la tangente; dans le cas contraire, elle tourne sa concavité dans le sens des Y négatifs.

Soit $y=\varphi(x)$ l'équation de la courbe considérée : x et y étant les coordonnées d'un de ses points, celles d'un point voisin sont $x+h$ et $\varphi(x+h)$; or on a

$$\varphi(x+h)=\varphi(x)+h\varphi'(x)+\frac{h^2}{1.2}\varphi''(x+\theta h);$$

$\varphi(x)+h\varphi'(x)$ étant l'ordonnée de la tangente, et h^2 étant toujours positif, on voit que le sens de la courbure dépend du signe de $\varphi''(x+\theta h)$, c'est-à-dire, puisque h est très-petit, du signe de $\varphi''(x)$. Lorsque $\varphi''(x)$ est positif, l'ordonnée de la courbe est, dans le voisinage du point de contact, plus grande que celle de la tangente, la courbe tourne sa concavité dans le sens des Y positifs. Lorsque $\varphi''(x)$ est négatif, la concavité est tournée dans le sens des Y négatifs; dans le cas particulier où $\varphi''(x)$ est égal à zéro, la différence $\varphi(x+h)-\varphi(x)-h\varphi'(x)$, entre l'ordonnée de la courbe et celle de la tangente, change en général de signe avec h, la tangente traverse la courbe, et la courbure change de sens au point considéré qui est un point d'inflexion.

Définition de la courbure et du rayon de courbure.

493. On nomme courbure totale d'un arc plan sans inflexion, l'angle formé par ses tangentes extrêmes. Il faut entendre par là la somme des angles infiniment petits dont la tangente tourne successivement quand son point de contact passe d'une extrémité à l'autre, en parcourant l'arc tout entier. Si, par exemple, les extrémités coïncident, et que l'arc considéré forme une courbe convexe fermée, les tangentes extrêmes se confondent, mais la courbure totale est égale à quatre angles droits et non à zéro.

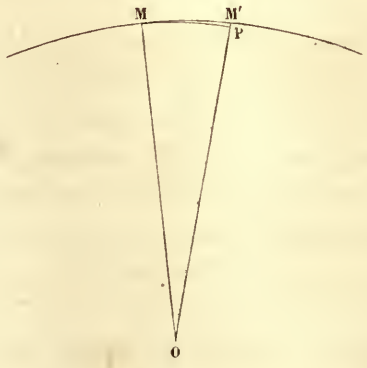
La courbure moyenne d'un arc est le rapport de la courbure totale à la longueur de l'arc.

La courbure d'une courbe en un point, est la courbure moyenne d'un arc infiniment petit pris sur la courbe à partir de ce point. Elle est égale par conséquent à l'angle formé par les tangentes aux extrémités de l'arc infiniment petit, que l'on nomme *angle de contingence*, divisé par la longueur de l'arc.

D'après ces définitions, la courbure d'un arc de cercle est égale au rapport de cet arc au rayon, et la courbure moyenne, indépendante de la longueur de l'arc, est égale à l'inverse du rayon; telle est aussi par conséquent la courbure d'un cercle en un quelconque de ses points.

Lorsque le rayon d'un cercle varie de zéro à l'infini, la courbure varie de l'infini à zéro; elle peut, par conséquent, prendre toutes les valeurs, et il existe toujours, pour chaque point d'une courbe, un cercle qui a même courbure qu'elle. Le rayon de ce cercle se nomme *rayon de courbure*, et le cercle lui même, placé de telle sorte qu'il touche la courbe au point considéré, en ayant sa concavité tournée du même côté, se nomme *cercle de courbure*.

494. Le centre de courbure est le centre du cercle de courbure. Il est le point d'intersection de deux normales infiniment voisines. Pour le démontrer, considérons un arc infiniment petit MM′, et soient MO, M′O les normales à ses extrémités.



L'angle O est égal évidemment à l'angle de contingence de l'arc MM′, et le rayon

de courbure de celui-ci est par conséquent la limite du rapport $\frac{MM'}{O}$. D'un autre côté, si du point O comme centre, avec OM pour rayon, on décrit un arc de cercle MP, on a

$$OM = \frac{MP}{O}.$$

Or MP et MM′ sont des infiniment petits du premier ordre; chacun de ces arcs diffère de sa corde d'un infiniment petit du troisième ordre, et la différence des cordes, moindre que M′P, est tout au plus du second ordre; MP et MM′ peuvent donc être remplacés l'un par l'autre, et par conséquent la limite OM est égale au rayon de courbure.

Expression du rayon de courbure.

495. Soit $y = \varphi(x)$ l'équation d'une courbe rapportée à des coordonnées rectangulaires : en nommant α l'angle formé par la tangente avec l'axe des X, on a

$$\text{tang}\,\alpha = \frac{dy}{dx},$$

et par conséquent

$$\alpha = \text{arc tang}\left(\frac{dy}{dx}\right).$$

L'angle de deux tangentes infiniment voisines, que l'on nomme angle de contingence, est la différence des angles qu'elles forment avec l'axe des X; il a donc pour expression

$$d\alpha = d\,\text{arc tang}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}\,dx}{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

La courbure de la courbe au point considéré est, par définition, le rapport de l'angle $d\alpha$ à l'arc correspondant ds : or on a

$$ds = dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

la courbure est donc égale à

$$\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}},$$

et le rayon de courbure ρ, qui est l'inverse de la courbure, est par conséquent

$$\rho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

Le cercle de courbure traverse la courbe.

496. Après avois prouvé (474) que les distances maxima et minima d'un point à une courbe sont l'une et l'autre normales, nous avons cherché, sur une normale donnée, le point dont la distance à la courbe comptée sur cette normale n'est ni maxima ni minima, et tel, par conséquent, que le cercle tangent à la courbe, et dont le point est le centre, soit intérieur d'un côté et extérieur de l'autre, traversant la courbe en même temps qu'il la touche. La distance d'un tel point à la courbe est précisément (474) le rayon de courbure dont nous venons de trouver l'expression, et par conséquent : *le cercle de courbure traverse la courbe.*

Il est facile de s'expliquer, à priori, pourquoi la courbe est traversée par son cercle de courbure. Le cercle et la courbe ont en effet même courbure au point qui leur est commun; mais, à partir de ce point, la courbure du cercle est constante, et celle de la courbe variable. C'est pour cela que les deux lignes se séparent; si la courbure de la courbe va en augmentant, celle-ci s'écarte de la tangente plus rapidement que le cercle auquel elle est par conséquent intérieure. Si au contraire la courbure va en diminuant, la courbe est extérieure au cercle. Or il est clair qu'à partir d'un point quelconque, la courbure augmente, lorsqu'on se déplace dans un sens, et diminue lorsqu'on suit la direction opposée. La courbe est donc intérieure d'un côté et extérieure de l'autre à son cercle de courbure. Il y a exception pour les points où la courbure est maxima ou minima ; de quelque côté qu'on s'en éloigne, en effet, la courbure varie dans le même sens, et par conséquent le cercle de courbure est, dans ce cas, intérieur ou extérieur à la courbe : c'est ce qui a lieu, par exemple, au sommet d'une ellipse; à l'extrémité du petit axe, la courbure est minima, et le cercle de courbure est extérieur à la courbe; à l'extrémité du grand axe, au contraire, la courbure est maxima, et le cercle de courbure est intérieur; en tout autre point, le cercle de courbure traverse la courbe.

Diverses expressions du rayon de courbure.

497. Dans la formule trouvée pour expression du rayon de courbure, on a regardé l'abscisse x comme la variable indépendante. Pour s'affranchir de cette supposition il suffit (169) de remplacer $\frac{d^2y}{dx^2}$ par

$$\frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^3},$$

et l'on a, par conséquent, quelle que soit la variable indépendante,

$$\rho = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\,d^2y - dy\,d^2x}.$$

Cette formule s'applique commodément lorsque les coordonnées x et y sont données en fonction d'une troisième variable.

498. Lorsque la variable indépendante est l'arc même de la courbe considérée, l'expression du rayon de courbure peut être transformée à l'aide de la formule

$$dx^2 + dy^2 = ds^2,$$

et de

$$dx\,d^2x + dy\,d^2y = 0,$$

qui s'en déduit par la différentiation; nous avons donné (**174**) le détail de cette transformation qui conduit à la formule remarquable

$$\frac{1}{\rho^2} = \left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2.$$

Cette formule est susceptible d'une interprétation géométrique élégante et souvent utile.

A partir du point donné M portons, sur la courbe et sur la tangente, deux longueurs infiniment petites MM′, MT, dont σ désigne la longueur commune. Les coordonnées du point M′ sont, en négligeant les infiniment petits du troisième ordre,

$$x + \frac{dx}{ds}\sigma + \frac{1}{2}\frac{d^2x}{ds^2}\sigma^2,$$

$$y + \frac{dy}{ds}\sigma + \frac{1}{2}\frac{d^2y}{ds^2}\sigma^2,$$

celles du point T sont rigoureusement

$$x + \frac{dx}{ds}\sigma,$$

$$y + \frac{dy}{ds}\sigma;$$

on a, par conséquent,

$$\overline{M'T}^2 = \frac{1}{4}\sigma^4\left[\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2\right],$$

et par conséquent

$$\frac{1}{\rho^2} = \left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 = \frac{4.\overline{M'T}^2}{\sigma^4},$$

d'où l'on déduit

$$\rho = \frac{\sigma^2}{2\,M'T}.$$

499. La première expression trouvée pour le rayon de courbure conduit à un théorème équivalent au précédent, et qui, dans certains cas, est d'une forme plus commode. Si l'on prend pour axe des x la tangente en un point, et pour axe des y la normale, l'équation

$$\rho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

devient

$$\rho = \frac{1}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)}.$$

y et $\frac{dy}{dx}$ étant nuls, pour $x = 0$, si l'on nomme k l'ordonnée correspondant à une abscisse infiniment petite h, le théorème de Maclaurin donne, en négligeant les infiniment petits du troisième ordre,

$$k = \frac{1}{2} h^2 \frac{d^2y}{dx^2},$$

et par conséquent

$$\rho = \frac{1}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)} = \frac{h^2}{2k}. \tag{1}$$

Cette formule diffère de la précédente en ce que l'ordonnée k y remplace la distance M'T. Or ces deux lignes, dont les directions forment un angle infiniment petit, ont à la limite un rapport égal à l'unité, et la substitution de l'une à l'autre ne change pas la limite du rapport dans lequel elles figurent.

L'équation (1) est équivalente au théorème suivant :

Le rayon de courbure, en un point M d'une courbe, est égal au carré d'une longueur infiniment petite MP portée sur la tangente à partir de ce point, divisé par

le double de la ligne PQ perpendiculaire à MP, et comprise entre le point P et la courbe.

500. Le théorème précédent conduit à une expression analytique du rayon de courbure équivalente à celle que nous avons déjà obtenue, et quelquefois plus commode, parce qu'elle ne suppose pas l'équation de la courbe résolue par rapport à l'une des coordonnées. Soit $\varphi(x, y) = 0$ l'équation d'une courbe. Prenons pour axes de coordonnées la tangente et la normale au point M, dont les coordonnées actuelles sont x et y, et soient u, v, les coordonnées infiniment petites d'un point voisin de M; le rayon de courbure est, d'après ce que l'on vient de voir, représenté par $\frac{u^2}{2v}$; pour le déterminer, remarquons qu'en nommant θ l'angle de la tangente avec l'ancien axe des x, c'est-à-dire celui que forment les nouveaux axes avec les anciens, les coordonnées du point voisin de x, y, sont, dans le premier système,

$$x + u\cos\theta - v\sin\theta,$$
$$y + u\sin\theta + v\cos\theta,$$

et l'on a par conséquent

$$\varphi(x + u\cos\theta - v\sin\theta, \quad y + u\sin\theta + v\cos\theta) = 0. \tag{1}$$

Le nouvel axe des x étant tangent à la courbe, si l'on considère u comme infiniment petit du premier ordre, v est infiniment petit du second ordre; nous devons donc, en développant le premier membre de (1) par le théorème de Taylor, conserver les termes du second ordre, car le facteur u^2, qui multiplie quelques-uns d'entre eux, est comparable au facteur v qui se trouve dans les termes du premier ordre. L'équation (1) peut donc être remplacée par

$$\begin{aligned} 0 = {} & \frac{d\varphi}{dx}(u\cos\theta - v\sin\theta) + \frac{d\varphi}{dy}(u\sin\theta + v\cos\theta) \\ & + \frac{1}{2}\left[\frac{d^2\varphi}{dx^2}(u\cos\theta - v\sin\theta)^2 + 2\frac{d^2\varphi}{dx\,dy}(u\cos\theta - v\sin\theta)(u\sin\theta + v\cos\theta)\right. \\ & \left. + \frac{d^2\varphi}{dy^2}(u\sin\theta + v\cos\theta)^2\right]. \end{aligned} \tag{2}$$

Le coefficient de u est nul, parce que l'on a

$$\operatorname{tang}\theta = -\frac{\frac{d\varphi}{dx}}{\frac{d\varphi}{dy}};$$

de plus, les termes en v^2 et en uv peuvent être supprimés comme infiniment petits du quatrième et du troisième ordre, et il reste

$$0 = v\left(\frac{d\varphi}{dy}\cos\theta - \frac{d\varphi}{dx}\sin\theta\right) + \frac{1}{2}u^2\left(\frac{d\varphi}{dx^2}\cos^2\theta + 2\frac{d^2\varphi}{dx\,dy}\sin\theta\cos\theta + \frac{d^2\varphi}{dy^2}\sin^2\theta\right), \tag{3}$$

et par conséquent

$$\rho = \frac{u^2}{2v} = -\frac{\frac{d\varphi}{dy}\cos\theta - \frac{d\varphi}{dx}\sin\theta}{\frac{d^2\varphi}{dx^2}\cos^2\theta + 2\frac{d^2\varphi}{dx\,dy}\sin\theta\cos\theta + \frac{d^2\varphi}{dy^2}\sin^2\theta};$$

on a, d'ailleurs,

$$\cos\theta = \frac{\frac{d\varphi}{dy}}{\sqrt{\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2}}, \qquad \sin\theta = -\frac{\frac{d\varphi}{dx}}{\sqrt{\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2}},$$

et par conséquent

$$\rho = \frac{\left[\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2\varphi}{dx^2}\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 - 2\frac{d^2\varphi}{dx\,dy}\frac{d\varphi}{dx}\frac{d\varphi}{dy} + \frac{d^2\varphi}{dy^2}\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2}. \tag{4}$$

Cette formule se déduirait aisément de celle qui a été donnée (490) et dont elle n'est qu'une transformation. Nous avons préféré la démontrer directement pour appeler l'attention sur un théorème souvent utile. La méthode précédente a d'ailleurs l'avantage de conduire à l'expression du rayon ρ, dans le cas où le point considéré étant singulier, les dérivées $\frac{d\varphi}{dx}$, $\frac{d\varphi}{dy}$ deviennent nulles (463), et la formule (4) est illusoire.

Reprenons dans ce cas l'équation (1) en remarquant que l'on a, outre $\varphi(x, y) = 0$, $\frac{d\varphi}{dx} = 0$, $\frac{d\varphi}{dy} = 0$. Dans le développement du premier membre par le théorème de Taylor, les termes du premier ordre sont nuls, ainsi que les termes en u^2, dont le coefficient est précisément l'expression qu'il faut égaler à zéro pour obtenir (463) la direction de la tangente. Les termes de l'ordre le moins élevé, par rapport auxquels les autres sont négligeables, seront donc ici ceux qui contiennent le facteur uv et le facteur u^3, et, par la suppression des autres, l'équation (1) pourra être réduite à la forme

$$\mathrm{P}uv + \frac{\mathrm{Q}}{6}u^3 = 0. \tag{5}$$

On en déduira donc

$$\rho = \frac{u^2}{2v} = -\frac{3\mathrm{P}}{\mathrm{Q}}, \tag{6}$$

P et Q contenant l'angle θ qui est connu, et les dérivées du second et du troisième ordre du premier membre de l'équation.

501. La considération de l'expression explicite de P conduit à une conséquence remarquable. Ce coefficient étant le multiplicateur de uv dans l'équation (5), on a

$$(7) \qquad P = -2\frac{d^2\varphi}{dx^2}\sin\theta\cos\theta + 2\frac{d^2\varphi}{dx\,dy}(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + 2\frac{d^2\varphi}{dy^2}\sin\theta\cos\theta;$$

il est aisé d'en conclure que, lorsque le point singulier considéré est un point de rebroussement, on a $P = 0$, et par conséquent le rayon de courbure est nul, et la courbure infinie. L'angle θ est donné en effet (463) par l'équation

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}\cos^2\theta + 2\frac{d^2\varphi}{dx\,dy}\sin\theta\cos\theta + \frac{d^2\varphi}{dy^2}\sin^2\theta = 0.$$

Dans le cas qui nous occupe, cette équation a deux racines égales; la dérivée de son premier membre par rapport à θ est donc nulle, et l'on a par conséquent

$$0 = -2\sin\theta\cos\theta\frac{d^2\varphi}{dx^2} + 2\frac{d^2\varphi}{dx\,dy}(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + 2\frac{d^2\varphi}{dy^2}\sin\theta\cos\theta,$$

c'est-à-dire $P = 0$.

La courbure d'une courbe en un point de rebroussement est donc infinie. Il peut y avoir exception lorsque, en même temps que $P = 0$, on a $Q = 0$; c'est ce qui arrive dans le cas du rebroussement de seconde espèce. Nous laissons au lecteur le soin de faire cette vérification qui, si l'on se reporte aux formules (465), n'offre aucune difficulté.

502. En se rappelant ce qui a été dit (464) sur la distinction des points singuliers, on peut démontrer plus directement qu'en un point de rebroussement de première espèce, le rayon de courbure est égal à zéro. Si l'on nomme en effet u l'angle formé par la tangente à la courbe avec l'axe des x, et u_1 l'angle formé avec le même axe par le rayon vecteur qui réunit le point considéré avec le point où la courbe est coupée par un cercle de rayon R ayant ce point pour centre, on a trouvé, dans le cas d'un rebroussement de première espèce,

$$A\cos^2 u(\operatorname{tang} u - \operatorname{tang} u_1)^2 + M_1 R = 0,$$

M_1 ayant une valeur finie. Cette équation prouve que $\operatorname{tang} u - \operatorname{tang} u_1$, et par suite $u - u_1$, est de même ordre que $\sqrt{R}$, et l'angle de la corde avec la tangente est de même ordre que la racine carrée de la corde. La distance de la tangente à l'extrémité de la corde est le produit de R par $\sin(u - u_1)$, et par conséquent d'ordre $\frac{3}{2}$: elle est donc infiniment grande par rapport à la distance analogue dans un cercle de rayon quelconque qui est du second ordre. La courbe s'éloignant par consé-

quent de sa tangente infiniment plus rapidement que ne le fait un cercle, elle a une courbure infinie.

503. L'expression du rayon de courbure d'une courbe rapportée à des coordonnées polaires se déduit aisément de la formule

$$\rho = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\,d^2y - dy\,d^2x}.$$

En calculant dx, dy, d^2x, d^2y, à l'aide des formules

$$x = r\cos\theta,$$
$$y = r\sin\theta,$$

on a

$$\rho = \frac{(dr^2 + r^2\,d\theta^2)^{\frac{3}{2}}}{2\,dr^2\,d\theta - r\,d^2r\,d\theta + r^2\,d\theta^3} = \frac{\left[\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2\right]^{\frac{3}{2}}}{2\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - r\,\frac{d^2r}{d\theta^2} + r^2}.$$

Application à quelques exemples.

504. *Rayon de courbure de l'ellipse.* — Soit

$$a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2 = 0$$

l'équation d'une ellipse; en désignant le premier membre par $\varphi(x, y)$, on a

$$\frac{d\varphi}{dx} = 2b^2x, \qquad \frac{d\varphi}{dy} = 2a^2y,$$
$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = 2b^2, \qquad \frac{d^2\varphi}{dx\,dy} = 0, \qquad \frac{d^2\varphi}{dy^2} = 2a^2,$$

et la formule trouvée (500) donne

$$\rho = \frac{(4b^4x^2 + 4a^4y^2)^{\frac{3}{2}}}{8b^2a^4y^2 + 8a^2b^4x^2} = \frac{(b^4x^2 + a^4y^2)^{\frac{3}{2}}}{a^2b^2(a^2y^2 + b^2x^2)} = \frac{(b^4x^2 + a^4y^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4}.$$

En nommant N la portion de la normale comprise entre la courbe et l'axe des x, on a

$$N^2 = \frac{a^4y^2 + b^4x^2}{a^4},$$

et par conséquent

$$\rho = \frac{N^3a^2}{b^4}.$$

Si l'on nomme p le paramètre $\frac{b^2}{a}$, on a

$$\rho = \frac{N^3}{p^2}.$$

Cette formule est applicable à l'hyperbole et s'obtient par le même calcul dans lequel il suffit de changer b^2 en $-b^2$. Elle est applicable aussi à la parabole. Soit en effet

$$y^2 - 2px = 0$$

l'équation d'une parabole : on a

$$\frac{d\varphi}{dx} = -2p, \quad \frac{d\varphi}{dy} = 2y,$$
$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^2\varphi}{dx\,dy} = 0, \quad \frac{d^2\varphi}{dy^2} = 2,$$

et par conséquent

$$\rho = \frac{(4p^2 + 4y^2)^{\frac{3}{2}}}{8p^2} = \frac{(y^2 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{p^2}.$$

La sous-normale étant égale à p, $y^2 + p^2$ est égal au carré de la normale, et l'on a

$$\rho = \frac{N^3}{p^2}.$$

Rayon de courbure de la cycloïde. — Les équations de la cycloïde sont

$$x = a(u - \sin u),$$
$$y = a(1 - \cos u).$$

La formule la plus commode à employer est

$$\rho = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{d^2y\,dx - dy\,d^2x};$$

elle donne après des réductions évidentes

$$\rho = -4a \sin \frac{1}{2} u.$$

La normale, comprise entre la courbe et le point de contact du cercle générateur avec la base, est égale à $2a \sin \frac{1}{2} u$; le rayon de courbure de la cycloïde est donc double de la normale.

Rayon de courbure de la spirale logarithmique. — L'équation de la spirale logarithmique est

$$r = ae^{m\theta};$$

on a, par conséquent,

$$\frac{dr}{d\theta} = mr, \quad \frac{d^2r}{d\theta^2} = m^2 r,$$

La somme $s+c$ peut évidemment être remplacée par $2s$, et l'on a enfin, pour expression de la partie principale de $s-c$,

$$s-c=\frac{s^3}{24\rho_0^2}.$$

On voit, comme cela est évident à priori, que pour une même longueur de l'arc, la différence avec la corde augmente avec la courbure.

518. *Différence entre l'angle d'une corde avec la tangente et la moitié de l'angle de contingence.* — En adoptant les notations du paragraphe précédent, l'angle formé par la corde d'un arc avec l'axe des x, qui le touche à son extrémité, a pour tangente $\frac{y}{x}$. L'angle de contingence formé avec le même axe des x, par la tangente à l'autre extrémité de l'arc, a pour tangente $\frac{dy}{dx}$, la différence de deux angles infiniment petits pouvant être remplacée par celle de leurs tangentes, la différence que nous voulons évaluer est

$$\frac{dy}{dx}-2\frac{y}{x};$$

on a

$$x=s-\frac{s^3}{6\rho_0^2}+\dots,$$

$$y=\frac{s^2}{2\rho_0}+\frac{s^3}{6}\left(\frac{d^3y}{ds^3}\right)_0+\dots,$$

on en conclut

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{s}{\rho_0}+\frac{s^2}{2}\left(\frac{d^3y}{ds^3}\right)_0+\dots}{1-\frac{s^2}{2\rho_0^2}+\dots},$$

$$\frac{y}{x}=\frac{\frac{s}{2\rho_0}+\frac{s^2}{6}\left(\frac{d^3y}{ds^3}\right)_0+\dots}{1-\frac{s^2}{6\rho_0^2}+\dots}.$$

Il suffit à notre but de conserver dans les développements les termes qui contiennent s^2 en facteur; à ce degré d'approximation, les dénominateurs peuvent être remplacés par l'unité, et l'on a

$$\frac{dy}{dx}=\frac{s}{\rho_0}+s^2\left[\frac{1}{2}\left(\frac{d^3y}{ds^3}\right)_0\right],$$

$$\frac{y}{x}=\frac{s}{2\rho_0}+s^2\left[\frac{1}{6}\left(\frac{d^3y}{ds^3}\right)_0\right],$$

et par conséquent

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x} = \frac{s^2}{6}\left(\frac{d^3y}{ds^3}\right)_0.$$

De l'équation

$$\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 = \frac{1}{\rho^2},$$

on déduit

$$\frac{d^2x}{ds^2}\frac{d^3x}{ds^3} + \frac{d^2y}{ds^2}\frac{d^3y}{ds^3} = -\frac{1}{\rho^3}\frac{d\rho}{ds},$$

et en faisant $s = 0$, et ayant égard aux équations écrites plus haut,

$$\left(\frac{d^3y}{ds^3}\right)_0 = -\frac{1}{\rho_0^2}\left(\frac{d\rho}{ds}\right)_0,$$

on a donc

$$\frac{dy}{dx} - 2\left(\frac{y}{x}\right) = -\frac{s^2}{6\rho_0^2}\left(\frac{d\rho}{ds}\right)_0.$$

Telle est la partie principale de la différence entre la tangente de l'angle de contingence et le double de la tangente de l'angle formé par la corde avec la tangente. On peut évidemment remplacer les tangentes par les angles, et le problème est par conséquent résolu. Lorsque la courbe est un cercle, le rayon de courbure étant constant, $\frac{d\rho}{ds}$ est nul et la différence se réduit à zéro, comme cela doit être.

L'angle de contingence étant rigoureusement égal à la somme des angles formés par la corde avec les tangentes extrêmes, son excès sur le double de l'un d'eux est égal à la différence de ces deux-ci, et par conséquent

$$-\frac{s^2}{6\rho^2}\left(\frac{d\rho}{ds}\right)$$

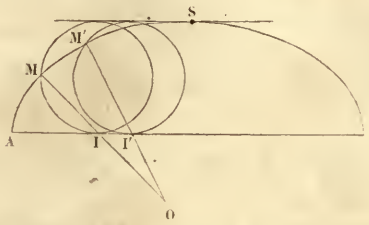
représente la différence des angles formés par la corde de l'arc s avec les tangentes à ses extrémités. Lorsque $\frac{d\rho}{ds}$ est positif, l'angle de contingence est moindre que le double de celui des deux angles qui a son sommet à l'extrémité prise pour origine de l'arc, et qui est par conséquent le plus grand des deux.

Différence des tangentes menées aux extrémités d'un arc et terminées à leur point de rencontre.

519. Soient AT et BT les tangentes aux extrémités d'un arc infiniment petit AB, que

nous nommerons s. Nous voulons évaluer la différence AT — BT, qui évidemment est

Rayon de courbure de la cycloïde. — Soient AMS une cycloïde; MI, M′I′, deux



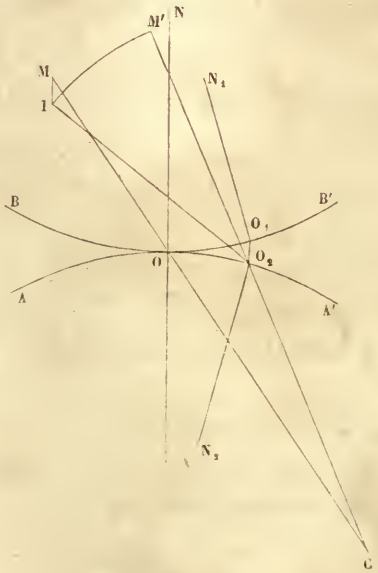
positions infiniment voisines du cercle générateur correspondant aux points M et M′. Les normales en ces points sont (14) MI, M′I′, et le centre de courbure est le point O où elles se coupent. En nommant ρ le rayon de courbure, et O l'angle des normales, on a, comme dans le cas précédent,

$$\rho = \frac{MM'}{O}.$$

Or l'arc MM′ est double (20) de l'arc de cercle ayant MI pour rayon, et dont l'angle au centre est précisément celui que forment les normales extrêmes de MM′. Le rapport d'un arc de cercle à son angle étant égal au rayon du cercle, l'arc MM′ qui est double, étant divisé par le même angle, donnera un quotient double, et par conséquent le rayon de courbure de la cycloïde est double de la normale IM.

506. *Rayon de courbure d'une roulette quelconque.* — Considérons la courbe décrite par un point invariablement lié à une courbe mobile qui roule sans glisser sur une courbe fixe donnée.

Soient AOA′ la courbe fixe, et BOB′ la position de la courbe mobile, lorsque le



point de contact est en M.

Pour obtenir le point M′ infiniment voisin de M sur la roulette, il faut faire mouvoir la courbe BOB′ de telle sorte qu'un point O_1, infiniment voisin de O, vienne se placer sur un point O_2, tel que $OO_2 = OO_1$, et que les deux courbes soient tangentes l'une à l'autre en ce point commun. Or le mouvement que doit prendre pour cela la courbe mobile, et auquel participe le point M, peut être remplacé par deux autres, effectués successivement, savoir: une translation dans laquelle tous les points décrivent des droites égales et parallèles à O_1O_2, et une rotation autour du point O_2, telle, que la normale O_2N_2 vienne se placer dans le prolongement de la normale O_1N_1, et tourne par conséquent d'un angle égal à celui des deux normales, c'est-à-dire à la somme de leurs inclinaisons sur ON, $\frac{OO_1}{R_1} + \frac{OO_2}{R_2} = OO_1\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$. Soit MI la droite égale et parallèle à O_1O_2 menée par le point M, et IM′ l'arc décrit de O_2 comme centre, et correspondant à l'angle de rotation indiqué; M′ est le point voisin de M, situé sur la roulette. La tangente à cette courbe est la limite de la direction MM′, et comme MI est infiniment petit du second ordre, on peut, en substituant (13) le point I au point M, remplacer MM′ par IM′, corde infiniment petite de l'arc de cercle décrit de O_2 comme centre, dont la limite est la tangente au cercle de centre O et de rayon OM. La normale à la roulette est donc MO. La démonstration s'appliquant à toutes les positions du point M, la normale voisine est M′ O_2, et le point de rencontre C de ces deux droites est le centre de courbure, et l'on a, en nommant ρ le rayon de courbure, et C l'angle des deux normales:

$$\rho = \frac{MM'}{C}.$$

Calculons les deux termes de cette fraction en négligeant, comme il est permis, les infiniment petits du second ordre.

MM′ est l'arc décrit du point O_2, avec un angle égal à $OO_2\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$, et l'on a, par conséquent, en remplaçant son rayon par OM, dont il diffère infiniment peu,

$$MM' = OM.(\overline{OO_2})\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right).$$

On a, dans le triangle MCO_2,

$$C = MO_2M' - O_2MO,$$

mais

$$MO_2M' = OO_2\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right).$$

Si l'on nomme φ l'angle formé par MO avec la normale ON, l'angle O_2MO, sous lequel OO_2 est vu du point M, est égal à

$$\frac{OO_2\cos\varphi}{OM};$$

on a donc enfin

$$C = OO_2 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} - \frac{\cos\varphi}{OM} \right),$$

et par conséquent

$$\rho = \frac{MM'}{C} = \frac{OM \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)}{\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) - \frac{\cos\varphi}{OM}}.$$

Dans le cas où la courbe est engendrée par un point d'un cercle de rayon R_1, roulant sur un cercle de rayon R_2, on a

$$OM = 2R_1 \cos\varphi,$$

et la formule donne

$$\rho = \frac{OM \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} - \frac{1}{2R_1}} = 2OM \, \frac{R_1 + R_2}{2R_1 + R_2}.$$

Le rayon de courbure est, par conséquent, proportionnel à la normale OM.

Si le rayon du cercle fixe devient infini, celui-ci se réduit à une ligne droite, et l'épicycloïde à une cycloïde; la formule devient alors

$$\rho = 2OM,$$

ce qui s'accorde avec le résultat obtenu (505).

Courbure des lignes orthogonales.

507. Lorsque l'équation générale d'une série de courbes contient un paramètre variable, le nombre des courbes qu'elle peut représenter est infini comme celui des valeurs que l'on peut attribuer au paramètre, et il est possible, en général, de déterminer celui-ci, de manière à faire passer la courbe correspondante par un point donné du plan que leur ensemble recouvre entièrement. A cette première série, quelles que soient les courbes qui la composent, en correspond toujours une seconde, formée par des lignes qui coupent les premières à angle droit, et que l'on nomme leurs trajectoires orthogonales; de telles trajectoires existent toujours, car les courbes du premier système étant supposées tracées et recouvrant le plan, chaque trajectoire orthogonale est la ligne suivie par un point mobile qui dirigerait à chaque instant son mouvement, normalement à celle des courbes du premier système sur laquelle il est actuellement situé. Chacune de ces trajectoires étant déterminée par un de ses points, leur équation générale contient un paramètre arbitraire.

Soient

$$\varphi_1(x,y)=\alpha_1,$$
$$\varphi_2(x,y)=\alpha_2.$$

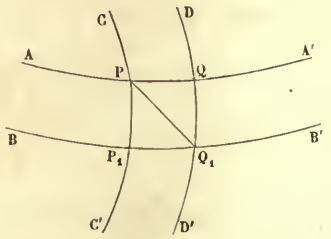
les équations de deux systèmes de courbes orthogonales, α_1 et α_2 étant les paramètres variables par rapport auxquels nous les supposons résolues : chaque point du plan peut être défini par les valeurs des paramètres α_1 et α_2 auxquelles correspondent les courbes qui s'y rencontrent, et ces deux paramètres peuvent remplacer les coordonnées orthogonales x et y. En adoptant ce système, si deux points infiniment voisins sont représentés par les paramètres α_1, α_2, $\alpha_1+d\alpha_1$, $\alpha_2+d\alpha_2$, le carré de leur distance est de la forme

$$ds^2=A_1 d\alpha_1^2+A_2 d\alpha_2^2,$$

et l'on a (**125**)

$$A_1=\frac{1}{\left(\frac{d\alpha_1}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\alpha_1}{dy}\right)^2},$$

$$A_2=\frac{1}{\left(\frac{d\alpha_2}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\alpha_2}{dy}\right)^2},$$



Les courbes AA′, CC′, qui se croisent au premier des points considérés, et les courbes BB′, DD′ qui se croisent au second, forment un rectangle PQP_1Q_1, dont ds est la diagonale. Les côtés PP_1, PQ sont les distances correspondantes à la variation d'un seul paramètre et ont pour expression, la première $d\alpha_1\sqrt{A_1}$, et la seconde $d\alpha_2\sqrt{A_2}$.

Nous poserons, pour éviter les radicaux,

$$\sqrt{A_1}=\frac{1}{h_1},$$
$$\sqrt{A_2}=\frac{1}{h_2},$$

regardant $\frac{1}{h_1}$ et $\frac{1}{h_2}$ comme des quantités essentiellement positives: d'après cela, $\frac{d\alpha_1}{h_1}$

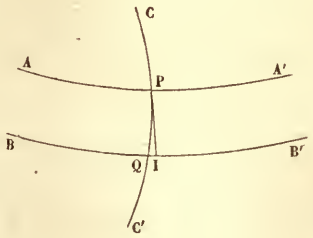
représente la longueur PP_1, distance des deux courbes infiniment voisines qui correspondent aux paramètres α_1 et $\alpha_1 + d\alpha_1$, et que nous désignerons par ds_2, parce qu'elle est comptée sur la courbe qui correspond au paramètre α_2.

$\frac{d\alpha_2}{h_2}$ représente de même la longueur PQ, distance des deux courbes représentées par les paramètres α_2, $\alpha_2 + d\alpha_2$; nous la désignerons par ds_1.

Les fonctions h_1 et h_2 font connaître la loi suivant laquelle varie la distance de deux courbes infiniment voisines; si ces courbes correspondent en effet aux paramètres α_1 et $\alpha_1 + d\alpha_1$, en quelque point que l'on passe de l'une à l'autre, l'accroissement $d\alpha_1$ sera constant, et le chemin à parcourir normalement est par conséquent proportionnel à $\frac{1}{h_1}$.

508. Les rayons de courbure des deux courbes qui se croisent en un point s'expriment élégamment, au moyen des fonctions h_1, h_2 et de leurs dérivées.

Soient, en effet, AA′, BB′ deux lignes infiniment voisines correspondant aux paramètres α_1, $\alpha_1 + d\alpha_1$, et CC′ la ligne du second système qui correspond au paramètre α_2, et dont nous voulons calculer la courbure au point P où elle coupe AA′.



Cette courbure est égale à l'angle de contingence formé par les tangentes aux points P et Q, divisé par la longueur ds_2 de l'arc PQ. On a, d'après ce qui a été dit,

$$ds_2 = \frac{d\alpha_1}{h_1}.$$

Si donc on nomme ε l'angle de contingence, le rayon de courbure ρ_2 est exprimé par la formule

$$\frac{1}{\rho_2} = \frac{\varepsilon h_1}{d\alpha_1}.$$

Il reste à calculer ε; or cet angle est formé par les normales respectivement menées en P et Q aux courbes AA′ et BB′ que PQ coupe toutes deux à angle droit : soit PI la première de ces normales, et I le point où elle coupe la courbe BB′; la distance QI est infiniment petite du second ordre, et l'on peut, dans le calcul de l'angle ε, remplacer la normale en Q de la courbe B′ par la normale en I qui forme

avec elle un angle infiniment petit du second ordre. ε est, d'après cela, le complément de l'angle sous lequel la droite PI coupe la courbe BB′; or on sait (85) que si en chaque point d'une courbe on élève une normale, et que l'on porte sur elle une longueur constante l, le lieu des extrémités est une courbe parallèle à la proposée, et coupant toutes les normales à angle droit. On en conclut bien aisément que si la longueur l portée sur chaque normale varie d'un point à l'autre, un élément $d\sigma$ de la courbe obtenue, et dont les extrémités correspondent aux longueurs l et $l+dl$ portées sur deux normales voisines, formera avec ces normales un angle dont le cosinus est $\frac{dl}{d\sigma}$: dans le cas de deux courbes infiniment voisines qui nous occupe ici, l'élément $d\sigma$ peut être remplacé par l'élément correspondant ds_1 de la courbe AA′ qui en diffère d'un infiniment petit du second ordre, et par conséquent l'angle infiniment petit ε, que l'on peut remplacer par le cosinus de son complément, a pour expression $\frac{dl}{ds_1}$; l est ici la distance PI, égale, nous l'avons dit, à $\frac{d\alpha_1}{h_1}$, et dl est l'accroissement correspondant à un changement infiniment petit de α_2; on a donc

$$dl = \frac{d\left(\frac{d\alpha_1}{h_1}\right)}{d\alpha_2}\, d\alpha_2 = d\alpha_1\, d\alpha_2 \frac{d\left(\frac{1}{h_1}\right)}{d\alpha_2}.$$

Le dénominateur ds_1 du quotient $\frac{dl}{ds_1}$ est correspondant à la distance des deux courbes normales à AA′ et correspondant aux paramètres α_2 et $\alpha_2 + d\alpha_2$; on a donc (125)

$$ds_1 = \frac{d\alpha_2}{h_2},$$

et par conséquent

$$\varepsilon = \frac{dl}{ds_1} = h_2\, d\alpha_1 \frac{d\left(\frac{1}{h_1}\right)}{d\alpha_2};$$

on en conclut

$$\frac{1}{\rho_2} = \frac{\varepsilon h_1}{d\alpha_1} = h_1 h_2 \frac{d\left(\frac{1}{h_1}\right)}{d\alpha_2} = -\frac{h_2}{h_1}\frac{dh_1}{d\alpha_2};$$

on trouverait de même

$$\frac{1}{\rho_1} = h_1 h_2 \frac{d\frac{1}{h_2}}{d\alpha_1} = -\frac{h_1}{h_2}\frac{dh_2}{d\alpha_1}.$$

509. Ces formules assignent au rayon de courbure un signe qui, comme nous

allons le voir, est lié au sens de la courbure. Considérons par exemple la formule

$$\frac{1}{\rho_2} = h_1 h_2 \frac{d\left(\frac{1}{h_1}\right)}{d\alpha_2};$$

h_1 et h_2, définis par leurs carrés (507), sont regardés comme essentiellement positifs, le signe de $\frac{1}{\rho_2}$ est par conséquent celui de $\frac{d\frac{1}{h_1}}{d\alpha_2}$; $\frac{1}{h_1}$ étant proportionnel à la distance des courbes correspondantes aux valeurs α_1 et $\alpha_1 + d\alpha_1$, on voit que ρ_2 est positif lorsqu'en parcourant l'une d'elles dans un sens tel que α_2 augmente, on s'éloigne de la courbe infiniment voisine. Or deux courbes normales à une même courbe s'écartent l'une de l'autre lorsque leurs premiers éléments sont situés dans la région vers laquelle celle-ci tourne sa convexité. Nous pouvons donc énoncer la règle suivante :

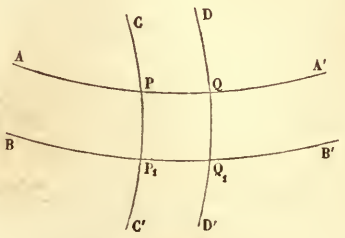
En considérant la courbe qui correspond à une valeur donnée de α_2 comme séparant les points du plan pour lesquels α_2 est moindre de ceux pour lesquels il est plus grand que cette valeur donnée, le rayon de courbure ρ_2 fourni par la formule trouvée est positif lorsque la courbure de la ligne est tournée vers la première de ces régions, elle est négative dans le cas contraire.

510. La formule

$$\frac{1}{\rho_2} = h_2 h_1 \frac{d\frac{1}{h_1}}{d\alpha_2}$$

peut être mise sous une forme dont l'interprétation géométrique est élégante.

Soient AA′, BB′ deux courbes infiniment voisines du premier système correspondant aux paramètres α_1, $\alpha_1 + d\alpha_1$, et CC′, DD′ deux courbes orthogonales



correspondant aux paramètres α_2, $\alpha_2 + d\alpha_2$. Le rayon de courbure ρ_2 de l'arc PP_1, dans le cas représenté sur la figure, et en supposant $d\alpha_2$ positif, a, d'après ce

qu'on vient de dire, une valeur positive. Or on a

$$PP_1 = \frac{d\alpha_1}{h_1},$$

$$QQ_1 = \frac{d\alpha_1}{h_1} + \frac{d}{d\alpha_2}\cdot\left(\frac{d\alpha_1}{h_1}\right).d\alpha_2,$$

par conséquent

$$\frac{d}{d\alpha_2}\left(\frac{d\alpha_1}{h_1}\right) = \frac{QQ_1 - PP_1}{d\alpha_2}.$$

Dans la différentiation par rapport à α_2, $d\alpha_1$ est considéré comme une constante; l'équation précédente donne par conséquent

$$d\frac{1}{\frac{h_1}{d\alpha_2}} = \frac{QQ_1 - PP_1}{d\alpha_1 d\alpha_2},$$

on a donc

$$\frac{1}{\rho_2} = h_1 h_2 \frac{QQ_1 - PP_1}{d\alpha_1 d\alpha_2},$$

mais

$$PP_1 = \frac{d\alpha_1}{h_1}, \quad PQ = \frac{d\alpha_2}{h_2},$$

donc enfin

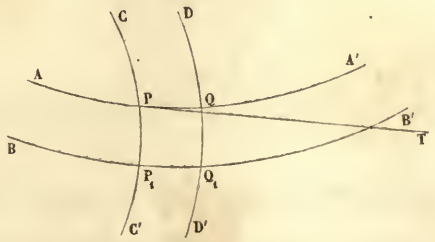
$$\frac{1}{\rho_2} = \frac{QQ_1 - PP_1}{PQ.PP_1}.$$

La courbure de l'arc PP_1 est égale à la différence des côtés opposés divisée par la surface du rectangle.

Lorsque les lignes du second système sont droites, $\frac{1}{\rho_2}$ est nul, et l'on a par conséquent $QQ_1 = PP_1$; on sait en effet que des courbes normales aux mêmes droites (85) interceptent sur deux quelconques d'entre elles des longueurs égales.

511. Les expressions trouvées pour les rayons de courbure conduisent à un théorème remarquable relatif à la loi de variation des courbures dans un système quelconque de courbes orthogonales.

Soient, comme au paragraphe précédent, AA′, BB′, CC′, DD′, quatre courbes infiniment voisines formant le rectangle infiniment petit PQ P_1 Q_1, et correspon-



dant aux valeurs α_1, $\alpha_1 + d\alpha_1$, α_2, $\alpha_2 + d\alpha_2$ des deux paramètres.

Soit, en outre, ρ_1 le rayon de courbure de AA′ et ρ_2 celui de CC′ au point P; $d\alpha_1$ et $d\alpha_2$ étant supposés positifs, la figure est telle que, d'après nos conventions, ρ_1 et ρ_2 sont l'un et l'autre positifs.

Soit PT la tangente à AA′ au point P, et θ l'angle qu'elle forme avec l'axe des X positifs; on a, d'après nos conventions,

$$\frac{1}{\rho_1} = -\frac{d\theta}{PQ} = -h_2 \frac{d\theta}{d\alpha_2},$$

on aura de même

$$\frac{1}{\rho_2} = h_1 \frac{d\theta}{d\alpha_1};$$

or on a

$$\frac{d^2\theta}{d\alpha_1 d\alpha_2} = \frac{d^2\theta}{d\alpha_2 d\alpha_1},$$

par conséquent

$$\frac{d\frac{1}{h_2\rho_1}}{d\alpha_1} + \frac{d\frac{1}{h_1\rho_2}}{d\alpha_2} = 0,$$

ou

$$\frac{1}{h_2}\frac{d\frac{1}{\rho_1}}{d\alpha_1} + \frac{1}{h_1}\frac{d\frac{1}{\rho_2}}{d\alpha_2} + \frac{1}{\rho_1}\frac{d\frac{1}{h_2}}{d\alpha_1} + \frac{1}{\rho_2}\frac{d\frac{1}{h_1}}{d\alpha_2} = 0.$$

En multipliant cette équation par $h_1 h_2$, en ayant égard aux valeurs de $\frac{1}{\rho_1}$ et de $\frac{1}{\rho_2}$, elle devient

$$h_1\frac{d\frac{1}{\rho_1}}{d\alpha_1} + h_2\frac{d\frac{1}{\rho_2}}{d\alpha_2} + \frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_2^2} = 0;$$

$\frac{d\alpha_1}{h_1}$ est l'arc infiniment petit PP_1 et $\frac{d\alpha_2}{h_2}$ l'arc PQ; en les désignant par ds_2 et par ds_1, on a enfin

$$\frac{d\frac{1}{\rho_1}}{ds_2} + \frac{d\frac{1}{\rho_2}}{ds_1} + \frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_2^2} = 0.$$

Cette équation a été découverte par M. Lamé.

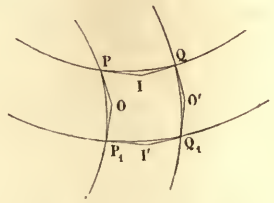
Quoique la démonstration précédente fixe nettement le sens qu'il faut attacher aux quotients $\frac{d\frac{1}{\rho_1}}{ds_2}$, $\frac{d\frac{1}{\rho_2}}{ds_1}$, il est peut-être utile de l'indiquer explicitement.

Ces quotients ne sont pas en effet des dérivées et ne peuvent évidemment pas en être, car il n'existe pas de variables s_1, s_2, dont ρ_1 et ρ_2 soient fonctions. Dans

le rapport $\frac{d\frac{1}{\rho_2}}{ds_1}$, $d\frac{1}{\rho_2}$ est l'excès de la courbure de QQ_1 au point Q sur celle de PP_1 au point P, et ds_1 est l'arc infiniment petit PQ qui mesure la distance des deux courbes; $\frac{d\frac{1}{\rho_1}}{ds_2}$ a une signification analogue.

512. L'équation précédente ayant une grande importance, nous en donnerons une seconde démonstration plus exclusivement géométrique.

Soit, comme précédemment, PQP_1Q_1, le rectangle infiniment petit formé par les courbes des deux systèmes qui correspondent aux paramètres α_1, $\alpha_1 + d\alpha_1$,



α_2, $\alpha_2 + d\alpha_2$: menons par chacun des points P, Q, P_1, Q_1 des tangentes aux deux côtés qui s'y croisent, nous formerons un octogone $PIQO'Q_1I'P_1O$, dans lequel la somme des huit angles est égale à douze angles droits, et comme les angles en P, Q, P_1, Q_1, sont droits, la somme de ceux qui ont leurs sommets en I, O, I', O', est égale à huit droits; or en nommant ε_1, $\varepsilon_1 + d\varepsilon_1$ les angles de contingence des arcs PQ, P_1Q_1, ε_2, $\varepsilon_2 + d\varepsilon_2$ ceux des arcs PP_1, QQ_1, on a, en désignant les angles de l'octogone par les lettres placées à leurs sommets,

$$O = \pi + \varepsilon_2, \quad I = \pi + \varepsilon_1, \quad O' = \pi - \varepsilon_2 - d\varepsilon_2, \quad I' = \pi - \varepsilon_1 - d\varepsilon_1,$$

et, par conséquent, l'équation

$$O + O' + I + I' = 4\pi$$

équivaut à

$$-d\varepsilon_1 - d\varepsilon_2 = 0. \tag{1}$$

Les différentielles $d\varepsilon_1$, $d\varepsilon_2$ se rapportent, la première à l'accroissement $d\alpha_1$ du paramètre α_1, et la seconde à l'accroissement $d\alpha_2$ de α_2. On a évidemment

$$\varepsilon_1 = \frac{PQ}{\rho_1},$$

$$\varepsilon_2 = \frac{PP_1}{\rho_2},$$

et, par conséquent, l'équation (1) peut s'écrire

$$\frac{d\left(\frac{PQ}{\rho_1}\right)}{d\alpha_1}\,d\alpha_1+\frac{d\left(\frac{PP_1}{\rho_2}\right)}{d\alpha_2}\,d\alpha_2=0, \tag{2}$$

c'est-à-dire

$$PQ\,\frac{d\left(\frac{1}{\rho_1}\right)}{d\alpha_1}\,d\alpha_1+\frac{1}{\rho_1}\,\frac{d\,PQ}{d\alpha_1}\,d\alpha_1+PP_1\,\frac{d\left(\frac{1}{\rho_2}\right)}{d\alpha_2}\,d\alpha_2+\frac{1}{\rho_2}\,\frac{d\,PP_1}{d\alpha_2}\,d\alpha_2=0; \tag{3}$$

or on a (**507**)

$$PQ=ds_1=\frac{d\alpha_2}{h_2},\quad PP_1=ds_2=\frac{d\alpha_1}{h_1},$$

par conséquent

$$\frac{d(PQ)}{d\alpha_1}=\frac{d}{d\alpha_1}\left(\frac{d\alpha_2}{h_2}\right)=d\alpha_2\,\frac{d\frac{1}{h_2}}{d\alpha_1},$$

$$\frac{d(PP_1)}{d\alpha_2}=\frac{d}{d\alpha_2}\left(\frac{d\alpha_1}{h_1}\right)=d\alpha_1\,\frac{d\frac{1}{h_1}}{d\alpha_2};$$

on en conclut (**508**)

$$\frac{d(PQ)}{d\alpha_1}=d\alpha_2\,\frac{1}{h_1h_2}\cdot\frac{1}{\rho_1},$$

$$\frac{d(PP_1)}{d\alpha_2}=d\alpha_1\,\frac{1}{h_1h_2}\cdot\frac{1}{\rho_2},$$

et l'équation (3) devient

$$\frac{d\alpha_1\,d\alpha_2}{h_2}\,\frac{d\frac{1}{\rho_1}}{d\alpha_1}+\frac{1}{\rho_1^2}\,\frac{d\alpha_1\,d\alpha_2}{h_1h_2}+\frac{d\alpha_1\,d\alpha_2}{h_1}\,\frac{d\frac{1}{\rho_2}}{d\alpha_2}+\frac{1}{\rho_2^2}\,\frac{d\alpha_1\,d\alpha_2}{h_1h_2}=0, \tag{4}$$

et en supprimant le facteur $d\alpha_1\,d\alpha_2$, et multipliant par h_1h_2,

$$h_1\,\frac{d\frac{1}{\rho_1}}{d\alpha_1}+h_2\,\frac{d\frac{1}{\rho_2}}{d\alpha_2}+\frac{1}{\rho_1^2}+\frac{1}{\rho_2^2}=0, \tag{5}$$

c'est-à-dire enfin, à cause de $\frac{d\alpha_1}{h_1}=ds_2$, $\frac{d\alpha_2}{h_2}=ds_1$,

$$\frac{d\frac{1}{\rho_1}}{ds_2}+\frac{d\frac{1}{\rho_2}}{ds_1}+\frac{1}{\rho_1^2}+\frac{1}{\rho_2^2}=0. \tag{6}$$

513. La formule précédente peut être transformée de manière à ne plus contenir que les fonctions h_1, h_2, et les paramètres α_1, α_2, dont elles dépendent. Reprenons en effet l'équation

$$h_1\,\frac{d\frac{1}{\rho_1}}{d\alpha_1}+h_2\,\frac{d\frac{1}{\rho_2}}{d\alpha_2}+\frac{1}{\rho_1^2}+\frac{1}{\rho_2^2}=0,$$

en remplaçant $\frac{1}{\rho_1}$ et $\frac{1}{\rho_2}$ par leurs valeurs,

$$\frac{1}{\rho_1} = h_1 h_2 \frac{d\frac{1}{h_2}}{d\alpha_1},$$

$$\frac{1}{\rho_2} = h_1 h_2 \frac{d\frac{1}{h_1}}{d\alpha_2},$$

elle devient

$$h_1 \frac{d\, h_1 h_2 \left(\frac{d\frac{1}{h_2}}{d\alpha_1}\right)}{d\alpha_1} + h_2 \frac{d h_1 h_2 \left(\frac{d\frac{1}{h_1}}{d\alpha_2}\right)}{d\alpha_2} + h_1^2 h_2^2 \left(\frac{d\frac{1}{h_2}}{d\alpha_1}\right)^2 + h_1^2 h_2^2 \left(\frac{d\frac{1}{h_1}}{d\alpha_2}\right)^2 = 0,$$

ou, en effectuant les différentiations,

$$h_1^2 h_2 \frac{d^2\left(\frac{1}{h_2}\right)}{d\alpha_1^2} + h_1 \frac{d\frac{1}{h_2}}{d\alpha_1}\left(h_1 \frac{dh_2}{d\alpha_1} + h_2 \frac{dh_1}{d\alpha_1}\right) + h_2^2 h_1 \frac{d^2\frac{1}{h_1}}{d\alpha_2^2} + h_2 \frac{d\left(\frac{1}{h_1}\right)}{d\alpha_2}\left(h_1 \frac{dh_2}{d\alpha_2} + h_2 \frac{dh_1}{d\alpha_2}\right)$$
$$+ h_1^2 h_2^2 \left(\frac{d\frac{1}{h_2}}{d\alpha_1}\right)^2 + h_1^2 h_2^2 \left(\frac{d\frac{1}{h_1}}{d\alpha_2}\right)^2 = 0,$$

on a identiquement,

$$h_1^2 \frac{d\frac{1}{h_2}}{d\alpha_1}\frac{dh_2}{d\alpha_1} + h_1^2 h_2^2 \left(\frac{d\frac{1}{h_2}}{d\alpha_1}\right)^2 = 0,$$

$$h_2^2 \frac{d\frac{1}{h_1}}{d\alpha_2}\frac{dh_1}{d\alpha_2} + h_1^2 h_2^2 \left(\frac{d\frac{1}{h_1}}{d\alpha_2}\right)^2 = 0,$$

et l'équation se réduit, en supprimant le facteur $h_1 h_2$, à

$$h_1 \frac{d^2\frac{1}{h_2}}{d\alpha_1^2} + h_2 \frac{d^2\frac{1}{h_1}}{d\alpha_2^2} + \frac{dh_1}{d\alpha_1}\frac{d\frac{1}{h_2}}{d\alpha_1} + \frac{dh_2}{d\alpha_2}\frac{d\frac{1}{h_1}}{d\alpha_2} = 0, \tag{7}$$

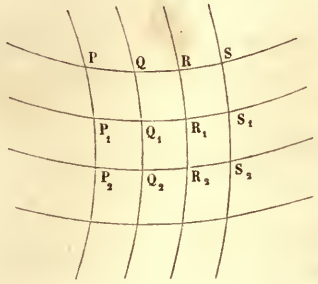
ou enfin,

$$h_1 \frac{d^2\frac{1}{h_2}}{d\alpha_1^2} + h_2 \frac{d^2\frac{1}{h_1}}{d\alpha_2^2} - h_1^2 \frac{d\frac{1}{h_1}}{d\alpha_1}\frac{d\frac{1}{h_2}}{d\alpha_1} - h_2^2 \frac{d\frac{1}{h_1}}{d\alpha_2}\frac{d\frac{1}{h_2}}{d\alpha_2} = 0. \tag{8}$$

514. Les fonctions $\frac{1}{h_1}$ et $\frac{1}{h_2}$ faisant connaître (507) la loi de variation de la distance entre deux courbes voisines appartenant à un même système, on comprend que l'équation (8), qui a lieu entre ces fonctions et leurs dérivées, exprime implicitement la loi suivant laquelle peuvent varier les côtés des rectangles infiniment petits dans lesquels un plan peut être décomposé par deux systèmes de lignes orthogonales. Pour obtenir cette loi explicitement, il suffira de remplacer dans la formule

$\frac{1}{h_1}$ et $\frac{1}{h_2}$ par leur expression en fonction des côtés infiniment petits de ces rectangles. Représentons-nous sur le plan la série des lignes de l'un et l'autre système correspondant aux valeurs α_1, α_2 des paramètres, et à celles que l'on obtient en leur attribuant une série d'accroissements infiniment petits, égaux à $d\alpha_1$ pour le premier, et à $d\alpha_2$ pour le second.

Nommons x et y les côtés PQ, PP_1 du premier rectangle, et convenons de représenter par le signe d la variation qui correspond à l'accroissement $d\alpha_1$ de α_1, c'est-à-



dire à un déplacement effectué sur les lignes PP_1, QQ_1,..., et par le signe δ celle qui, correspondant à l'accroissement $d\alpha_2$ de α_2, exprime un déplacement effectué sur les lignes de l'autre système. On a (507)

$$x = PQ = \frac{d\alpha_2}{h_2},$$

$$y = PP_1 = \frac{d\alpha_1}{h_1},$$

$$dx = \frac{d}{d\alpha_1}\left(\frac{d\alpha_2}{h_2}\right) d\alpha_1 = d\alpha_1\, d\alpha_2 \frac{d\frac{1}{h_2}}{d\alpha_1},$$

$$dy = \frac{d}{d\alpha_1}\left(\frac{d\alpha_1}{h_1}\right) d\alpha_1 = d\alpha_1^2 \frac{d\frac{1}{h_1}}{d\alpha_1},$$

$$\delta x = \frac{d}{d\alpha_2}\left(\frac{d\alpha_2}{h_2}\right) d\alpha_2 = d\alpha_2^2 \frac{d\frac{1}{h_2}}{d\alpha_2},$$

$$\delta y = \frac{d}{d\alpha_2}\left(\frac{d\alpha_1}{h_1}\right) d\alpha_2 = d\alpha_1\, d\alpha_2 \frac{d\frac{1}{h_1}}{d\alpha_2},$$

$$d^2x = \frac{d}{d\alpha_1}(dx)\, d\alpha_1 = d\alpha_1^2\, d\alpha_2 \frac{d^2\frac{1}{h_2}}{d\alpha_1^2},$$

$$\delta^2 y = \frac{d}{d\alpha_2}(\delta y)\, d\alpha_2 = d\alpha_1\, d\alpha_2^2 \frac{d^2\frac{1}{h_1}}{d\alpha_2^2}.$$

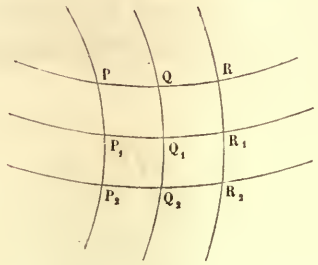
En substituant dans l'équation (8) à h_1, h_2 et à leurs dérivées les valeurs déduites de ces formules, elle devient, après la suppression du dénominateur commun $d\alpha_1\, d\alpha_2$,

$$\frac{d^2x}{y} + \frac{\delta^2 y}{x} - \frac{dy\,dx}{y^2} - \frac{\delta y\,\delta x}{x^2} = 0,$$

c'est-à-dire

$$x^2 y\, d^2x + y^2 x\, \delta^2 y - x^2\, dy\, dx - y^2\, \delta y\, \delta x = 0. \tag{9}$$

Les variables α_1, α_2, dont les accroissements constants ont déterminé la loi d'espacement des courbes qui forment les rectangles, sont arbitraires. Cette loi est donc elle-même arbitraire : quels que soient en effet les accroissements successifs attribués à une variable, on peut trouver une nouvelle variable, fonction de la première, et dont les accroissements correspondants soient égaux entre eux. L'équation (9) exprime donc la loi générale qui régit les côtés des rectangles curvilignes infiniment petits que l'on peut juxtaposer sur un plan. Si l'on suppose quatre rec-



tangles contigus représentés sur la figure et formés par des lignes espacées de telle sorte que l'on ait $PQ = QR$, $PP_1 = P_1P_2$, δx sera nul ainsi que dy, et l'équation (9) deviendra

$$x\, d^2x + y\, \delta^2 y = 0. \tag{10}$$

Si l'on suppose cette équation exacte sous la condition d'égalité entre les côtés contigus des quatre rectangles auxquels elle se rapporte, elle entraîne l'équation plus générale dont on l'a déduite, et lui est par conséquent équivalente. Pour le démontrer, admettons en effet que cette équation (10) soit satisfaite pour quatre rectangles infiniment voisins, tels que ceux qui sont représentés dans la figure et sous la condition $QR = PQ = x$, $P_2P_1 = P_1P = y$. Admettons que les courbes étant espacées autrement, on ait $QR = x + \delta x$, $P_2P_1 = y + dy$, d^2x et $\delta^2 y$ changeront de valeur, et il est facile de calculer la variation de chacun d'eux. Si en effet P_2Q_2 est remplacé par une ligne du même système, coupant PP_1 à une distance dy du point P_2, l'augmentation qui en résulte pour P_2Q_2 est précisément la variation que subit d^2x; or la ligne PQ s'accroissant de dx, lorsque P se transporte en P_1 en parcourant une ligne égale à y, pour un déplacement égal à dy elle s'accroîtra de

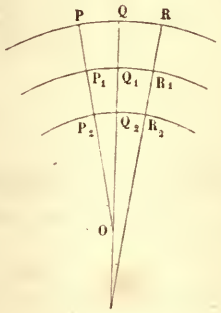
$\frac{dx\,dy}{y}$; par conséquent la nouvelle valeur de d^2x est égale à l'ancienne qui figure dans l'équation (10), augmentée de $\frac{dx\,dy}{y}$, et l'on doit, pour transformer cette équation, remplacer d^2x par $d^2x - \frac{dx\,dy}{y}$. On verra de même que $\partial^2 y$ doit être remplacé par $\partial^2 y - \frac{\partial x\,\partial y}{x}$, et l'équation (10) devient

$$x\,d^2x + y\,\partial^2 y - \frac{x\,dx\,dy}{y} - \frac{y\,\partial x\,\partial y}{x} = 0, \tag{11}$$

équivalente à l'équation (9).

La remarque que nous venons de faire pourrait être présentée sous une forme analytique et rattachée à la théorie du changement de la variable indépendante.

515. L'équation (9) peut être aisément vérifiée dans le cas où les lignes de l'un des systèmes sont droites; les lignes de l'autre système sont alors des courbes parallèles, et deux quelconques d'entre elles interceptent sur les droites qui leur sont normales des longueurs égales.



Considérons dans ce cas les trois rectangles contigus dont les côtés figurent dans la formule : nous aurons

$$PQ = x, \quad QR = x + \partial x,$$
$$PP_1 = y, \quad \partial y = 0, \quad \partial^2 y = 0, \quad P_1P_2 = y + dy,$$
$$P_1Q_1 = x + dx, \quad P_2Q_2 = x + 2\,dx + d^2x,$$

et l'équation devient

$$x\,d^2x - x\,\frac{dx\,dy}{y} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{d^2x}{dx} = \frac{dy}{y},$$

ce qui est évidemment exact, car la longueur x étant proportionnelle à la distance au point O, où se coupent les deux droites entre lesquelles elle est comprise, ses accroissements sont proportionnels aux variations de cette distance. Si donc à un déplacement y du point P correspond la variation dx, à un second déplacement égal à $y+dy$ correspondra la variation $dx+\frac{dy\,dx}{y}$, et l'on a

$$d^2x=\frac{dy\,dx}{y}.$$

On peut donner au même raisonnement une forme plus analytique en faisant usage de l'équation (8), équivalente au fond à celle que nous venons d'employer. Dans le cas qui nous occupe, la distance de deux courbes du premier système étant constante, $\frac{1}{h_1}$ est indépendant de α_2, et l'équation (8) se réduit à

$$h_1\frac{d^2\frac{1}{h_2}}{d\alpha_1^2}-h_1^2\frac{d\frac{1}{h_1}}{d\alpha_1}\frac{d\frac{1}{h_2}}{d\alpha_1}=0,$$

que l'on peut écrire

$$\frac{\frac{d^2\left(\frac{1}{h_2}\right)}{d\alpha_1^2}}{\frac{d\left(\frac{1}{h_2}\right)}{d\alpha_1}}=\frac{d\left(\frac{1}{h_1}\right)}{\left(\frac{1}{h_1}\right)}.$$

Elle exprime que $l\frac{d\frac{1}{h_2}}{d\alpha_1}$ et $l\frac{1}{h_1}$ ont même dérivée par rapport à α_1, et que par conséquent le rapport

$$(\mathrm{A})\qquad \frac{\frac{d\frac{1}{h_2}}{d\alpha_1}}{\frac{1}{h_1}}$$

est indépendant de α_1 et reste constant pour une valeur donnée de α_1. Pour traduire ce résultat géométriquement, considérons les deux droites voisines qui correspondent aux paramètres α_2, $\alpha_2+d\alpha_2$; $\frac{d\alpha_1}{h_1}$ est la longueur portée sur l'une d'elles, mesurant la distance des deux courbes qui la coupent à angle droit. La distance des deux droites au point considéré est $\frac{d\alpha_2}{h_2}$, et par conséquent proportionnelle à $\frac{1}{h_2}$; dire que le rapport (A) est constant, c'est dire, ce qui évidemment est

exact, que l'accroissement de distance des droites est proportionnel au déplacement subi, dans le sens de leur longueur, par le point où l'on mesure cette distance.

Expression approchée de quelques grandeurs infiniment petites.

516. L'étude d'un arc infiniment petit pris sur une courbe serait aussi difficile que celle d'un arc fini, et la variété des résultats, dissemblables avec les définitions particulières des courbes considérées, ne laisserait pas même entrevoir la possibilité d'une théorie générale, si dans le calcul des grandeurs à déterminer on s'imposait l'obligation de ne rien négliger. On sait au contraire que dans le calcul d'une grandeur infiniment petite on peut, sans inconvénient, négliger une portion infiniment petite de sa valeur; lorsque par conséquent nous cherchons l'expression d'un infiniment petit du premier ordre, nous négligerons ceux du second; dans le calcul d'un infiniment petit du second ordre, on négligera ceux du troisième, et ainsi de suite. On peut d'ailleurs, dans le calcul d'une même grandeur, recourir successivement à ces divers degrés d'approximation. Après avoir calculé en effet la valeur approchée qui peut remplacer une grandeur infiniment petite d'un certain ordre, et que l'on nomme sa *partie principale*, on peut se proposer d'évaluer l'erreur commise dans le premier résultat; elle est en général du second ordre, et dans son expression on négligera les infiniment petits du troisième ordre; mais, après l'avoir trouvée, on peut chercher une expression de l'erreur qui subsiste encore, et continuer indéfiniment en formant les termes successifs d'un développement indéfini qui seul représenterait exactement la quantité inconnue. C'est précisément là, nous l'avons vu (277), ce que l'on fait en développant une fonction par le théorème de Taylor.

517. *Différence entre un arc infiniment petit et sa corde* — La différence entre un arc et sa corde est infiniment petite du troisième ordre; nous allons en chercher l'expression en négligeant les infiniment petits du quatrième ordre, ou, ce qui évidemment revient au même, former le premier terme de son développement en série ordonnée suivant les puissances de l'arc.

Prenons pour axes de coordonnées la tangente et la normale à l'une des extrémités de l'arc considéré. En considérant la longueur s de l'arc comme variable indépendante, dont les coordonnées x et y sont deux fonctions, on a, pour $s = 0$,

$$x = 0, \quad \left(\frac{dy}{ds}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{dx}{ds}\right)_0 = 1;$$

de plus, pour un point quelconque,

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 1,$$

on en déduit, en différentiant,

$$\frac{dx}{ds}\frac{d^2x}{ds^2}+\frac{dy}{ds}\frac{d^2y}{ds^2}=0,$$

$$\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2+\frac{dx}{ds}\frac{d^3x}{ds^3}+\frac{dy}{ds}\frac{d^3y}{ds^3}=0,$$

et si, dans ces équations qui ont lieu pour toute valeur de s, on fait $s=0$, elles donnent, en ayant égard aux équations précédentes,

$$\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)_0=0,$$

$$\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)_0^2=-\left(\frac{d^3x}{ds^3}\right)_0.$$

Rappelons enfin la formule

$$\frac{1}{\rho^2}=\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2,$$

qui, pour $s=0$, devient, en vertu des précédentes,

$$\frac{1}{\rho_0^2}=\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)_0^2=-\left(\frac{d^3x}{ds^3}\right)_0,$$

et ces équations permettent de résoudre facilement la question proposée et plusieurs autres analogues.

Le théorème de Maclaurin donne

$$x=s+\frac{s^3}{6}\left(\frac{d^3x}{ds^3}\right)_0+\ldots=s-\frac{s^3}{6\rho_0^2}+\ldots,$$

$$y=\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)_0\frac{s^2}{1.2}+\frac{s^3}{6}\left(\frac{d^3y}{ds^3}\right)_0+\ldots=\frac{s^2}{2\rho_0}+\frac{s^3}{6}\left(\frac{d^3y}{ds^3}\right)_0+\ldots;$$

on en conclut

$$x^2+y^2=s^2-\frac{s^4}{3\rho_0^2}+\frac{s^4}{4\rho_0^2}+\ldots=s^2-\frac{s^4}{12\rho_0^2}+\ldots,$$

les termes que l'on n'écrit pas contenant en facteur la cinquième puissance de s. En nommant c la corde de l'arc s, cette équation peut s'écrire

$$s^2-c^2=\frac{s^4}{12\rho_0^2}-\ldots,$$

et par conséquent

$$(s-c)=\frac{s^4}{12\rho_0^2(s+c)}-\ldots.$$

La somme $s+c$ peut évidemment être remplacée par $2s$, et l'on a enfin, pour expression de la partie principale de $s-c$,

$$s-c=\frac{s^3}{24\rho_0^2}.$$

On voit, comme cela est évident à priori, que pour une même longueur de l'arc, la différence avec la corde augmente avec la courbure.

518. *Différence entre l'angle d'une corde avec la tangente et la moitié de l'angle de contingence.* — En adoptant les notations du paragraphe précédent, l'angle formé par la corde d'un arc avec l'axe des x, qui le touche à son extrémité, a pour tangente $\frac{y}{x}$. L'angle de contingence formé avec le même axe des x, par la tangente à l'autre extrémité de l'arc, a pour tangente $\frac{dy}{dx}$, la différence de deux angles infiniment petits pouvant être remplacée par celle de leurs tangentes, la différence que nous voulons évaluer est

$$\frac{dy}{dx}-2\frac{y}{x};$$

on a

$$x=s-\frac{s^3}{6\rho_0^2}+\dots,$$

$$y=\frac{s^2}{2\rho_0}+\frac{s^3}{6}\left(\frac{d^3y}{ds^3}\right)_0+\dots,$$

on en conclut

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{s}{\rho_0}+\frac{s^2}{2}\left(\frac{d^3y}{ds^3}\right)_0+\dots}{1-\frac{s^2}{2\rho_0^2}+\dots},$$

$$\frac{y}{x}=\frac{\frac{s}{2\rho_0}+\frac{s^2}{6}\left(\frac{d^3y}{ds^3}\right)_0+\dots}{1-\frac{s^2}{6\rho_0^2}+\dots}.$$

Il suffit à notre but de conserver dans les développements les termes qui contiennent s^2 en facteur; à ce degré d'approximation, les dénominateurs peuvent être remplacés par l'unité, et l'on a

$$\frac{dy}{dx}=\frac{s}{\rho_0}+s^2\left[\frac{1}{2}\left(\frac{d^3y}{ds^3}\right)_0\right],$$

$$\frac{y}{x}=\frac{s}{2\rho_0}+s^2\left[\frac{1}{6}\left(\frac{d^3y}{ds^3}\right)_0\right];$$

et par conséquent

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x} = \frac{s^2}{6}\left(\frac{d^3y}{ds^3}\right)_0.$$

De l'équation

$$\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 = \frac{1}{\rho^2},$$

on déduit

$$\frac{d^2x}{ds^2}\frac{d^3x}{ds^3} + \frac{d^2y}{ds^2}\frac{d^3y}{ds^3} = -\frac{1}{\rho^3}\frac{d\rho}{ds},$$

et en faisant $s = 0$, et ayant égard aux équations écrites plus haut,

$$\left(\frac{d^3y}{ds^3}\right)_0 = -\frac{1}{\rho_0^2}\left(\frac{d\rho}{ds}\right)_0,$$

on a donc

$$\frac{dy}{dx} - 2\left(\frac{y}{x}\right) = -\frac{s^2}{6\rho_0^2}\left(\frac{d\rho}{ds}\right)_0.$$

Telle est la partie principale de la différence entre la tangente de l'angle de contingence et le double de la tangente de l'angle formé par la corde avec la tangente. On peut évidemment remplacer les tangentes par les angles, et le problème est par conséquent résolu. Lorsque la courbe est un cercle, le rayon de courbure étant constant, $\frac{d\rho}{ds}$ est nul et la différence se réduit à zéro, comme cela doit être.

L'angle de contingence étant rigoureusement égal à la somme des angles formés par la corde avec les tangentes extrêmes, son excès sur le double de l'un d'eux est égal à la différence de ces deux-ci, et par conséquent

$$-\frac{s^2}{6\rho^2}\left(\frac{d\rho}{ds}\right)$$

représente la différence des angles formés par la corde de l'arc s avec les tangentes à ses extrémités. Lorsque $\frac{d\rho}{ds}$ est positif, l'angle de contingence est moindre que le double de celui des deux angles qui a son sommet à l'extrémité prise pour origine de l'arc, et qui est par conséquent le plus grand des deux.

Différence des tangentes menées aux extrémités d'un arc et terminées à leur point de rencontre.

519. Soient AT et BT les tangentes aux extrémités d'un arc infiniment petit AB, que

nous nommerons s. Nous voulons évaluer la différence AT — BT, qui évidemment est

infiniment petite de second ordre. Le triangle ABT donne

$$\frac{AT}{BT} = \frac{\sin B}{\sin A},$$

$$\frac{AT - BT}{BT} = \frac{\sin B - \sin A}{\sin A} = \frac{2 \sin \frac{1}{2}(B - A) \cos \frac{1}{2}(A + B)}{\sin A}.$$

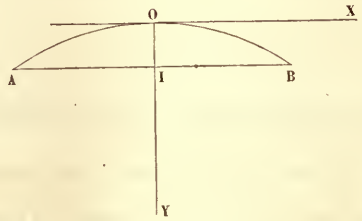
On peut évidemment, dans le premier membre de cette équation, remplacer le dénominateur BT par $\frac{1}{2}s$, et dans le second, le facteur $\cos \frac{1}{2}(A+B)$, par l'unité, et le dénominateur sin A, par A, puis par la moitié de l'angle de contingence $\frac{s}{\rho}$, et enfin $\sin \frac{(B-A)}{2}$, par $\frac{1}{2}(B - A)$; on a ainsi

$$\frac{2(AT - BT)}{s} = \frac{(B - A)\rho}{s},$$

$$AT - BT = \frac{\rho}{2}(B - A) = -\frac{s^2}{12\rho}\frac{d\rho}{ds}.$$

520. *Différence entre les deux segments formés par une normale sur la corde infiniment petite qui lui est perpendiculaire.*

Soient AB un arc infiniment petit, et OX celle de ses tangentes qui est parallèle à la corde AB.



Prenons cette droite OX pour axe des X, et la perpendiculaire OY pour axe des Y; l'arc s étant compté à partir de l'origine O, les coordonnées x, y de son extrémité sont données, comme dans les paragraphes précédents, par les formules

$$(1) \qquad x = s - \frac{s^2}{6\rho_0^2} + \dots,$$

$$(2) \qquad y = \frac{s^2}{2\rho_0} + \frac{s^3}{6}\left(\frac{d^3y}{ds^3}\right)_0 + \dots.$$

Soient s_1 et s_2 les longueurs des arcs OA et OB, la formule (2) doit donner la même

valeur pour y quand on y fait $s = s_1$, $s = -s_2$; on a donc

$$\frac{s_1^2}{2\rho_0} + \frac{s_1^3}{6}\left(\frac{d^3y}{ds^3}\right)_0 = \frac{s_2^2}{2\rho_0} - \frac{s_2^3}{6}\left(\frac{d^3y}{ds^3}\right)_0,$$

ou, en transposant et divisant ensuite les deux membres par $(s_1 + s_2)$,

$$\frac{(s_2 - s_1)}{2\rho_0} = \frac{(s_1^2 - s_1 s_2 + s_2^2)}{6}\left(\frac{d^3y}{ds^3}\right)_0.$$

La différence $s_1 - s_2$ étant, d'après cette formule même, infiniment petite par rapport à chacun des deux arcs, on peut remplacer dans le second membre $(s_1^2 - s_1 s_2 + s_2^2)$ par s_1^2, et l'on a par conséquent

$$(s_2 - s_1) = \frac{1}{3} s_1^2 \rho_0 \left(\frac{d^3y}{ds^3}\right)_0.$$

Mais on a trouvé (518) $\left(\frac{d^3y}{ds^3}\right)_0 = -\frac{1}{\rho_0^2}\left(\frac{d\rho}{ds}\right)_0$; par conséquent enfin

$$s_2 - s_1 = -\frac{1}{3}\frac{s_1^2}{\rho_0}\left(\frac{d\rho}{ds}\right)_0.$$

Si l'axe des Y perce la corde AB au point I, on a, en négligeant les infiniment petits du troisième ordre,

$$s_1 = \mathrm{BI}, \quad s_2 = \mathrm{AI};$$

et par conséquent

$$\mathrm{AI} - \mathrm{BI} = -\frac{s_1^2}{3\rho_0}\left(\frac{d\rho}{ds}\right)_0.$$

Telle est l'expression de la différence AI — BI, en négligeant les infiniment petits du troisième ordre.

521. *Distance d'une courbe à son cercle de courbure.* — En rapportant une courbe à la tangente et à la normale en un de ses points, que l'on prend en même temps pour origine des arcs, nous avons trouvé pour les coordonnées d'un point, les séries

$$x = s - \frac{s^3}{6\rho_0^2} + \ldots,$$

$$y = \frac{s^2}{2\rho_0} + \frac{s^3}{6}\left(\frac{d^3y}{ds^3}\right) + \ldots,$$

$\frac{d^3y}{ds^3}$ étant égal (518) à $-\frac{1}{\rho_0^2}\left(\frac{d\rho}{ds}\right)_0$, il est nul si la courbe considérée est un cercle, et par conséquent, en rapportant à leur tangente commune une courbe quelconque et son cercle de courbure, on aura, pour la courbe,

$$y = \frac{s^2}{2\rho_0} - \frac{s^3}{6\rho_0^2}\left(\frac{d\rho}{ds}\right)_0 + \ldots,$$

et pour le cercle

$$y = \frac{s^2}{2\rho_0} + \dots,$$

les termes non écrits étant de part et d'autre d'un ordre supérieur au troisième. Il résulte de là que la différence des ordonnées correspondantes à une même valeur de s est du troisième ordre et égale à $-\frac{s^3}{6\rho_0^2}\left(\frac{d\rho}{ds}\right)_0$; la formule

$$x = s - \frac{s^3}{6\rho_0^2} + \dots$$

montre d'ailleurs que la différence des abscisses est tout au plus du quatrième ordre, et que, par conséquent, si l'on néglige les infiniment petits du quatrième ordre, il est permis de considérer les deux ordonnées comme répondant à une même abscisse. La formule

$$-\frac{s^3}{6\rho_0^2}\left(\frac{d\rho}{ds}\right)_0 = \frac{s^3}{6}\left(\frac{d\frac{1}{\rho}}{ds}\right)_0$$

exprime donc la distance de l'extrémité de l'arc s au cercle de courbure correspondant à l'autre extrémité, cette distance étant comptée perpendiculairement à la tangente commune de la courbe et du cercle, et pouvant évidemment être remplacée par la distance comptée normalement au cercle qui n'en diffère que d'une portion infiniment petite de chacune d'elles.

Théorie des développées.

522. Lorsqu'une courbe a pour tangentes les normales d'une autre courbe, on dit qu'elle en est *la développée*. D'après cette définition, une courbe donnée a toujours une développée et ne peut en avoir qu'une seule, qui est (**104**) le lieu des intersections de chaque normale avec la normale infiniment voisine, et par conséquent le lieu des centres de courbure de la courbe donnée, laquelle, considérée par rapport à sa développée, porte le nom de *développante*. La développée d'une courbe fait connaître tous les rayons de courbure de celle-ci, car chacun d'eux est égal évidemment à la portion de normale comprise entre la courbe et le point où elle touche la développée. On voit ainsi comment la théorie des développées, créée par Huyghens indépendamment de la considération des rayons de courbure, est intimement liée cependant au sujet de ce chapitre, et doit naturellement y trouver place.

L'équation d'une courbe étant donnée, la théorie des enveloppes permet d'obtenir celle de la développée : t et u désignant en effet les coordonnées d'un point de

la normale au point de la courbe dont les coordonnées sont x et y, on a

$$(1) \qquad (x-t)+(y-u)\frac{dy}{dx}=0;$$

y et $\frac{dy}{dx}$ sont, dans cette équation, des fonctions données de x; pour avoir l'enveloppe des droites qu'elle représente, il faut éliminer cette variable entre l'équation (1) et sa dérivée par rapport à x,

$$(2) \qquad 1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+(y-u)\frac{d^2y}{dx^2}=0.$$

y étant considéré dans les équations (1) et (2) comme une fonction de x définie par l'équation de la courbe, l'opération algébrique qui donnera l'équation de la développée consiste évidemment à éliminer x et y entre les équations (1) et (2), et celle de la courbe donnée, après avoir, bien entendu, remplacé $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{d^2y}{dx^2}$ par leurs valeurs en x et y.

523. Le nom de *développées* donné aux courbes qui nous occupent rappelle une propriété importante déjà démontrée (**22**) et que nous allons démontrer de nouveau en la déduisant des formules précédentes.

L'arc de développée est la différence des rayons de courbure aux points extrêmes de l'arc correspondant de la développante.

Soit, en effet,

$$(1) \qquad (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2$$

l'équation du cercle de courbure en un point d'une courbe : différentions cette équation en considérant α, β, R comme variables, et x et y comme les coordonnées, variables aussi, du point de contact de la courbe avec le cercle. On aura

$$(2) \qquad (x-\alpha)(dx-d\alpha)+(y-\beta)(dy-d\beta)=R\,dR.$$

Différentions actuellement l'équation (1) en y considérant α, β, R comme constants, dx et dy se rapportant au déplacement infiniment petit effectué sur le cercle considéré comme fixe; on aura

$$(3) \qquad (x-\alpha)\,dx+(y-\beta)\,dy=0.$$

La comparaison des équations (2) et (3) va nous fournir la démonstration du théorème énoncé; mais il est utile de nous arrêter sur la signification de chacune d'elles, en indiquant avec plus de précision le sens que l'on doit attacher aux différentielles qui y figurent. L'équation (1) a lieu pour un point quelconque de l'un quelconque des cercles osculateurs. x et y y sont variables, et α, β, R constants, quand

on reste sur le même cercle; c'est ce que nous avons supposé en obtenant l'équation (3). x, y, α, β, R sont au contraire tous variables quand on passe d'un cercle au cercle voisin; mais, dans ce second cas, il y a deux variables indépendantes, et les rapports des différentielles ne sont déterminés que si l'on impose à x et à y une condition nouvelle, comme celle de représenter constamment le point de contact du cercle et de la courbe. C'est dans cette seconde hypothèse qu'on a effectué la différentiation qui a fourni l'équation (2). D'après ces explications, dx et dy sont les différentielles des coordonnées du point de contact de la courbe et du cercle osculateur, considéré, dans l'équation (2), comme se déplaçant sur la courbe, et, dans l'équation (3), comme se déplaçant sur le cercle; elles représentent dans les deux cas (47) le déplacement effectué sur la tangente commune, et sont par conséquent égales. La comparaison des équations (2) et (3) donne

$$-(x-\alpha)\,d\alpha-(y-\beta)\,d\beta=\mathrm{R}\,d\mathrm{R}, \tag{4}$$

ou

$$\frac{x-\alpha}{\mathrm{R}}\,d\alpha+\frac{y-\beta}{\mathrm{R}}\,d\beta=-d\mathrm{R}. \tag{5}$$

R, étant la distance des deux points dont les coordonnées sont respectivement x, y, α, β, les rapports $\frac{x-\alpha}{\mathrm{R}}$, $\frac{y-\beta}{\mathrm{R}}$ représentent les cosinus des angles formés avec les axes par la ligne qui joint ces deux points, qui est la normale à la courbe proposée, et par conséquent la tangente à la développée. En nommant σ l'arc de cette dernière courbe, ces cosinus sont égaux à $\frac{d\alpha}{d\sigma}$, $\frac{d\beta}{d\sigma}$, et l'équation (5) devient

$$d\alpha.\frac{d\alpha}{d\sigma}+d\beta\,\frac{d\beta}{d\sigma}=-d\mathrm{R},$$

c'est-à-dire, à cause de $d\alpha^2+d\beta^2=d\sigma^2$,

$$d\sigma=-d\mathrm{R},$$

ou enfin

$$d(\mathrm{R}+\sigma)=0,$$

et l'on en conclut

$$\mathrm{R}+\sigma=\text{constante}.$$

Le rayon de courbure ajouté à l'arc σ, dont l'origine reste indéterminée, forme donc une somme constante, et par conséquent l'arc compris entre deux points de la développée est égal à la différence des rayons de courbure qui correspondent à ces deux points.

524. Une courbe plane quelconque peut être engendrée par l'extrémité d'un fil

enroulé sur sa développée, et qui se déroule en conservant l'autre extrémité fixe. Soit en effet la courbe $PP'P''P'''$, et sa développée $AA'A''A'''$. Supposons un fil dont une

extrémité soit fixée en A''', et qui, enroulé d'abord sur l'arc $A'''A''A'A$, se dirige, à partir de A, suivant la tangente à la développée pour se terminer en P sur la développante. Si ce fil se développe sans changer de longueur, de telle sorte que, quand la partie enroulée diminue, la partie rectiligne augmente d'autant, leur somme restant constante, la partie courbe étant égale à l'arc que nous appelions σ, la partie rectiligne sera constamment égale au rayon de courbure R, et par conséquent l'extrémité du fil parcourra la courbe $PP'P''$, dont $AA'A''$ est la développée.

525. Cette manière de tracer la *développante* au moyen de la développée, montre clairement pourquoi le cercle osculateur traverse en général la courbe au point où il la touche.

Reprenons en effet la figure précédente et considérons trois positions voisines du fil, dont l'extrémité décrit la courbe $PP'P''$; on a, d'après la définition même du mouvement du fil,

$$AA' + AP = A'P',$$

$A'P'$ est par conséquent plus long que la distance rectiligne du point A' au point P, en sorte que ce point est en dedans du cercle décrit de A' comme centre, avec $A'P'$ pour rayon. On a aussi

$$A''A' + A'P' = A''P''.$$

Mais $A''P''$ est plus petit que $A'P''$ augmenté de $A'A''$; donc $A'P''$ est plus grand que $A'P'$, et le point P'' est en dehors du cercle décrit de A' comme centre avec

A′P′ comme rayon. Or ce cercle est précisément le cercle osculateur de la courbe PP′P″ au point P′; puisqu'il a le point P dans son intérieur, et le point P″ hors de la circonférence, il traverse évidemment cette courbe, ainsi que nous l'avions déjà reconnu (496).

526. On conclut du théorème précédent que toute courbe dont la courbure est constante est un cercle. L'arc de développée étant égal en effet à la différence des rayons de courbure qui correspondent à ses points extrêmes, il est constamment égal à zéro, lorsque le rayon de courbure est constant; la développée se réduit donc à un point, et il en résulte évidemment que la courbe est un cercle.

Quelques exemples de développées.

527. *Développée de l'ellipse.* — Soit

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$$

l'équation d'une ellipse; on en déduit

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2x}{a^2y}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b^4}{a^2y^3};$$

les coordonnées du centre de courbure sont données par les équations

$$(x-\alpha) + (y-\beta)\frac{dy}{dx} = 0,$$

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (y-\beta)\frac{d^2y}{dx^2} = 0,$$

et, par conséquent,

$$(x-\alpha) = \frac{(a^4y^2 + b^4x^2)\,x}{a^4b^2},$$

$$(y-\beta) = \frac{(a^4y^2 + b^4x^2)\,y}{a^2b^4}.$$

Si, en se servant de l'équation de l'ellipse, on élimine y de la première de ces équations, puis x de la seconde, on trouve, en posant $a^2 - b^2 = c^2$,

$$y^3 = -\frac{b^4\beta}{c^2}, \quad x^3 = \frac{a^4\alpha}{c^2},$$

et déduisant de là x et y pour les substituer dans l'équation de l'ellipse, on trouve enfin

$$b^{\frac{2}{3}}\beta^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{2}{3}}\alpha^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{4}{3}}.$$

Cette courbe se compose de quatre branches symétriques par rapport aux axes des coordonnées, et présentant quatre points de rebroussement aux points où elle est rencontrée par les axes.

528. *Développée de la courbe représentée par l'équation*

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}. \tag{1}$$

On déduit de cette équation :

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}, \tag{2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{a^{\frac{2}{3}}}{3.x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{1}{3}}}, \tag{3}$$

$$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=\frac{a^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}. \tag{4}$$

Les coordonnées α, β du centre de courbure sont, par conséquent,

$$\alpha=x+\frac{a^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}\cdot\frac{3x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}}\cdot\frac{y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}=x+3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}, \tag{5}$$

et de même,

$$\beta=y+3x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}. \tag{6}$$

On en conclut aisément

$$\alpha+\beta=\left(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}\right)^3, \tag{7}$$

$$\alpha-\beta=\left(x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}}\right)^3, \tag{8}$$

par conséquent,

$$2x^{\frac{1}{3}}=(\alpha+\beta)^{\frac{1}{3}}+(\alpha-\beta)^{\frac{1}{3}},$$

$$2y^{\frac{1}{3}}=(\alpha+\beta)^{\frac{1}{3}}-(\alpha-\beta)^{\frac{1}{3}}.$$

L'élimination de x et de y entre ces équations et la proposée donne immédiatement

$$\left[(\alpha+\beta)^{\frac{1}{3}}+(\alpha-\beta)^{\frac{1}{3}}\right]^2+\left[(\alpha+\beta)^{\frac{1}{3}}-(\alpha-\beta)^{\frac{1}{3}}\right]^2=4a^{\frac{2}{3}},$$

c'est-à-dire

$$(\alpha+\beta)^{\frac{2}{3}}+(\alpha-\beta)^{\frac{2}{3}}=2a^{\frac{2}{3}}$$

Si l'on change les axes des coordonnées en les faisant tourner de $\frac{\pi}{4}$ autour de l'origine actuelle, cette équation se change en

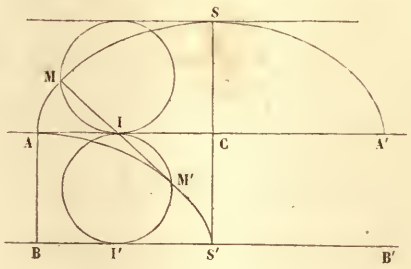
$$\alpha'^{\frac{2}{3}} + \beta'^{\frac{2}{3}} = (2a)^{\frac{2}{3}},$$

α', β' désignant les coordonnées par rapport aux nouveaux axes; la forme de ce résultat montre évidemment que la courbe proposée est semblable à sa développée et de dimensions doubles.

On peut reconnaître aisément que la courbe dont nous venons d'obtenir la développée est une épicycloïde engendrée par un cercle roulant dans l'intérieur d'un autre cercle de rayon quadruple, et nous verrons que la propriété d'être semblable à sa développée convient à toutes les épicycloïdes.

529. *Développée de la cycloïde.* — La connaissance du rayon de courbure de la cycloïde en chacun de ses points permet de déterminer aisément sa développée.

Soient AMA′ une cycloïde, M un de ses points, et MI la position correspondante du cercle générateur. Le rayon de courbure étant (504) double de MI, si, au-dessous



de AA′, on décrit un cercle égal au cercle générateur, et touchant AA′ en I, l'intersection M′ de ce cercle avec MI prolongé est le centre de courbure, et le lieu des points M′ est la développée. Soit S′ le centre correspondant au sommet S, et situé évidemment sur la droite BB′ parallèle à AA′, et tangente au cercle I I′. Il est aisé de voir que ce cercle roulant sur BB′ engendrerait précisément la développée S′M′A, si le point décrivant était d'abord placé en S′. En effet, en nommant B la projection du point A sur BB′, on a

$$BS' = AC = I'M'I,$$

$$BI' = AI = \text{arc } IM = \text{arc } IM',$$

par conséquent

$$I'S' = I'M'I - IM' = I'M',$$

ce qui montre que le point décrivant, d'abord placé en S′, viendra par suite du roulement se placer en M′, lorsque le cercle roulant aura son point de contact en I′.

La détermination analytique de la développée, en partant de l'équation de la cycloïde, est facile, et nous ne nous y arrêterons pas; nous nous bornerons à indiquer un moyen élégant d'y parvenir à l'aide d'un système de coordonnées utilement adopté pour la solution de quelques problèmes.

530. Une courbe, dans ce système, est caractérisée par la relation qui lie le rayon de courbure à l'angle formé par la normale avec une direction fixe. Le passage de telles équations à celles auxquelles nous sommes plus habitués, exigerait la solution d'un problème de calcul intégral, que nous ne pouvons aborder ici. Bornons-nous à montrer immédiatement qu'une courbe est déterminée quand on connaît, pour chaque direction de la normale, le rayon de courbure correspondant. Si l'on porte en effet son attention sur l'arc compris entre deux normales de directions données, on connaîtra, pour chaque direction intermédiaire, la longueur de l'arc correspondant de la développée, et, pour déterminer celui-ci, il faudra résoudre le problème suivant : courber un fil de longueur connue, de telle façon que la direction de chaque élément soit assignée à l'avance. La solution est évidemment unique quand on se donne l'origine, et les courbes relatives à des origines différentes sont superposables. La développée étant déterminée, la courbe primitive l'est également, car le rayon de courbure en chaque point étant connu, on saura la longueur qu'il faut porter sur chaque tangente à la développée, pour avoir le point correspondant de la développante.

En nommant φ l'angle formé par la normale à la cycloïde avec la base, et a le rayon du cercle générateur, l'expression du rayon de courbure est

$$\rho = 4a\cos\varphi,$$

l'angle de contingence de la développée est $d\varphi$, l'arc infiniment petit correspondant est $d\rho$; le rayon de courbure ρ' de celle-ci est donc

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = 4a\sin\varphi.$$

D'ailleurs, en nommant φ' l'angle formé par la normale à la développée avec le même axe,

$$\varphi' = \frac{\pi}{2} - \varphi,$$

et par conséquent

$$\rho' = 4a\cos\varphi'.$$

La développée a donc la même équation que la cycloïde et lui est par conséquent égale.

531. Appliquons la même méthode à l'épicycloïde. D'après l'équation trouvée (506)

pour le rayon de courbure de l'épicycloïde, on voit aisément qu'en nommant φ l'angle formé par la normale avec le rayon du cercle fixe dirigé vers l'origine de l'épicycloïde, on a

$$\rho = a \sin m\varphi ;$$

a et m étant des constantes, on en conclut que le rayon ρ' de la développée, toujours égal à $\frac{d\rho}{d\varphi}$, est

$$\rho' = ma \cos m\varphi ,$$

et si l'on nomme φ' l'angle formé avec le même axe par la normale à la développée,

$$\rho' = ma \cos m\left(\frac{\pi}{2} - \varphi'\right),$$

ou en posant

$$m\left(\frac{\pi}{2} - \varphi'\right) = \frac{\pi}{2} - m\varphi_1 ,$$

ce qui revient à faire tourner l'axe, de l'angle $\frac{m-1}{m}\frac{\pi}{2}$,

$$\rho' = ma \sin m\varphi_1 .$$

Pour déduire cette équation de la proposée, il suffit de multiplier par un facteur constant l'expression du rayon de courbure, et il est aisé de voir que c'est précisément ce qu'il faudrait faire pour obtenir l'équation d'une courbe semblable. La développée de l'épicycloïde est donc une épicycloïde semblable, le rapport de similitude est m, et l'angle formé par les lignes homologues dans les deux figures, $\frac{m-1}{m}\frac{\pi}{2}$.

532. *Développée de la spirale logarithmique.* — L'équation de la spirale logarithmique en coordonnées polaires est

$$r = ae^{m\theta} .$$

Le rayon de courbure a (504) pour expression

$$\rho = ae^{m\theta}\sqrt{1+m^2} ;$$

il en résulte, comme on le voit aisément, que le centre de courbure se trouve sur la perpendiculaire élevée par le pôle au rayon vecteur. Si donc r' et θ' sont les coordonnées du centre de courbure, on a

$$\theta' = \theta + \frac{\pi}{2},$$

$$r' = \sqrt{\rho^2 - r^2} = mae^{m\theta} ;$$

il en résulte

$$r' = mae^{m\left(\theta' - \frac{\pi}{2}\right)}.$$

Si l'on fait tourner l'axe polaire d'un angle égal à α, en nommant θ'' l'angle formé par le rayon vecteur avec le nouvel axe polaire, on a

$$r' = mae^{m\left(\theta'' + \alpha - \frac{\pi}{2}\right)},$$

et si l'on pose

$$me^{m\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)} = 1,$$

cette équation se réduit à

$$r' = ae^{m\theta''},$$

équation identique à celle de la courbe proposée. La développée d'une spirale logarithmique est donc, comme celle de la cycloïde, superposable à la courbe elle-même.

CONTACTS DE DIFFÉRENTS ORDRES.

Définition de l'ordre du contact.

533. Lorsque deux courbes ont un point commun correspondant à une abscisse a, si leurs équations sont mises sous la forme

$$y = \varphi(x),$$

$$y = \psi(x),$$

les ordonnées sont égales pour $x = a$, et l'on a

$$\varphi(a) = \psi(a).$$

Pour un point voisin du point commun, et ayant pour abscisse $a + h$, les ordonnées sont différentes, leur différence $\varphi(a+h) - \psi(a+h)$ représente l'écartement des deux courbes; or on a, par le théorème de Taylor,

$$\varphi(a+h) = \varphi(a) + h\varphi'(a) + \frac{h^2}{1.2}\varphi''(a) + \ldots + \frac{h^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}\varphi^{n-1}(a) + \frac{h^n}{1.2.3\ldots n}\varphi^n(a+\theta h),$$

$$\psi(a+h) = \psi(a) + h\psi'(a) + \frac{h^2}{1.2}\psi''(a) + \ldots + \frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}\psi^{n-1}(a) + \frac{h^n}{1.2.3\ldots n}\psi^n(a+\theta h),$$

et par conséquent, en ayant égard à l'équation $\varphi(a) = \psi(a)$,

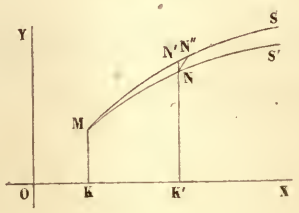
$$\varphi(a+h) - \psi(a+h) = h[\varphi'(a) - \psi'(a)] + \frac{h^2}{1.2}[\varphi''(a) - \psi''(a)] + \ldots$$

Lorsque $\varphi'(a) - \psi'(a)$ n'est pas nul, la différence des ordonnées est de même ordre que h, c'est-à-dire infiniment petite du premier ordre. Si $\varphi'(a) - \psi'(a)$ est nul, la différence des ordonnées est infiniment petite du second ordre : en général, si pour $x = a$ les p premières dérivées de la fonction φ sont égales aux dérivées correspondantes de ψ, la différence $\varphi(a+h) - \psi(a+h)$ contiendra h^{p+1} en facteur, et sera infiniment petite d'ordre $p+1$. On dit alors que les deux courbes ont un contact d'ordre p.

La tangente étant déterminée par la dérivée de l'ordonnée, et le rayon de courbure par les deux premières dérivées, on voit que deux courbes ont un contact du premier ordre quand elles ont même tangente, et un contact du second ordre lorsqu'elles ont en même temps même rayon de courbure.

534. L'ordre du contact de deux courbes est indépendant de la direction des axes des coordonnées, pourvu que l'axe des y ne soit pas parallèle à la tangente commune des deux courbes.

Soient en effet MS, MS′ deux courbes rapportées aux axes OX, OY, et ayant en M un contact d'ordre p. MK étant l'ordonnée du point M, si l'on mène une paral-



lèle à l'axe des Y, par un point K′ situé à une distance infiniment petite N du point K′, la portion NN′ de cette parallèle, comprise entre les deux courbes, est infiniment petite de même ordre que h^{p+1}; les tangentes aux courbes considérées n'étant pas parallèles à l'axe des Y, h est de même ordre que chacun des arcs MN, MN′, et par conséquent notre définition de l'ordre du contact revient à dire que deux courbes ont en M un contact d'ordre p, lorsque, prenant sur l'une d'elles, à partir de M, un arc de longueur σ, la distance de l'extrémité de cet arc à l'autre courbe, comptée sur une parallèle à l'axe des Y, est de même ordre que σ^{p+1}. Or si l'on change la direction de l'axe des Y, σ restant le même, la ligne NN′ sera remplacée par une autre ligne NN″ qui est de même ordre qu'elle, car elles font partie d'un triangle NN′N″, dont les angles sont finis; l'ordre du contact évalué en adop-

tant les nouveaux axes restera donc de l'ordre p, et la démonstration supposant seulement que les angles du triangle $NN'N''$ aient une valeur finie, elle ne sera en défaut que si l'une des directions adoptées pour l'axe des Y est parallèle à la tangente commune des deux courbes, qui est la limite de $N'N''$.

535. On peut montrer, indépendamment des considérations géométriques qui précèdent, que l'ordre du contact est indépendant de la direction des axes de coordonnées. Si, en effet, après avoir rapporté les deux courbes à des axes X, Y, on change de coordonnées, et que l'on adopte des axes nouveaux X', Y', les coordonnées nouvelles x', y' seront des fonctions connues de x et de y. Or les dérivées de y' par rapport à x' peuvent s'exprimer (**173**) en fonction de celles de y par rapport à x, et l'expression de $\frac{d^n y'}{dx'^n}$ ne contient pas de dérivées d'ordre plus élevé que n, et par conséquent deux courbes, pour lesquelles l'ordonnée et ses n premières dérivées par rapport à l'abscisse ont les mêmes valeurs en un point, présenteront aussi le même caractère par rapport aux axes nouveaux.

Il est utile de remarquer que, dans le cas où le contact est d'ordre pair, la différence des ordonnées, étant proportionnelle à une puissance impaire de h, change de signe avec h. Il en résulte que chacune des courbes traverse l'autre en même temps qu'elle la touche, étant située au-dessus d'elle d'un côté du point de contact, et au-dessous de l'autre côté. Lorsque le contact est d'ordre impair, la différence des ordonnées a au contraire un signe invariable dans le voisinage du point de contact, et les deux courbes se touchent sans se pénétrer mutuellement.

536. On doit toujours exclure des considérations précédentes le cas où l'axe des y est parallèle à la tangente commune aux courbes considérées. Dans ce cas, les dérivées deviennent toutes infinies, et la règle qui fait dépendre l'ordre du contact du nombre de celles qui prennent la même valeur ne peut plus être appliquée. Le théorème relatif à l'ordre de la distance infiniment petite des deux courbes comptées sur une parallèle à l'axe des y ne doit pas non plus être appliqué, il conduirait à un résultat inexact. Nous allons chercher, d'une manière précise, quelle serait l'erreur commise en procédant à la manière ordinaire et sans se préoccuper des raisons pour lesquelles cette direction de l'axe des Y a été exclue dans le raisonnement.

Soient KM la tangente commune parallèle à l'axe des Y, et MK l'ordonnée de son point de contact M. Prenons sur l'axe des X une distance infiniment petite $KK' = h$, et cherchons, en supposant entre les courbes un contact de l'ordre n, quel est l'ordre de grandeur de la ligne NN' interceptée entre les deux courbes sur l'ordonnée du point K'. Si l'on suppose que le point M ne soit pas un point singulier, et que la courbure ne soit ni nulle ni infinie, la corde MN fait avec l'axe des Y un

angle infiniment petit de même ordre que la longueur de la corde, le produit de cette corde par le sinus de l'angle est égal à h, et par conséquent la corde et l'angle sont l'un et l'autre de même ordre que $h^{\frac{1}{2}}$. Si donc par le point N on mène une droite NN″ parallèle à l'axe des X et terminée à la courbe MM′, la longueur de cette droite est de même ordre que $\left(h^{\frac{1}{2}}\right)^{n+1}$; mais dans le triangle NN′N″, on a

$$NN'' = NN' \operatorname{tang} NN'N'',$$

et comme NN′N″ est de même ordre que $h^{\frac{1}{2}}$, il faut que NN′ soit d'ordre $h^{\frac{n}{2}}$, et par conséquent l'ordre du contact serait considéré comme égal à $\frac{n}{2} - 1$.

Un contact de quatrième ordre évalué de cette manière semblerait du premier ordre seulement.

On pourrait encore considérer comme infiniment petit du premier ordre l'arc MN, et non pas sa projection sur l'axe des X; cet infiniment petit étant comparable à $h^{\frac{1}{2}}$, NN′ est par rapport à lui de l'ordre n, et l'on doit dire, conformément à l'énoncé général (533), que les courbes ont un contact d'ordre $n-1$; mais c'est assez insister sur les contradictions auxquelles peuvent conduire ces considérations que l'on doit absolument rejeter.

537. Pour évaluer l'ordre du contact de deux courbes, on peut d'ailleurs les rapporter à des coordonnées quelconques. Quel que soit le système adopté, on peut appliquer les mêmes considérations et prouver que deux courbes exprimées par des équations entre deux variables u et v, fonctions quelconques de x et de y, ont un contact de l'ordre n lorsque, pour une même valeur de u, v et ses n premières dérivées sont respectivement égaux pour l'une et l'autre courbe. On sait en effet que les dérivées de v par rapport à u, et celles de y par rapport à x, sont liées les unes aux autres, de telle sorte que, les unes étant connues, on peut calculer les autres sans introduire jamais de dérivées d'ordre supérieur à celles que l'on veut former. Lors donc que deux courbes ont un contact de l'ordre n, les valeurs de y et celles de ses n premières dérivées, étant égales dans les deux courbes pour une même valeur de x, il en sera de même de v et de ses dérivées pour la valeur correspondante de u; réciproquement, si les valeurs de v sont les mêmes de part et d'autre, ainsi que celles des n premières dérivées, y et les dérivées de y par rapport à x seront aussi les mêmes pour les deux courbes, et il y a contact de l'ordre n.

538. Tout ce que nous avons dit sur l'ordre de contact des courbes suppose la possibilité du développement en série des ordonnées voisines de l'ordonnée com-

mune, et se trouve par conséquent soumis à des exceptions relatives au cas où ce développement n'est pas possible. Il peut arriver dans ces cas exceptionnels que deux courbes aient un contact d'ordre fractionnaire. Soient par exemple les courbes représentées par les équations

$$y = x^{\frac{3}{4}}, \quad y = x^{\frac{4}{5}};$$

il est clair qu'à l'origine elles sont toutes deux tangentes à l'axe des y; l'ordre de leur contact est inférieur d'une unité à l'ordre de grandeur d'une parallèle à l'axe des x comprise entre les deux courbes et menée à une distance infiniment petite du premier ordre de l'origine; on verra facilement que cette parallèle est infiniment petite de l'ordre $\frac{4}{3}$, en sorte que les deux courbes ont un contact de l'ordre $\frac{1}{3}$.

Courbes osculatrices.

539. Lorsque l'équation d'une courbe contient un certain nombre de coefficients arbitraires, on peut se proposer de déterminer ces coefficients de manière à établir entre cette courbe et une courbe donnée, un contact d'un ordre aussi élevé que possible.

L'existence d'un contact de l'ordre n est exprimé par $(n+1)$ équations, l'ordre de contact sera donc en général inférieur d'une unité au nombre des paramètres dont on dispose. La courbe ainsi déterminée par la condition d'avoir, en un point donné, le contact de l'ordre le plus élevé possible, est dite courbe osculatrice. Ainsi, par exemple, l'équation générale des sections coniques contenant cinq paramètres arbitraires, la section conique osculatrice d'une courbe, en un point donné, a avec elle un contact de quatrième ordre, le contact de la parabole osculatrice est de troisième ordre, et celui du cercle osculateur du second seulement. La droite osculatrice est la tangente; son contact est du premier ordre.

Cercle osculateur.

540. Le cercle osculateur d'une courbe ne diffère pas du cercle de courbure. Pour le démontrer, il suffira de chercher l'expression de son rayon. Soit

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2 \tag{1}$$

l'équation du cercle. Il doit avoir un point commun avec la courbe, et, en ce point, fournir les mêmes valeurs qu'elle pour $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{d^2y}{dx^2}$. Or l'équation (1) donne

par la différentiation

$$(x-\alpha)+(y-\beta)\frac{dy}{dx}=0,$$

$$1+(y-\beta)\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=0.$$

Ces équations doivent être satisfaites, d'après ce que nous avons dit, en y considérant y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ comme déduits de l'équation de la courbe, et relatifs au point particulier que l'on considère. On en déduit

$$y-\beta=-\frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

$$x-\alpha=\frac{\frac{dy}{dx}\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^3}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2}=R^2.$$

Le cercle osculateur a par conséquent même rayon que le cercle de courbure, et se confond avec lui.

541. On a vu (496) que le cercle de courbure d'une courbe la traverse au point où il la touche; nous aurions pu conclure immédiatement de cette remarque que son contact avec la courbe est (535) d'un ordre supérieur au premier, et qu'il est, par conséquent, le cercle osculateur.

L'identité du cercle de courbure avec le cercle osculateur peut aussi se conclure du résultat obtenu (521). Si sur une courbe, à partir d'un point quelconque M, on porte un arc infiniment petit MM′ égal à σ, la distance de l'extrémité M′ au cercle de courbure en M est égale, en négligeant les infiniment petits du quatrième ordre, à

$$\frac{\sigma^3}{6}\frac{d\frac{1}{\rho}}{ds}; \tag{1}$$

elle est par conséquent infiniment petite du troisième ordre, et la courbe a (534) un contact du second ordre, avec ce cercle qui est par conséquent osculateur.

La distance du cercle à la courbe ne peut s'abaisser au quatrième ordre que si l'expression (1) est nulle, c'est-à-dire si l'on a $\frac{d\frac{1}{\rho}}{ds} = 0$. Cette condition est remplie pour les points où la courbure est maxima ou minima. En ces points, le contact de la courbe avec le cercle est, en général, du troisième ordre, et le cercle de courbure est, dans le voisinage de ces points, intérieur ou extérieur à la courbe que, dans ce cas, il ne traverse pas. Il pourrait arriver cependant qu'au point où $\frac{d\frac{1}{\rho}}{ds}$ est nul, le terme du quatrième ordre disparût en même temps dans l'expression de la distance de la courbe à son cercle osculateur; le contact étant alors du quatrième ordre, le cercle traverserait la courbe: il est aisé de voir que cela a lieu lorsque la dérivée de la courbure par rapport à l'arc est nulle, sans que celle-ci devienne maxima ou minima.

EXERCICES.

1. Si des points d'une courbe plane on abaisse des perpendiculaires sur l'une des tangentes, et que par le pied de chacune d'elles on mène une droite proportionnelle à la longueur de cette perpendiculaire et parallèle à une direction fixe, le lieu des extrémités d'une telle droite est une courbe qui a même tangente que la proposée au point qui leur est commun. Trouver, en ce point, le rapport des rayons de courbure.

2. Si l'on mène par chaque point d'une courbe une droite de longueur donnée faisant un angle constant avec la normale, la normale à la courbe, lieu des extrémités de cette droite, passe par le centre de courbure de la proposée.

3. Si l'on mène la tangente en un point d'une courbe représentée par l'équation

$$y = \varphi(x),$$

puis une série de cordes parallèles à cette tangente, le coefficient angulaire de la tangente à la courbe, lieu des milieux de ces cordes, est au point où cette courbe coupe la ligne donnée

$$\varphi'(x) - \frac{3\varphi''(x)^2}{\varphi'''(x)}.$$

4. Le rayon de courbure de la développée d'une courbe est triple de la portion de normale à la développée, comprise entre son point de départ et son intersection avec la tangente au diamètre dont la direction a été définie dans l'exercice précédent.

5. Si l'on considère, sur une série de courbes parallèles, les points correspondants situés sur une même normale, les tangentes aux courbes diamétrales passant par ces différents points vont concourir en un même point.

6. Si l'on nomme r le rayon vecteur mené d'un pôle fixe au point d'une courbe plane, et p la distance de ce pôle à la tangente, le rayon de courbure ρ a pour expression

$$\rho = -r\frac{dr}{dp}.$$

7. Le lieu des centres des ellipses dont les axes ont une direction donnée, et qui ont en un point donné un contact du second ordre avec une courbe donnée, est une hyperbole équilatère passant par ce point.

8. Le lieu des foyers des paraboles qui, en un point donné, ont un contact du second ordre avec une courbe donnée, est un cercle. La courbe enveloppe des axes de ces mêmes paraboles est du quatrième degré; elle a trois points de rebroussement, et touche en trois points le cercle lieu des foyers.

9. Si d'un point O on abaisse des perpendiculaires sur les tangentes à une courbe plane, en nommant r la distance du point O à un point de cette courbe, p la longueur de la perpendiculaire abaissée sur la tangente, ρ le rayon de courbure de la courbe donnée, et ρ' celui de la courbe lieu des pieds des perpendiculaires, on a

$$\frac{1}{\rho'} = \frac{2}{r} - \frac{p\rho}{r^3}.$$

CHAPITRE II.

COURBURE DES LIGNES TRACÉES SUR UNE SPHÈRE.

Définition de la courbure géodésique.

542. L'analogie des figures planes avec celles que l'on peut tracer sur une sphère a été remarquée dès les éléments; Euler lui a donné une heureuse extension en appliquant l'idée de courbure à l'étude des lignes tracées sur une même sphère. Nous ferons connaître dans ce chapitre les traits principaux de cette théorie, qui n'est elle-même qu'un cas particulier d'une théorie plus générale, relative aux courbes situées sur une surface quelconque. Dans l'étude des lignes tracées sur une sphère, le grand cercle doit évidemment jouer le rôle qui, sur le plan, appartient à la ligne droite. C'est lui qui, *sur la sphère*, est considéré comme ayant une courbure nulle: de même que la courbure d'une ligne plane fait connaître la rapidité plus ou moins grande avec laquelle elle s'écarte de la tangente, la courbure d'une courbe tracée sur la sphère peut être considérée, ainsi que nous l'expliquerons, comme une mesure de la rapidité plus ou moins grande avec laquelle elle s'écarte de l'arc du grand cercle qui lui est tangent. Pour distinguer de la courbure absolue cette courbure, relative seulement à la comparaison des lignes tracées sur une même sphère, nous adopterons l'expression de courbure géodésique créée par M. Liouville dans un sens plus général, qui sera expliqué dans un autre chapitre. Nous nous bornons, dans celui-ci, à l'étude des lignes tracées sur la sphère.

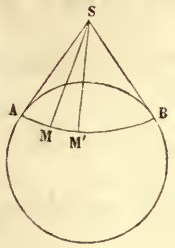
La courbure géodésique totale d'un arc infiniment petit de courbe sphérique, est l'angle formé par les arcs de grand cercle qui le touchent à ses extrémités. La courbure géodésique moyenne est le rapport de la courbure totale à la longueur de l'arc, et la courbure d'une ligne sphérique en un point est la courbure moyenne d'un arc infiniment petit, pris sur elle à partir de ce point.

Courbure d'un petit cercle.

543. D'après la définition précédente, la courbure géodésique d'un petit cercle est évidemment constante. Nous commencerons par en déterminer la valeur.

Soient MM′ un arc infiniment petit appartenant à la circonférence d'un petit cercle AB, et S le sommet du cône de révolution qui touche la sphère suivant ce cercle; les génératrices SM, SM′ du cône sont respectivement normales aux plans des grands

cercles qui touchent le petit cercle en M et en M′. Leur angle MSM′ est par conséquent la courbure géodésique totale de l'arc MM′, et le rapport de cet angle à la lon-



gueur de l'arc infiniment petit, c'est-à-dire, d'après la définition, la courbure géodésique du petit cercle, est $\frac{1}{SM}$.

D'après cela, si, d'un point P pris sur la sphère comme pôle, on décrit un petit cercle dont le rayon sphérique corresponde à un angle θ, le rayon de la sphère étant R, la courbure géodésique de ce petit cercle est $\frac{1}{R \operatorname{tang} \theta}$. Si θ est égal à $\frac{\pi}{2}$, le cercle devient un grand cercle, et la courbure géodésique se réduit à zéro.

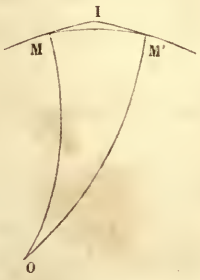
Cercle de courbure.

544. La courbure géodésique d'un petit cercle peut prendre toutes les valeurs depuis zéro, qui est la courbure d'un grand cercle, jusqu'à l'infini, qui est celle d'un cercle infiniment petit. On peut, par conséquent, concevoir en chaque point d'une courbe sphérique un petit cercle qui la touche et ait même courbure qu'elle. Nous nommerons ce cercle *cercle de courbure géodésique* (nous verrons plus loin qu'il ne diffère pas du cercle de courbure absolue qui sera défini dans un autre chapitre); le pôle du cercle de courbure recevra le nom de *pôle de la courbure géodésique*.

Pôle du cercle de courbure.

545. Le pôle de la courbure géodésique d'une courbe sphérique est le point de rencontre de deux grands cercles normaux infiniment voisins.

Considérons, en effet, sur une courbe sphérique, un arc infiniment petit MM′, et



soient MO, M′O les arcs de grand cercle normaux à ses extrémités, qui se coupent sous un angle O.

Lorsque, le rayon de la sphère étant infini, la courbe devient plane, cet angle O est égal à la courbure totale de l'arc MM′; mais en général ces angles sont inégaux, et nous allons d'abord déterminer leur rapport.

Menons par les points M et M′ deux arcs de grand cercle MI, M′I, tangents à l'arc MM′, et se rencontrant en I; le quadrilatère MIM′O, étant formé par quatre arcs de grand cercle, a pour mesure le produit du carré du rayon de la sphère par l'excès de la somme de ses angles sur quatre droits, c'est-à-dire, en nommant ε la courbure totale de MM′, $R^2(O-\varepsilon)$; or ce même quadrilatère peut être remplacé, si on néglige les infiniment petits du second ordre, par la surface comprise entre les arcs OM, OM′ et le petit cercle décrit de O comme pôle avec OM pour rayon sphérique; elle est égale par conséquent au produit de $\frac{O}{2\pi}$ par la surface de la zone à une base dont elle fait partie, c'est-à-dire, à

$$\frac{O}{2\pi}\cdot 2\pi R\left[R-R\cos\left(\frac{OM}{R}\right)\right]=O\cdot R^2\left[1-\cos\left(\frac{OM}{R}\right)\right];$$

nous avons donc

$$O-\varepsilon=O\left[1-\cos\left(\frac{OM}{R}\right)\right],$$

d'où l'on déduit

$$\frac{\varepsilon}{O}=\cos\left(\frac{OM}{R}\right),$$

la courbure $\frac{\varepsilon}{MM'}$ est égale, par conséquent, à $\frac{O}{MM'}\cos\left(\frac{OM}{R}\right)$.

Dans cette dernière expression, le rapport de l'angle O à l'arc MM′ peut être remplacé par celui de l'angle O à l'arc infiniment petit, décrit de O comme pôle avec OM pour rayon sphérique, et compris entre OM et OM′. Ce rapport est lui-même évidemment égal au rapport de 2π à la circonférence du petit cercle, c'est-à-dire enfin à $\frac{1}{R\sin\frac{OM}{R}}$: on a, par conséquent, pour expression de la courbure,

$$\frac{\varepsilon}{MM'}=\frac{\cos\left(\frac{OM}{R}\right)}{R\sin\left(\frac{OM}{R}\right)}=\frac{1}{R\,\mathrm{tang}\left(\frac{OM}{R}\right)};$$

c'est précisément (543) l'expression de la courbure du petit cercle dont OM est le rayon sphérique.

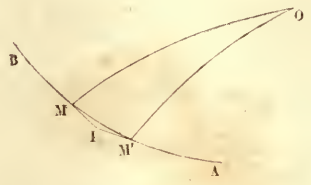
Diverses expressions de la courbure géodésique d'une ligne sphérique.

546. Adoptons pour coordonnées d'un point M de la surface de la sphère, l'arc θ qui mesure la distance de ce point à un point fixe O, et l'angle ψ, formé par l'arc

de grand cercle OM avec un grand cercle donné passant par le point O. Ces coordonnées, analogues aux coordonnées polaires sur un plan, sont équivalentes aux coordonnées géographiques que l'on nomme longitude et latitude. Nous avons trouvé (121) que, dans ce système, en prenant, comme nous le ferons ici, le rayon de la sphère pour unité, la distance de deux points infiniment voisins qui ont pour coordonnées θ, ψ, $\theta + d\theta$, $\psi + d\psi$, a pour carré,

$$d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\psi^2.$$

Cela posé, soit AB une courbe représentée par une équation entre θ et ψ, et MM′ un arc infiniment petit pris sur cette courbe à partir du point M ; calculons la courbure géodésique de cet arc MM′.



Si par les points M et M′ on mène des arcs de grand cercle MI, M′I, tangents à MM′, et se coupant en I, en nommant ε l'angle formé par ces arcs, la courbure géodésique cherchée est

$$\frac{\varepsilon}{\overline{MM'}}.$$

Or on a, comme nous venons de le rappeler,

$$(1) \qquad \overline{MM'}^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\psi^2.$$

Mais en nommant V l'angle OMA, on a (93)

$$(2) \qquad \operatorname{tang} V = \sin\theta\, \frac{d\psi}{d\theta};$$

la surface du quadrilatère OMIM′ est mesurée par l'excès de la somme de ses angles sur quatre angles droits, et l'on a

$$OMIM' = d\psi - \varepsilon + dV,$$

et par conséquent

$$(3) \qquad \varepsilon = d\psi + dV - OMIM',$$

mais l'équation (2) donne

$$(4) \qquad dV = d \operatorname{arc\,tang}\left(\sin\theta\, \frac{d\psi}{d\theta}\right) = \frac{d.\left(\sin\theta . \dfrac{d\psi}{d\theta}\right)}{1 + \sin^2\theta . \left(\dfrac{d\psi}{d\theta}\right)^2}.$$

D'ailleurs la surface OMIM′ est égale, en négligeant les infiniment petits du second ordre, à la surface comprise entre les arcs OM, OM′ et le petit cercle décrit de O comme pôle avec un rayon sphérique OM, égal à θ; on a donc

$$\text{OMIM}' = d\psi\,(1 - \cos\theta),$$

et par conséquent,

$$\varepsilon = d\psi\cos\theta + \frac{d.\left(\sin\theta\,\frac{d\psi}{d\theta}\right)}{1+\sin^2\theta\left(\frac{d\psi}{d\theta}\right)^2}. \tag{5}$$

la courbure $\frac{\varepsilon}{\text{MM}'}$, que nous désignerons par $\frac{1}{\rho}$, est par conséquent

$$\frac{d\psi\cos\theta + \dfrac{d.\left(\sin\theta\,\frac{d\psi}{d\theta}\right)}{1+\sin^2\theta\left(\frac{d\psi}{d\theta}\right)^2}}{\sqrt{d\theta^2 + d\psi^2\sin^2\theta}}, \tag{6}$$

c'est-à-dire, en développant les calculs, et chassant les dénominateurs,

$$\frac{1}{\rho} = \frac{2\cos\theta\,\frac{d\psi}{d\theta} + \sin^2\theta\cos\theta\left(\frac{d\psi}{d\theta}\right)^3 + \sin\theta\,\frac{d^2\psi}{d\theta^2}}{\left[1+\sin^2\theta\left(\frac{d\psi}{d\theta}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}. \tag{7}$$

547. Si l'on prend pour pôle le point M de la courbe considérée, et que l'arc fixe à partir duquel se compte l'angle ψ soit tangent à MM′, on aura $\theta = 0$, et cette hypothèse, introduite dans la formule (7), la réduit à

$$\frac{1}{\rho} = 2\,\frac{d\psi}{d\theta}. \tag{8}$$

L'interprétation géométrique de ce résultat est importante.

$d\psi$ est, en effet, l'angle formé par l'arc du grand cercle qui sert de corde à l'arc MM′, avec la tangente à l'une de ses extrémités, et $d\theta$ est cette corde elle-même que l'on peut, en négligeant les infiniment petits du troisième ordre, remplacer par l'arc MM′; la comparaison de la formule (8) avec l'équation

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\varepsilon}{\text{MM}'},$$

qui résulte de la définition, donne, par conséquent,

$$\varepsilon = 2\,d\psi,$$

et par conséquent :

Dans une courbe sphérique quelconque, l'angle formé par la corde d'un arc infiniment petit MM', avec l'arc de grand cercle tangent à l'une de ses extrémités, est égal, en négligeant les infiniment petits du second ordre, à la moitié de l'angle de contingence formé par les arcs de grand cercle tangents aux deux extrémités M et M'.

548. Il est bien entendu, comme nous l'avons expliqué plusieurs fois, qu'en calculant une grandeur infiniment petite d'un certain ordre, nous regardons les infiniment petits d'ordre supérieur comme négligeables.

Si $\varphi(x)$ désigne, par exemple, une fonction de x qui, lorsque x est infiniment petit du premier ordre, soit infiniment petite d'ordre n, et que le rapport $\frac{\varphi(x)}{x^n}$ ait pour limite une constante A, nous dirons que x étant infiniment petit, la valeur de $\varphi(x)$ est Ax^n; mais pour éviter toute confusion nous rappellerons que les infiniment petits d'ordre supérieur ont été négligés, en nommant, avec M. O. Bonnet, cette expression Ax^n, la valeur principale de $\varphi(x)$. En adoptant cette dénomination, le théorème démontré (45) peut s'énoncer de la manière suivante :

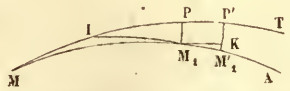
Si une fonction $\varphi(x)$, infiniment petite avec x, a pour valeur principale Ax^n, A étant une constante, la dérivée $\varphi'(x)$ a pour valeur principale nAx^{n-1}.

549. La réciproque de ce théorème est exacte : si la dérivée $\varphi'(x)$ est infiniment petite avec x, et a pour valeur principale nAx^{n-1}, A étant une constante, la fonction $\varphi(x)$, si elle est aussi infiniment petite avec x, a pour valeur principale Ax^n.

Posons, en effet,

$$\varphi'(x) = nAx^{n-1} + \varepsilon,$$

ε étant, lorsque x est infiniment petit, infiniment petit par rapport au premier terme du second membre. $\varphi(x)$ est (115) l'aire comprise entre l'axe des x, l'ordonnée qui correspond à l'abscisse x, et la courbe dont l'ordonnée est $\varphi'(x)$. Or, en négligeant le terme ε, on ne supprime, par hypothèse, qu'une portion infiniment petite de cette ordonnée, et l'aire qui représente $\varphi(x)$ n'est, par conséquent, altérée que d'une portion infiniment petite de sa valeur : elle devient alors égale à la fonction qui, étant nulle avec x, a pour dérivée nAx^{n-1}, c'est-à-dire à Ax^n, et par conséquent la valeur principale de $\varphi(x)$ est Ax^n.



550. Revenons à la théorie des courbes sphériques : soit MA une courbe quelconque tracée sur une sphère, et MT l'arc de grand cercle qui la touche en M;

nommons S l'arc MM_1 compté sur la courbe MA à partir du point M, et y la distance du point M_1 à l'arc MT comptée sur l'arc de grand cercle M_1P perpendiculaire à MT.

Il est facile de voir que l'angle MM_1P, formé par M_1P avec l'arc MM_1, a pour cosinus $\frac{dy}{ds}$. Soit en effet M'_1 un point situé sur la courbe MA, à une distance infiniment petite de M_1 que nous nommerons ds, et soit $M'_1P' = y + dy$ l'arc de grand cercle analogue à M_1P, et correspondant au point M'_1 ; menons par le point M_1 un arc de petit cercle M_1K parallèle à PP′: on aura $M'_1K = dy$, et le triangle $M_1M'_1K$, qui peut être considéré comme rectiligne, donnera

$$\cos M_1M'_1K = \frac{dy}{ds}. \tag{1}$$

Cela posé, supposons le point M_1 infiniment voisin de M, et menons l'arc de grand cercle M_1I tangent à MM_1, et coupant en I l'arc MT; le triangle sphérique IM_1P, donne, en nommant ε l'angle en I, qui est l'angle de contingence de l'arc MM_1,

$$\cos PM_1I = \sin\varepsilon \cos IP ;$$

cos IP différant infiniment peu de l'unité, on peut écrire, en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur au premier,

$$\cos PM_1I = \sin\varepsilon,$$

c'est-à-dire, à cause de l'équation (1), et en remplaçant le sinus par l'arc,

$$\frac{dy}{ds} = \varepsilon ;$$

mais en nommant $\frac{1}{\rho}$ la courbure géodésique de la ligne MA au point M, on a, en désignant par s l'arc MM_1,

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\varepsilon}{s}, \tag{2}$$

et par conséquent

$$\frac{dy}{ds} = \frac{s}{\rho}. \tag{3}$$

La valeur principale de la dérivée $\frac{dy}{ds}$ étant $\frac{s}{\rho}$, celle de y est (549) $\frac{s^2}{2\rho}$ et l'on a par conséquent, en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur au second,

$$y = \frac{s^2}{2\rho}. \tag{4}$$

En joignant le point M au point M_1 par un arc de grand cercle que nous nomme-

rons la corde de MM_1, on forme un triangle sphérique MM_1P, dans lequel on a

$$\frac{\sin M_1P}{\sin M_1MP} = \sin M_1M,$$

c'est-à-dire, en remplaçant les sinus infiniment petits par les arcs,

$$\frac{y}{M_1MP} = s,$$

et à cause de l'équation (4)

$$M_1MP = \frac{y}{s} = \frac{s}{2\rho}. \tag{5}$$

La comparaison avec l'équation (3) montre que l'angle M_1MP est la moitié de l'angle de contingence ε, ce qui est précisément le théorème déjà démontré (546) et dont nous avons ainsi une seconde démonstration.

L'équation (5) exprime aussi un théorème important; on peut l'écrire

$$\frac{1}{\rho} = \frac{2y}{s^2};$$

elle donne, pour la courbure géodésique sur la sphère, une expression identique à celle qui a été trouvée (499) pour la courbure d'une ligne plane. Cette courbure, on le voit, est proportionnelle à la distance y correspondant à une valeur donnée de s, et fait connaître, comme nous l'avons annoncé (542), la rapidité avec laquelle la courbe s'écarte du grand cercle qui lui est tangent.

551. *Différence entre un arc sphérique infiniment petit et sa corde.* — En nommant, comme nous l'avons fait (550), corde d'un arc de courbe sphérique, l'arc de grand cercle qui réunit ses extrémités, la différence entre un arc infiniment petit et sa corde est infiniment petite du troisième ordre, et l'expression de sa partie principale ne diffère de celle qui convient aux courbes planes, que par la substitution de la courbure géodésique à la courbure.

Soient, en effet, s la longueur d'un arc de courbe sphérique, compté à partir d'un point M, et c la *corde* de cet arc : si l'on considère l'une des extrémités de s comme fixe, la différence $s - c$ est une fonction de s dont la dérivée, par rapport à s, est $1 - \frac{dc}{ds}$: or, en nommant V l'angle sous lequel la corde c coupe l'arc s, on a rigoureusement

$$\cos V = \frac{dc}{ds},$$

et par conséquent

$$1 - \frac{dc}{ds} = 1 - \cos V = 2\sin^2\frac{1}{2}V.$$

Si l'on suppose s infiniment petit, l'angle V est (546) la moitié de l'angle de contin-

gence ε, correspondant à l'arc s; $2\sin^2\frac{1}{2}$ V peut être, par conséquent, remplacé par $\frac{\varepsilon^2}{8}$, c'est-à-dire, en nommant $\frac{1}{\rho}$ la courbure géodésique en M, par $\frac{s^2}{8\rho^2}$, la dérivée de la différence $s - c$ a donc pour partie principale $\frac{s^2}{8\rho^2}$, et par conséquent (549) la partie principale de $s - c$ est $\frac{s^3}{24\rho^2}$. Cette expression est, on le voit, toute semblable à celle que nous avons trouvée pour les courbes planes, et montre par un nouvel exemple la parfaite analogie des deux théories.

552. *Différence entre un arc infiniment petit et la somme des tangentes menées à ses extrémités.* — Soient AB l'arc considéré, et I l'intersection des arcs de grand cercle qui le touchent en A et en B.

Évaluons d'abord l'excès de AI + IB sur la corde AB, en le réduisant toujours, bien entendu, à la partie principale.

Dans le triangle sphérique AIB, on a, en nommant A l'angle infiniment petit dont le sommet est en A,

$$\sin\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}(AI + IB - AB)\sin\frac{1}{2}(AB + BI - AI)}{\sin AB\,\sin AI}}. \tag{1}$$

Remplaçons $\sin\frac{1}{2}A$ par l'arc infiniment petit $\frac{1}{2}A$, et dans le second membre, réduisons chaque facteur infiniment petit à sa partie principale; $\sin\frac{1}{2}(AI + IB - AB)$ doit être remplacé par $\frac{1}{2}(AI + IB - AB)$, moitié de la différence que nous voulons évaluer, et $\sin\frac{1}{2}(AB + BI - AI)$ par $\frac{1}{2}(AB + BI - AI)$, ou plus simplement par $\frac{1}{2}AB$, car la différence BI — AI est infiniment petite du second ordre; sin AB et sin AI peuvent être remplacés de même par AB et AI, et l'on a

$$\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\frac{1}{4}(AB)(AI + IB - AB)}{AB.AI}}. \tag{2}$$

En nommant s l'arc AB, ε son angle de contingence, et $\frac{1}{\rho}$ sa courbure géodésique

en A, on a

$$A = \frac{\varepsilon}{2} = \frac{s}{2\rho},$$

$$AI = \frac{s}{2},$$

$$AB = s,$$

et par conséquent l'équation (2) devient

$$\frac{s}{4\rho} = \sqrt{\frac{\frac{s}{4}(AI + IB - AB)}{\frac{s^2}{2}}}, \tag{3}$$

d'où l'on conclut

$$AI + IB - AB = \frac{s^3}{8\rho^2}.$$

En rapprochant cette équation de celle précédemment obtenue,

$$s - AB = \frac{s^3}{24\rho^2},$$

on en déduit

$$AI + IB - s = \frac{s^3}{12\rho^2},$$

résultat tout semblable à celui qui a été obtenu pour les courbes planes.

Théorie des développées sphériques.

553. La développée sphérique d'une courbe tracée sur la sphère est une courbe tangente aux arcs de grand cercle qui coupent la première à angle droit; elle est l'enveloppe de ces arcs normaux, et par conséquent le lieu de leurs intersections successives, ou, ce qui revient au même, le lieu des centres de courbure sphérique de la courbe donnée, qui, par rapport à sa développée, porte le nom de développante. La développée d'une courbe sphérique fait connaître, en chaque point, la courbure de celle-ci, égale (**545**) à la tangente de l'angle correspondant à l'arc de grand cercle normal compris entre la courbe et le point où il touche la développée; la longueur de l'arc de développée sphérique s'exprime d'ailleurs comme dans la théorie des courbes planes: il est égal à la différence des arcs de grand cercle compris entre ses extrémités et les points correspondants de la développante, et la démonstration est toute semblable, comme on va le voir, à celle que nous avons donnée (**22**) pour les courbes planes.

554. Nous commencerons par établir quelques lemmes relatifs à la variation de grandeur d'un arc de grand cercle. Lorsque l'une des extrémités d'un arc de grand cercle AB se déplace infiniment peu sur la sphère, la variation de longueur qui en résulte est égale au produit de l'arc infiniment petit qu'elle a parcouru par le cosinus de l'angle formé par la direction qu'elle a suivie avec celle de l'arc de grand cercle considéré.

Soient en effet AB un arc de grand cercle de longueur finie, et BB′ le déplacement infiniment petit de l'extrémité B; du point A comme pôle, avec AB′ pour rayon sphérique, décrivons un arc de petit cercle qui coupe AB en P. L'accroissement de longueur que reçoit AB en devenant AB′, est PB, et l'on a, dans le triangle infiniment petit PAB′, que l'on peut considérer comme rectiligne,

$$\mathrm{PB} = \mathrm{BB'}\cos\mathrm{PBB'} = -\mathrm{BB'}\cos\mathrm{B'BA},$$

ce qui démontre la proposition énoncée.

Lorsque les deux extrémités de l'arc AB se déplacent en même temps, la variation de l'arc est la somme des variations qui résulteraient de chaque déplacement effectué séparément.

Supposons en effet que l'arc AB devienne A′B′; joignons A′B: on a, en négligeant les infiniment petits du second ordre,

$$\mathrm{A'B} - \mathrm{AB} = -\overline{\mathrm{AA'}}\cos\mathrm{A'AB},$$
$$\mathrm{A'B} - \mathrm{A'B'} = -\mathrm{BB'}\cos\mathrm{BB'A'},$$

et par conséquent

$$\mathrm{A'B'} - \mathrm{AB} = \mathrm{BB'}\cos\mathrm{BB'A'} - \mathrm{AA'}\cos\mathrm{A'AB};$$

l'angle BB′A′ diffère infiniment peu du supplément de B′BA, et l'on a enfin, en négligeant toujours des infiniment petits du second ordre,

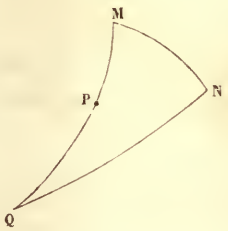
$$\mathrm{A'B'} - \mathrm{AB} = -\mathrm{BB'}\cos\mathrm{B'BA} - \mathrm{AA'}\cos\mathrm{A'AB} = \mathrm{BB'}\cos(\mathrm{BB'}, \mathrm{AB}) + \mathrm{AA'}\cos(\mathrm{AA'}, \mathrm{BA}).$$

Lorsque l'arc de grand cercle est constamment normal à la courbe parcourue par une de ses extrémités, le terme proportionnel au déplacement de cette extrémité.

contenant en facteur le cosinus d'un angle droit, est égal à zéro, et l'accroissement infiniment petit de la longueur se réduit à un seul terme. Si l'arc considéré est normal à chaque instant aux deux courbes décrites par les extrémités, sa variation est constamment nulle, et il est par conséquent de longueur constante. Ainsi donc: si deux courbes sphériques coupent orthogonalement une série continue d'arcs de grands cercles, situés d'une manière quelconque sur la sphère, les portions de ces arcs interceptées entre les deux courbes sont toutes égales entre elles.

Lorsqu'un arc de grand cercle, en se déplaçant sur la sphère, reste constamment tangent à la courbe parcourue par l'une de ses extrémités, le terme proportionnel au déplacement de cette extrémité contenant en facteur le cosinus d'un angle nul, se réduit au déplacement lui-même, c'est-à-dire à l'arc infiniment petit de la courbe à laquelle l'arc considéré reste tangent.

555. D'après les lemmes précédents, les raisonnements qui nous ont fait connaître (22) la longueur d'un arc de développée de courbe plane peuvent s'appliquer, mot pour mot, à la développée sphérique d'une courbe sphérique. Soient, en



effet, MN une courbe sphérique, et PQ sa développée. L'extrémité M de l'arc MP parcourant la développante, l'extrémité P se mouvant en même temps de manière à occuper le point correspondant de la développée, chaque accroissement infiniment petit de cet arc sera égal à l'arc correspondant de la développée, et l'accroissement total, lorsque de MP il devient NQ, est égal à l'arc PQ, comme on l'avait annoncé.

Courbure des trajectoires orthogonales sur la sphère.

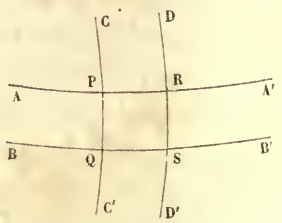
556. Un système de courbes tracées sur la sphère, et se succédant suivant une loi continue, peut être représenté par une équation entre les deux coordonnées sphériques et un paramètre arbitraire. Pour chaque valeur du paramètre, l'équation représente en effet une courbe déterminée qui se déplace et se déforme infiniment peu lorsque celui-ci reçoit un accroissement infiniment petit.

A un système de courbes sphériques en correspond toujours un second formé de lignes qui coupent les premières à angle droit; leur équation générale renfermera

aussi un paramètre arbitraire, et chaque point de la sphère pouvant être défini par les valeurs des paramètres correspondants aux courbes qui s'y croisent, ceux-ci forment un système de coordonnées curvilignes dont l'emploi peut être utile dans certains cas.

Nous allons étudier la loi de variation des courbures géodésiques de deux systèmes de courbes se coupant orthogonalement sur la sphère. Nommons α_1 le paramètre dont la valeur caractérise les courbes du premier système, et α_2 celui qui correspond au second système.

Soient AA′, BB′ deux courbes infiniment voisines du premier système, correspondant aux valeurs α_1, $\alpha_1 + d\alpha_1$ du paramètre α_1 qui figure dans leur équation générale, et CC′, DD′ deux courbes infiniment voisines du second système, correspondant aux valeurs α_2, $\alpha_2 + d\alpha_2$ de leur paramètre, et formant avec les deux premiers un rectangle infiniment petit PRQS; le côté PR, distance de deux points



infiniment voisins qui correspondent à une même valeur de α_1 est évidemment proportionnel à $d\alpha_2$, et le côté PQ à $d\alpha_1$. Posons donc, en désignant par h_1 et h_2 des fonctions de α_1 et de α_2, que nous regarderons comme connues,

$$\mathrm{PR} = \frac{d\alpha_2}{h_2}, \quad \mathrm{PQ} = \frac{d\alpha_1}{h_1}.$$

Le calcul de h_1 et de h_2 dans chaque cas particulier se fera d'ailleurs facilement, car en considérant les variables α_1 et α_2 comme formant un système de coordonnées, la distance de deux points infiniment voisins quelconques tels que P et S, qui correspondent aux coordonnées α_1, α_2, $\alpha_1 + d\alpha_1$, $\alpha_2 + d\alpha_2$, est évidemment

$$ds^2 = \frac{d\alpha_2^2}{h_2^2} + \frac{d\alpha_1^2}{h_1^2},$$

et il suffira par conséquent de calculer cette distance, comme il a été dit (123), pour connaître h_1 et h_2 que nous regardons tous deux comme essentiellement positifs.

La courbure $\frac{1}{\rho_2}$ de la ligne PQ est égale à l'angle de contingence formé par les arcs de grand cercle tangents en P et Q, divisé par la longueur ds_2 de cet arc PQ. Or on a,

d'après la notation adoptée,

$$ds_2 = \frac{d\alpha_1}{h_1}.$$

Si donc on nomme ε l'angle de contingence, la courbure $\frac{1}{\rho_2}$ est donnée par la formule

$$\frac{1}{\rho_2} = \frac{\varepsilon h_1}{d\alpha_1};$$

il reste à calculer ε : or cet angle est formé par les arcs de grand cercle normaux respectivement menés en P et Q aux courbes AA′ et BB′ que PQ coupe toutes deux à angle droit. Soit PI le premier de ces arcs, et I le point où il coupe la courbe BB′, la distance QI est infiniment petite du second ordre, et l'on peut, dans le calcul de l'angle ε, remplacer le grand cercle normal en Q par le grand cercle normal en I, qui forme avec lui un angle infiniment petit du second ordre; ε est, d'après cela, le complément de l'angle sous lequel le grand cercle PI coupe la courbe BB′: or on sait (553) que si en chaque point d'une courbe sphérique on élève un arc de grand cercle normal, et que l'on porte sur lui une longueur constante l, le lieu des extrémités coupe à angle droit tous ces grands cercles normaux à la courbe donnée; on en conclut que si la longueur l portée sur chaque grand cercle varie d'un point à l'autre, un élément $d\sigma$ de la courbe obtenue, dont les extrémités correspondent aux longueurs l et $l + dl$, portées sur deux grands cercles voisins, formera, avec les grands cercles, un angle dont le cosinus est $\frac{dl}{d\sigma}$: dans le cas de deux courbes infiniment voisines qui nous occupe ici, l'élément $d\sigma$ peut être remplacé par l'élément correspondant ds de la courbe AA′ qui n'en diffère que d'un infiniment petit du second ordre, et l'angle infiniment petit ε, que l'on peut remplacer par le cosinus de son complément, a pour expression $\frac{dl}{ds_1}$; l est ici la distance PI égale, nous l'avons dit, à $\frac{d\alpha_1}{h_1}$, et dl est l'accroissement correspondant à un changement infiniment petit de α_2; on a donc

$$dl = \frac{d\left(\frac{d\alpha_1}{h_1}\right)}{d\alpha_2} d\alpha_2 = d\alpha_1 d\alpha_2 \frac{d\left(\frac{1}{h_1}\right)}{d\alpha_2}.$$

Le dénominateur ds_1 du quotient $\frac{dl}{ds_1}$ est d'ailleurs l'arc infiniment petit de AA′, correspondant à l'accroissement $d\alpha_2$ du paramètre, et l'on a

$$ds_1 = \frac{d\alpha_2}{h_2};$$

par conséquent,

$$\varepsilon = \frac{dl}{ds_1} = h_2 d\alpha_1 \frac{d\left(\frac{1}{h_1}\right)}{d\alpha_2},$$

on en conclut

$$\frac{1}{\rho_2} = \frac{\varepsilon h_1}{d\alpha_1} = h_1 h_2 \frac{d\left(\frac{1}{h_1}\right)}{d\alpha_2} = -\frac{h_2}{h_1}\frac{dh_1}{d\alpha_2}.$$

On trouverait de même

$$\frac{1}{\rho_1} = h_1 h_2 \frac{d\frac{1}{h_2}}{d\alpha_1} = -\frac{h_1}{h_2}\frac{dh_2}{d\alpha_1}.$$

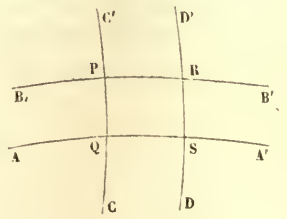
Ces formules donnent au rayon de courbure un signe qui peut faire connaître le sens de la courbure; la courbe PQ partage la sphère en deux régions: dans l'une, le paramètre α_2 est plus grand, et dans l'autre moindre que pour les points de PQ; la courbure est positive lorsque le grand cercle tangent PI est, dans le voisinage du point de contact, dans la première de ces deux régions, et elle est négative dans le cas contraire.

557. La formule

$$\frac{1}{\rho_2} = h_2 h_1 \frac{d\frac{1}{h_1}}{d\alpha_2}$$

peut comme la formule semblable, relative aux courbes planes, être mise sous une forme dont l'interprétation géométrique est élégante.

Soient AA′, BB′, deux courbes infiniment voisines du premier système, correspondant aux paramètres $\alpha_1, \alpha_1 + d\alpha_1$, et CC′, DD′ deux courbes du second système,



coupant les premières à angle droit, et correspondant aux paramètres α_2, $\alpha_2 + d\alpha_2$.

On a

$$\mathrm{PQ} = \frac{d\alpha_1}{h_1},$$

$$\mathrm{RS} = \frac{d\alpha_1}{h_1} + \frac{d}{d\alpha_2}\left(\frac{d\alpha_1}{h_1}\right) d\alpha_2;$$

par conséquent,

$$\frac{d}{d\alpha_2}\left(\frac{d\alpha_1}{h_1}\right) = \frac{\mathrm{RS} - \mathrm{PQ}}{d\alpha_2}.$$

Dans la différentiation par rapport à α_2, $d\alpha_1$ est considéré comme une constante; l'équation précédente donne par conséquent

$$\frac{d\frac{1}{h_1}}{d\alpha_2} = \frac{\mathrm{RS} - \mathrm{PQ}}{d\alpha_1\, d\alpha_2}.$$

On a donc

$$\frac{1}{\rho_2} = h_1 h_2 \frac{(\mathrm{RS} - \mathrm{PQ})}{d\alpha_1\, d\alpha_2};$$

mais

$$\mathrm{PQ} = \frac{d\alpha_1}{h_1}, \qquad \mathrm{QS} = \frac{d\alpha_2}{h_2},$$

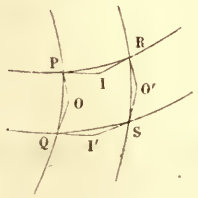
donc enfin

$$\frac{1}{\rho_2} = \frac{(\mathrm{RS} - \mathrm{QP})}{(\mathrm{QP})\,(\mathrm{QS})};$$

la courbure de l'arc QP est égale à la différence des côtés opposés du rectangle PQRS, divisée par la surface du rectangle.

558. Cherchons ce que devient, dans le cas des courbes sphériques orthogonales, la relation trouvée (511) entre les dérivées des courbures de deux courbes qui se croisent en un même point. Les deux démonstrations que nous avons données (511) et (512) exigent l'une et l'autre de légères modifications, et d'abord il faudrait, bien entendu, pour la première démonstration, substituer des coordonnées polaires aux coordonnées rectilignes; les modifications qu'il faut apporter à la seconde n'exigent au contraire que l'addition d'un terme dans la première des équations obtenues, sans qu'il y ait rien à changer ensuite dans les transformations ultérieures. C'est celle-là seulement que nous développerons.

Soit PQRS le rectangle infiniment petit formé par les courbes des deux systèmes



correspondant aux valeurs α_1, $\alpha_1 + d\alpha_1$ du premier paramètre, et α_2, $\alpha_2 + d\alpha_2$ du second. Menons par les sommets P, Q, R, S, des arcs de grand cercle tangents aux côtés de ce rectangle; nous formerons un octogone sphérique, QOPIRO'SI', dont la

surface est mesurée par l'excès de la somme des angles sur douze angles droits; or, en nommant ε_1, $\varepsilon_1 + d\varepsilon_1$ les angles de contingence des arcs PR, QS, et ε_2, $\varepsilon_2 + d\varepsilon_2$ ceux des arcs PQ, RS, dans le cas supposé sur la figure, où les courbures sont toutes positives, on a, en désignant les angles de l'octogone par les lettres placées à leur sommet,

$$O = \pi + \varepsilon_2, \qquad I = \pi + \varepsilon_1,$$
$$O' = \pi - \varepsilon_2 - d\varepsilon_2, \quad I' = \pi - \varepsilon_1 - d\varepsilon_1,$$

et par conséquent la surface de l'octogone est mesurée par

$$-d\varepsilon - d\varepsilon_1,$$

l'unité de surface étant, comme on sait, le carré du rayon de la sphère pris par hypothèse pour unité de longueur. D'un autre côté, la différence entre l'octogone et le rectangle PQRS est tout au plus du troisième ordre (en réalité elle est du quatrième), et l'on peut la regarder comme égale au produit de ses deux dimensions $PQ \times PR$: on a donc

$$d\varepsilon + d\varepsilon_1 = -PQ \times PR; \tag{1}$$

mais on a

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{\varepsilon_1}{PR},$$
$$\frac{1}{\rho_2} = \frac{\varepsilon_2}{PQ},$$

donc

$$\varepsilon_1 = \frac{PR}{\rho_1},$$
$$\varepsilon_2 = \frac{PQ}{\rho_2},$$

et par conséquent l'équation (1) peut s'écrire

$$\frac{d\left(\frac{PR}{\rho_1}\right)}{d\alpha_1} d\alpha_1 + \frac{d\left(\frac{PQ}{\rho_2}\right)}{d\alpha_2} d\alpha_2 = -PR.PQ, \tag{2}$$

c'est-à-dire

$$PR \frac{d\frac{1}{\rho_1}}{d\alpha_1} d\alpha_1 + \frac{1}{\rho_1} \frac{d(PR)}{d\alpha_1} d\alpha_1 + PQ \frac{d\frac{1}{\rho_2}}{d\alpha_2} d\alpha_2 + \frac{1}{\rho_2} \frac{d(PQ)}{d\alpha_2} d\alpha_2 = -PR.PQ. \tag{3}$$

Or on a (556)

$$ds_1 = PR = \frac{d\alpha_2}{h_2}, \quad ds_2 = PQ = \frac{d\alpha_1}{h_1},$$

et par conséquent

$$\frac{d(\mathrm{PR})}{d\alpha_1} = \frac{d}{d\alpha_1}\left(\frac{d\alpha_2}{h_2}\right) = d\alpha_2 \frac{d\left(\frac{1}{h_2}\right)}{d\alpha_1},$$

$$\frac{d(\mathrm{PQ})}{d\alpha_2} = \frac{d}{d\alpha_2}\left(\frac{d\alpha_1}{h_1}\right) = d\alpha_1 \frac{d\left(\frac{1}{h_1}\right)}{d\alpha_2},$$

ou enfin (556)

$$\frac{d(\mathrm{PR})}{d\alpha_1} = d\alpha_2 \frac{1}{h_1 h_2}\frac{1}{\rho_1},$$

$$\frac{d(\mathrm{PQ})}{d\alpha_2} = d\alpha_1 \frac{1}{h_1 h_2}\frac{1}{\rho_2},$$

et l'équation (3) devient

$$\frac{d\alpha_1\, d\alpha_2}{h_2}\frac{d\left(\frac{1}{\rho_1}\right)}{d\alpha_1} + \frac{1}{\rho_1^2}\frac{d\alpha_1\, d\alpha_2}{h_1 h_2} + \frac{d\alpha_1\, d\alpha_2}{h_1}\frac{d\left(\frac{1}{\rho_2}\right)}{d\alpha_2} + \frac{1}{\rho_2^2}\frac{d\alpha_1\, d\alpha_2}{h_1 h_2} = -\frac{d\alpha_1\, d\alpha_2}{h_1 h_2},$$

et en supprimant le facteur $d\alpha_1$, $d\alpha_2$, et multipliant par h_1, h_2,

$$h_1 \frac{d\left(\frac{1}{\rho_1}\right)}{d\alpha_1} + h_2 \frac{d\left(\frac{1}{\rho_2}\right)}{d\alpha_2} + \frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_2^2} = -1, \tag{4}$$

c'est-à-dire, à cause de $\frac{d\alpha_1}{h_1} = ds_2$, $\frac{d\alpha_2}{h_2} = ds_1$,

$$\frac{d\left(\frac{1}{\rho_1}\right)}{ds_2} + \frac{d\left(\frac{1}{\rho_2}\right)}{ds_1} + \frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_2^2} = -1. \tag{5}$$

Si l'on veut représenter par R le rayon de la sphère pris jusqu'ici pour unité, ρ_1, ρ_2, ds_1, ds_2 seront chacun divisés par R, et l'équation deviendra

$$\frac{d\frac{1}{\rho_1}}{ds_1} + \frac{d\frac{1}{\rho_2}}{ds_2} + \frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_2^2} = -\frac{1}{\mathrm{R}^2}. \tag{6}$$

559. La formule (6) peut être transformée de manière à ne plus contenir que les fonctions h_1, h_2, et les paramètres α_1, α_2, dont elles dépendent.

Reprenons en effet l'équation

$$h_1 \frac{d\left(\frac{1}{\rho_1}\right)}{d\alpha_1} + h_2 \frac{d\left(\frac{1}{\rho_2}\right)}{d\alpha_2} + \frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_2^2} = -1,$$

on a (556)

$$\frac{1}{\rho_1} = h_1 h_2 \frac{d\frac{1}{h_2}}{d\alpha_1},$$

$$\frac{1}{\rho_2} = h_1 h_2 \frac{d\frac{1}{h_1}}{d\alpha_2},$$

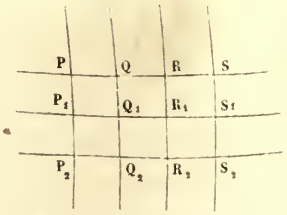
et l'équation devient

$$h_1 \frac{d}{d\alpha_1}\left(h_1 h_2 \frac{d\frac{1}{h_2}}{d\alpha_1}\right) + h_2 \frac{d}{d\alpha_2}\left(h_1 h_2 \frac{d\frac{1}{h_1}}{d\alpha_2}\right) + h_1^2 h_2^2 \left(\frac{d\frac{1}{h_2}}{d\alpha_1}\right)^2 + h_1^2 h_2^2 \left(\frac{d\frac{1}{h_1}}{d\alpha_2}\right)^2 = -1,$$

c'est-à-dire, en faisant les mêmes réductions que (513),

$$(7) \qquad h_1 \frac{d^2\frac{1}{h_2}}{d\alpha_1^2} + h_2 \frac{d^2\frac{1}{h_1}}{d\alpha_2^2} - h_1^2 \frac{d\frac{1}{h_1}}{d\alpha_1}\frac{d\frac{1}{h_2}}{d\alpha_1} - h_2^2 \frac{d\frac{1}{h_1}}{d\alpha_2}\frac{d\frac{1}{h_2}}{d\alpha_2} = -\frac{1}{h_1 h_2}.$$

560. Les fonctions $\frac{1}{h_1}$, $\frac{1}{h_2}$, faisant connaître (556) la loi de variation de la distance entre deux courbes infiniment voisines appartenant à un même système, on comprend que l'équation (7) qui a lieu entre ces fonctions et leurs dérivées exprime implicitement la loi suivant laquelle peuvent varier les côtés des rectangles infiniment petits dans lesquels une sphère peut être décomposée par deux systèmes de lignes orthogonales. Pour obtenir cette loi explicitement, il suffira de remplacer dans la formule, $\frac{1}{h_1}$ et $\frac{1}{h_2}$ par leur expression en fonction des côtés infiniment petits de ces rectangles. Soient PQRS, $P_1Q_1R_1S_1$..., PP_1P_2, QQ_1Q_2.... les lignes de l'un et l'autre



système correspondant aux valeurs α_1, α_2, des paramètres, et à celles que l'on obtient en leur attribuant des accroissements infiniment petits, égaux à $d\alpha_1$ pour le premier, et à $d\alpha_2$ pour le second. Nommons, comme nous l'avons fait, dans le cas des courbes planes, x et y les côtés PQ, PP_1... du premier rectangle, et désignons par le signe d la variation qui correspond à l'accroissement $d\alpha_1$ de α_1, et par δ celle

qui correspond à la variation $d\alpha_2$ de α_2, on a

$$x = \mathrm{PQ} = \frac{d\alpha_2}{h_2},$$

$$y = \mathrm{PP_1} = \frac{d\alpha_1}{h_1},$$

$$dx = \mathrm{P_1Q_1} - \mathrm{PQ} = \frac{d}{d\alpha_1}\left(\frac{d\alpha_2}{h_2}\right) d\alpha_1 = d\alpha_1\, d\alpha_2 \frac{d\frac{1}{h_2}}{d\alpha_1},$$

$$dy = \mathrm{P_2P_1} - \mathrm{PP_1} = \frac{d}{d\alpha_1}\left(\frac{d\alpha_1}{h_1}\right) d\alpha_1 = d\alpha_1^2 \frac{d\frac{1}{h_1}}{d\alpha_1},$$

$$\delta x = \mathrm{QR} - \mathrm{PQ} = \frac{d}{d\alpha_2}\left(\frac{d\alpha_2}{h_2}\right) d\alpha_2 = d\alpha_2^2 \frac{d\frac{1}{h_2}}{d\alpha_2},$$

$$\delta y = \mathrm{QQ_1} - \mathrm{PP_1} = \frac{d}{d\alpha_2}\left(\frac{d\alpha_1}{h_1}\right) d\alpha_2 = d\alpha_1\, d\alpha_2 \frac{d\frac{1}{h_1}}{d\alpha_2},$$

$$d^2x = \frac{d}{d\alpha_1}(dx)\, d\alpha_1 = d\alpha_1^2\, d\alpha_2 \frac{d^2\frac{1}{h_2}}{d\alpha_1^2},$$

$$\delta^2 y = \frac{d}{d\alpha_2}(\delta y)\, d\alpha_1 = d\alpha_1\, d\alpha_2^2 \frac{d^2\frac{1}{h_1}}{d\alpha_2^2}.$$

En substituant dans l'équation (7) à h_1, h_2, et à leurs dérivées, les valeurs déduites de ces formules, elle devient, après la suppression du dénominateur $d\alpha_1 . d\alpha_2$,

$$\frac{d^2x}{y} + \frac{\delta^2 y}{x} - \frac{dx\, dy}{y^2} - \frac{\delta x\, \delta y}{x^2} = -xy,$$

c'est-à-dire,

$$x^2 y\, d^2x + y^2 x\, \delta^2 y - x^2\, dy\, dx - y^2\, \delta y\, \delta x = -x^3 y^3. \tag{8}$$

Les variables α_1, α_2, dont les accroissements ont déterminé la loi d'espacement des courbes qui forment les rectangles, étant arbitraires, cette loi est elle-même arbitraire; l'équation (8) exprime donc la loi la plus générale régissant les côtés des rectangles curvilignes infiniment petits, que l'on peut juxtaposer sur une sphère dont le rayon est pris pour unité.

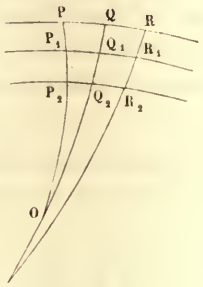
Si l'on veut changer d'unité et représenter par R le rayon de la sphère, x, y, dx, dy, d^2x, d^2y..., étant des lignes, doivent être divisées par R, et l'équation (8) devient

$$x^2 y\, d^2x + y^2 x\, \delta^2 y - x^2\, dy\, dx - y^2\, \delta y\, \delta x = -\frac{x^3 y^3}{\mathrm{R}^2}. \tag{9}$$

En la comparant à l'équation qui convient (514) aux rectangles juxtaposés sur un plan, on voit qu'elles sont incompatibles et qu'il est impossible par conséquent que deux surfaces, l'une plane, l'autre sphérique, soient recouvertes par les mêmes rectangles infiniment petits.

On en conclut aisément qu'une carte géographique plane doit nécessairement altérer les rapports entre les longueurs des lignes tracées sur la sphère que l'on veut y représenter.

561. L'équation (9) peut être aisément vérifiée dans le cas où les lignes de l'un des systèmes sont des grands cercles de la sphère. Deux lignes quelconques de l'autre système interceptent (553) sur les grands cercles auxquels elles sont nor-



males des longueurs égales; considérons, dans ce cas, trois rectangles contigus, dont les côtés figurent dans la formule, nous aurons

$$\begin{aligned} &PQ = x, && QR = x + \delta x, \\ &PP_1 = y, \ \delta y = 0, && \delta^2 y = 0, \ P_1P_2 = y + dy, \\ &P_1Q_1 = x + dx, && P_2Q_2 = x + 2dx + d^2x, \end{aligned}$$

et l'équation (9) devient

$$x^2 y\, d^2x - x^2 dy\, dx = -\frac{x^4 y^3}{R^2}. \tag{10}$$

Soient $R\theta$ la distance du point P à l'intersection des deux grands cercles, et $d\psi$ l'angle qu'ils font entre eux. On a évidemment

$$x = R \sin\theta\, d\psi,$$

et en remarquant que la différentielle d se rapporte à la seule variation de θ,

$$\begin{aligned} y &= R\, d\theta, \ dy = R\, d^2\theta, \\ dx &= R \cos\theta\, d\theta\, d\psi, \\ d^2x &= -R \sin\theta\, d\theta^2 d\psi + R \cos\theta\, d^2\theta\, d\psi, \end{aligned}$$

la substitution de ces valeurs rend l'équation (10) identique.

EXERCICES.

1. Toute courbe sphérique dont la courbure géodésique est constante est un cercle.

2. La développante sphérique d'un petit cercle tracé sur une sphère est une hélice, c'est-à-dire une courbe dont les tangentes forment un angle constant avec une droite fixe.

3. Si l'on nomme θ la distance d'un point d'une courbe sphérique à un pôle fixe situé sur la sphère, et p la distance de ce pôle à l'arc de grand cercle tangent, la courbure géodésique est exprimée par la formule

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d.\sin p}{\sin\theta . d\theta}.$$

4. En nommant ellipse sphérique la courbe tracée sur la sphère, et telle, que la somme des distances de chacun de ses points à deux points fixes soit constante, l'arc de grand cercle tangent à l'ellipse sphérique forme en chaque point des angles égaux avec les rayons vecteurs issus des foyers, et la courbure géodésique est proportionnelle au cube du sinus de ces angles.

5. La loxodromie est une courbe tracée sur la sphère, et qui coupe les méridiens issus d'un même point sous un angle constant; la courbure géodésique en chaque point est exprimée par la formule

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\sin V}{\operatorname{tang}\theta},$$

V étant l'angle constant formé par la loxodromie avec les méridiens, et θ la distance du point considéré au pôle par lequel passent tous les méridiens.

CHAPITRE III.

PLAN OSCULATEUR D'UNE COURBE A DOUBLE COURBURE.

Définition du plan osculateur.

562. Une ligne dont tous les points ne sont pas situés dans un même plan se nomme courbe à double courbure; elle a, en chaque point, une tangente qui, dans le voisinage du point de contact, s'en écarte infiniment moins que toute autre droite partant du même point. En portant son attention sur cette propriété caractéristique de la tangente, on est conduit à se demander si, parmi tous les plans qui passent par un point donné d'une courbe, il en est un qui s'écarte d'elle infiniment moins que tous les autres. Ce plan existe toujours; on le nomme plan osculateur de la courbe au point considéré.

Soient en effet M un point quelconque d'une courbe à double courbure, et M′ un point infiniment voisin pris sur la même courbe. Si nous regardons MM′ comme infiniment petit du premier ordre, il est aisé de voir que la distance du point M′ à tout plan passant par le point M, et qui ne contient pas la tangente, est infiniment petite du premier ordre. Un tel plan forme en effet avec MM′ un angle fini, et sa distance au point M′, égale au produit de MM′ par le sinus de cet angle fini, est évidemment de même ordre que MM′.

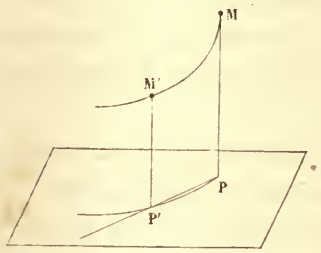
Lorsque le plan considéré contient la tangente MT en M, il forme avec MM′ un angle infiniment petit, et sa distance au point M′ est infiniment petite par rapport

à MM′, et elle est, en général, du second ordre; on sait en effet (10) que la distance du point M′ à la tangente MT est du second ordre, et la distance du même point M′ à un plan passant par MT est égale au produit de cette perpendiculaire M′P par le sinus de l'angle formé par le plan avec la ligne M′P; elle est donc du second ordre comme M′P, toutes les fois que le plan considéré forme avec cette ligne un angle fini, et pour qu'elle soit d'un ordre supérieur au second, il faut que le plan forme avec M′P un angle infiniment petit, et qu'il soit, par conséquent, la limite du plan passant par la tangente MT et par le point M′.

Le plan osculateur en un point M est, d'après ce qui précède, la limite du plan qui passe par la tangente en M, et par un point M′ de la courbe, infiniment voisin de M. On peut dire plus brièvement et tout aussi correctement : le plan osculateur d'une courbe, en un point, est le plan qui passe par la tangente et par le point infiniment voisin de la courbe. Un point infiniment voisin de M est, en effet (13), un point mobile qui se rapproche indéfiniment du point M, et le plan qui le contient est la limite du plan qui passe par un point de plus en plus rapproché.

563. Le plan osculateur en un point d'une courbe peut être considéré comme la limite du plan mené par la tangente en ce point, parallèlement à la tangente infiniment voisine.

Pour démontrer l'accord de cette définition avec la précédente, projetons la courbe sur un plan perpendiculaire à la tangente au point considéré M : soient P la



projection du point M, P′ celle du point M′. La trace du plan mené par la tangente en M et par le point M′ est PP′, celle du plan mené par MP parallèlement à la tangente en M′ passe par le point P, et est parallèle à la projection de cette tangente, c'est-à-dire à la tangente de la courbe PP′ au point P′ ; ces deux traces ont évidemment pour limite commune la tangente en P à la courbe PP′, et les deux définitions du plan osculateur sont par conséquent d'accord.

La démonstration précédente pourrait conduire, très-naturellement, à une conséquence inexacte qu'il importe de signaler, pour montrer avec quelle réserve on doit procéder dans l'étude des questions relatives à l'ordre des infiniment petits. L'arc MM′ de la figure précédente étant considéré comme du premier ordre, l'arc PP′ de la projection est du second ordre, et comme, en général, la distance de l'extrémité d'un arc infiniment petit à la tangente menée par l'autre extrémité est de même ordre que le carré de cet arc, la distance du point P′ à la tangente en P de la courbe PP′ semble devoir être du quatrième ordre. Cette distance étant évidemment celle du point M′ au plan osculateur en M, nous sommes conduits à admettre que le plan osculateur en un point M est à distance infiniment petite du quatrième ordre du point M′ infiniment voisin de M et situé sur la courbe ; mais cette conclusion est inexacte, la distance du point M′ au plan osculateur en M est du troisième ordre

seulement, comme il sera démontré plus loin. Le raisonnement qui lui assigne une valeur du quatrième ordre manque de rigueur, parce qu'on applique au point P de la courbe PP′ la règle générale relative à un point quelconque d'une courbe, tandis que ce point est un point singulier où la courbe présente évidemment un rebroussement et a une courbure infinie.

564. En ne tenant pas compte de la possibilité des cas exceptionnels, on serait également conduit par la figure précédente à une conclusion erronée, relativement à la distance de deux tangentes infiniment voisines.

La plus courte distance des tangentes en M et en M′ est égale en effet à la distance du point P à la tangente en P′ de la courbe PP′. Cette distance semble devoir être de même ordre que le carré de PP′, c'est-à-dire du quatrième ordre. Il n'en est rien pourtant; elle est, ainsi que nous le verrons, du troisième ordre, et le raisonnement manque de rigueur, comme le précédent, parce que le point P est dans la courbe PP′ un point singulier où la courbure est infinie.

565. On définit quelquefois le plan osculateur d'une courbe comme contenant trois points infiniment voisins de la courbe. Nous allons montrer l'accord de cette définition avec les deux précédentes.

Soient M, M′, M″ trois points infiniment voisins d'une courbe, dont nous regarderons les distances comme des infiniment petits du premier ordre; il faut prouver

que le plan qui passe par ces trois points a même limite que celui qui contient la tangente MT en M, et le point M′. Les deux plans se coupent en effet suivant MM′, et s'ils formaient un angle fini, le point M″ étant situé sur l'un d'eux à distance infiniment petite du second ordre de l'intersection, serait à distance infiniment petite du second ordre de l'autre; or, c'est ce qui n'a pas lieu, car la distance du point M″ au plan osculateur en M est d'ordre supérieur au second, et si l'on fait tourner ce plan osculateur d'un angle infiniment petit autour de MT, pour le faire coïncider avec TMM′, la variation de la distance à M″ est évidemment d'ordre supérieur au second. Il est donc impossible que les plans TMM′, MM′M″ forment un angle fini; ils se confondent par conséquent à la limite.

566. Lorsque, dans l'étude d'une figure, on veut porter son attention sur les directions des lignes droites qui s'y trouvent, sans avoir égard à leur position absolue dans l'espace, il est commode de leur substituer des parallèles menées par un

point arbitraire de l'espace; pour étudier le faisceau formé par ces parallèles, on peut ensuite les couper par une sphère de rayon unité, ayant son sommet pour centre; à chaque direction correspond de cette manière un point de la sphère. Les droites parallèles à un même plan correspondent aux divers points d'un grand cercle que l'on peut considérer comme représentant ce plan, en même temps, bien entendu, que tout autre plan parallèle.

Si l'on applique ce mode de représentation, souvent adopté par Gauss, aux tangentes d'une courbe à double courbure, chacune d'elles sera représentée sur la sphère par un point, et la courbe continue, lieu de ces points, a été nommée par M. Paul Serret l'indicatrice sphérique de la proposée.

L'indicatrice sphérique faisant connaître les directions des tangentes, sans rien apprendre sur leur position absolue, elle ne suffit pas pour déterminer la courbe qui lui correspond. Ainsi, par exemple, si l'indicatrice sphérique d'une courbe est un grand cercle, la courbe correspondante est une courbe plane quelconque ayant son plan parallèle à celui de ce grand cercle. La considération de l'indicatrice est par conséquent insuffisante à l'étude complète d'une courbe, mais elle peut, comme nous allons en donner des exemples, simplifier notablement la démonstration de plusieurs théorèmes importants.

Il est facile de voir, d'abord, que l'indicatrice sphérique d'une courbe peut servir à déterminer les plans osculateurs de celle-ci. Le plan osculateur est, en effet, la limite du plan parallèle à deux tangentes infiniment voisines, et celui-ci étant, évidemment, parallèle au plan du grand cercle qui réunit les points de l'indicatrice correspondant à ces tangentes, il a pour limite un plan parallèle à celui du grand cercle tangent à l'indicatrice sphérique.

Les plans osculateurs d'une courbe sont donc parallèles aux plans des grands cercles tangents à l'indicatrice sphérique.

L'angle de deux plans osculateurs menés en des points infiniment voisins est, d'après cela, la courbure de l'arc infiniment petit d'indicatrice sphérique correspondant (545). On en conclut qu'en négligeant les infiniment petits du second ordre, cet angle est double de l'angle formé par l'un des plans osculateurs avec le plan mené par l'une des tangentes et parallèlement à l'autre.

Soit, en effet, PP′ un arc infiniment petit d'indicatrice sphérique, le grand cercle PP′ qui lui sert de corde a son plan parallèle aux deux tangentes de la proposée qui correspondent aux points P et P′, et les angles qu'il forme avec les grands cercles tangents en P et en P′ sont (548) moitiés de l'angle formé par ces deux grands cercles.

567. Le plan osculateur d'une courbe forme avec la tangente au point infiniment voisin, un angle infiniment petit du second ordre.

La considération de l'indicatrice sphérique rend ce théorème pour ainsi dire évident. L'angle d'une droite et d'un plan est en effet la distance du point de la sphère qui représente la droite, au grand cercle qui représente le plan, et le théorème énoncé revient à dire, par conséquent, que le grand cercle tangent en un point de l'indicatrice sphérique est à distance infiniment petite du second ordre du point infiniment voisin de l'indicatrice.

568. Il résulte évidemment du théorème précédent que l'intersection d'un plan osculateur avec une tangente infiniment voisine est, à la limite, le point de contact de la tangente; considérons, en effet, le plan osculateur en un point M, et la tangente au point M′ infiniment voisine de M; MM′ étant du premier ordre, la distance M′P du point M′ au plan osculateur en M est un infiniment petit d'ordre supérieur au second. Or en nommant θ l'angle de cette tangente avec le plan osculateur, la distance au point M′, de son intersection avec ce plan, est égale à $\frac{M'P}{\sin\theta}$, et, par conséquent, infiniment petite, puisque θ est du second ordre.

569. La tangente d'une courbe à double courbure est la limite de l'intersection de deux plans osculateurs infiniment voisins.

Chaque plan osculateur étant en effet représenté sur la sphère par un grand cercle tangent à l'indicatrice sphérique, l'intersection de deux plans osculateurs infiniment voisins est représentée par l'intersection de deux grands cercles tangents en deux points infiniment voisins de l'indicatrice, c'est-à-dire, à la limite, par le point même de l'indicatrice. L'intersection des deux plans osculateurs a donc pour direction limite celle de la tangente de la courbe, et comme elle passe par le point d'intersection de l'un des plans avec la tangente contenue dans l'autre, qui d'après le paragraphe précédent se confond à la limite avec le point de contact de celle-ci, la tangente et l'intersection limite des plans osculateurs, sont des droites parallèles qui ont un point commun, et qui, par conséquent, se confondent.

570. Chaque point d'une courbe à double courbure est la limite de l'intersection de trois plans osculateurs infiniment voisins.

Il semble, au premier abord, que ce théorème peut être considéré comme une conséquence immédiate des deux précédents.

L'intersection de trois plans osculateurs infiniment voisins peut être en effet considérée comme l'intersection de l'un d'entre eux avec la droite d'intersection des deux autres, qui (569) est une tangente à la courbe, et dont l'intersection avec le plan osculateur voisin se confond, à la limite, avec son point de contact.

Mais un tel raisonnement manque absolument de rigueur.

L'intersection de deux plans osculateurs n'est pas, en effet, une tangente à la

courbe, mais une droite qui a pour limite la tangente; lors donc que, dans le raisonnement précédent, nous considérons l'intersection de deux plans osculateurs comme tangente à la courbe, nous la remplaçons par sa limite, en lui faisant subir un déplacement infiniment petit. Or quand il s'agit de déterminer l'intersection de deux droites infiniment voisines, un changement infiniment petit dans la position de l'une d'elles peut déplacer d'une quantité finie, ou quelquefois même faire disparaître entièrement son intersection avec l'autre.

Il faut donc démontrer directement que l'intersection de trois plans osculateurs infiniment voisins est un point de la courbe.

La considération de l'indicatrice sphérique montre, tout d'abord, que l'intersection de deux d'entre eux forme avec le troisième un angle infiniment petit du second ordre. Cela revient à dire, en effet, que trois grands cercles touchant l'indicatrice sphérique en des points infiniment voisins, l'intersection de deux d'entre eux est à distance infiniment petite du second ordre du troisième.

Lorsqu'une droite forme avec un plan un angle infiniment petit du second ordre, un point de cette droite dont la distance au plan est infiniment petit d'ordre supérieur au second est, nécessairement, à une distance infiniment petite de l'intersection de la droite et du plan. Or le point commun aux trois plans osculateurs est l'intersection du troisième de ces plans avec la droite suivant laquelle se coupent les deux premiers; si donc nous trouvons sur cette droite un point dont la distance au troisième plan osculateur soit infiniment petite du troisième ordre, il sera infiniment voisin du point commun aux trois plans osculateurs avec lequel il se confondra à la limite. L'intersection du premier plan osculateur avec la tangente contenue dans le second est précisément un point qui remplit cette condition. Il appartient en effet à l'intersection des deux premiers plans osculateurs, et la distance au troisième est un infiniment petit d'ordre supérieur au second, parce que ce point est situé sur la tangente qui le contient à distance infiniment petite du point de contact, et par conséquent aussi à une distance infiniment petite de son intersection avec le troisième plan osculateur qui forme avec elle un angle infiniment petit du second ordre. Ce point, qui se confond à la limite avec l'intersection des trois plans osculateurs, se confond aussi, évidemment, avec le point où ils touchent la courbe, et la coïncidence de ces points, à la limite, se trouve ainsi démontrée.

Surface enveloppe des plans osculateurs.

571. Les plans osculateurs d'une courbe à double courbure enveloppent une surface développable qui est le lieu de leurs intersections successives, et comme, d'après les théorèmes précédents, l'intersection de deux plans osculateurs infini-

ment voisins est une tangente, nous pouvons conclure que le lieu des tangentes à une courbe à double courbure est une surface développable, dont les plans tangents sont les plans osculateurs de celle-ci.

Lorsque des droites se succèdent dans l'espace suivant une loi continue, elles forment en général une surface réglée qui n'est pas développable, et dont le plan tangent n'est pas le même tout le long d'une génératrice. Il résulte de ce qui précède que de telles droites ne sont pas, en général, tangentes à une même courbe, et n'ont pas de courbe enveloppe. Il y a donc une condition nécessaire pour que des droites qui se succèdent suivant une loi donnée soient tangentes à une même courbe, et nous devons étudier cette condition qui est de grande importance.

La géométrie nous apprend, tout d'abord, que si des droites sont tangentes à une même courbe, la plus courte distance de chacune d'elles à la droite infiniment voisine est un infiniment petit d'ordre supérieur au premier, l'infiniment petit du premier ordre étant, bien entendu, la variation du paramètre dont la valeur définit chaque droite.

Si, en effet, les droites sont tangentes à une même courbe, le point de contact de l'une d'elles avec la courbe a, pour chaque valeur de paramètre en question, une position déterminée. La distance de deux points de contact infiniment voisins est donc de même ordre (4) que la différence des paramètres correspondants, c'est-à-dire du premier ordre, et la plus courte distance de deux tangentes, plus petite que la distance de l'une d'elles au point de contact de l'autre, est, évidemment, infiniment petite par rapport à la distance de leurs points de contact, et, par conséquent, d'ordre supérieur au premier.

Réciproquement, pour que des droites soient tangentes à une même courbe, il suffit que la plus courte distance de chacune d'elles à la droite infiniment voisine soit un infiniment petit d'ordre supérieur au premier. Considérons, en effet, sur chaque droite, le point où se mesure sa plus courte distance avec la droite infiniment voisine: le lieu de ces points est une courbe, et la distance de deux d'entre eux, O et O′, situés sur des droites infiniment voisines, A et A′, est de même ordre (4) que la différence des paramètres relatifs à ces droites, c'est-à-dire du premier. Cette distance est par conséquent infiniment grande par rapport à la perpendiculaire abaissée de l'un de ces points sur la droite qui passe par l'autre, car, par hypothèse, cette perpendiculaire mesure la plus courte distance qui est infiniment petite d'ordre supérieur au premier. Il en résulte que la droite OO′ forme des angles infiniment petits avec chacune des droites A et A′, et ces droites sont, par conséquent, tangentes à la courbe lieu des points O et O′.

572. Lorsque des droites sont données par leurs équations, on peut exprimer facilement, sans faire intervenir l'expression de leur plus courte distance, qu'elles sont tangentes à une même courbe.

Soient

$$(1)\qquad \begin{aligned} x &= az + p, \\ y &= bz + q \end{aligned}$$

les équations d'une droite mobile, a, b, p, q étant des fonctions données d'un même paramètre α; si cette droite est constamment tangente à une courbe, les coordonnées du point de contact étant désignées par x, y, z, devront satisfaire, non-seulement aux équations (1), mais encore à celles de la droite infiniment voisine, si l'on y néglige les infiniment petits d'ordre supérieur au second. Une tangente passe, en effet, à distance infiniment petite du second ordre du point de contact de la tangente infiniment voisine. On a donc

$$(2)\qquad \begin{aligned} x &= (a + da)\, z + p + dp, \\ y &= (b + db)\, z + q + dq, \end{aligned}$$

et par conséquent, à cause des équations (1),

$$(3)\qquad \begin{aligned} 0 &= z\,da + dp, \\ 0 &= z\,db + dq. \end{aligned}$$

Il semble que les équations (3), d'après la manière dont elles sont démontrées, ne doivent être satisfaites qu'à la condition de négliger les infiniment petits d'ordre supérieur au premier, mais cela ne peut avoir lieu sans qu'elles soient rigoureusement exactes. a, b, p, q, étant, en effet, des fonctions du paramètre α, da, db, dp, dq, sont proportionnels à $d\alpha$, et, en supprimant ce facteur, on obtiendra des équations entre quantités finies dont les deux membres ne peuvent différer infiniment peu sans être rigoureusement égaux.

Les équations (3), pour être compatibles, exigent

$$(4)\qquad \frac{da}{db} = \frac{dp}{dq}.$$

Si cette condition est remplie, on peut satisfaire aux équations (1) et (3), et trouver, sur chaque droite, un point dont la distance à la droite voisine soit infiniment petite d'ordre supérieur au premier. Le lieu de ces points est évidemment une courbe tangente à toutes les droites données.

573. Il suffit, d'après ce qui précède, que, dans un système de droites, la plus courte distance de deux droites voisines soit infiniment petite d'ordre supérieur au premier, pour que les droites soient tangentes à une même courbe; mais on doit à M. Bouquet la remarque curieuse que cette plus courte distance est toujours précisément du troisième ordre, et qu'il est impossible qu'elle soit du second.

Les équations de deux droites voisines étant, en effet,

$$\begin{aligned} x &= az + p, \\ y &= bz + q, \\ x &= (a + \Delta a)\, z + p + \Delta p, \\ y &= (b + \Delta b)\, z + q + \Delta q, \end{aligned}$$

leur plus courte distance est, d'après les formules de la géométrie analytique,

$$(1) \qquad \frac{\Delta a \Delta q - \Delta b \Delta p}{\sqrt{(\Delta a)^2 + (\Delta b)^2 + (a \Delta q - b \Delta p)^2}};$$

le dénominateur est toujours du premier ordre, le numérateur, *en général*, du second, et par conséquent la plus courte distance est, en général, du premier ordre, et il n'existe pas de courbe à laquelle soient tangentes les droites données.

Mais le numérateur de la plus courte distance peut, dans certains cas, être infiniment petit d'ordre supérieur au premier, et les droites sont alors tangentes à une même courbe. Nous allons prouver que, dans ce cas, il est précisément du quatrième ordre, et que, par suite, la plus courte distance est du troisième.

On a en effet (276)

$$\Delta a = da + \frac{1}{2} d^2 a + \frac{1}{6} d^3 a + \dots,$$

$$\Delta b = db + \frac{1}{2} d^2 b + \frac{1}{6} d^3 b + \dots,$$

$$\Delta p = dp + \frac{1}{2} d^2 p + \frac{1}{6} d^3 p + \dots,$$

$$\Delta q = dq + \frac{1}{2} d^2 q + \frac{1}{6} d^3 q + \dots,$$

et par conséquent,

$$\Delta a \Delta q - \Delta b \Delta p = (da\, dq - db\, dp) + \frac{1}{2} (d^2 a\, dq + d^2 q\, da - d^2 b\, dp - d^2 p\, db) + \dots,$$

les termes que l'on n'écrit pas étant d'ordre supérieur au troisième; or il est clair que le second terme du second membre est la différentielle du premier. Si donc celui-ci est nul, l'autre l'est également, et il ne reste dans l'expression du premier membre que des termes du quatrième ordre au moins. Il est aisé de prouver en outre que le terme du quatrième ordre ne disparaît jamais, si ce n'est dans le cas des courbes planes, où la plus courte distance de deux tangentes est rigoureusement nulle; les termes du quatrième ordre sont, en effet,

$$\frac{1}{6} (d^3 a\, dq + d^3 q\, da - d^3 b\, dp - d^3 p\, db) + \frac{1}{4} (d^2 a\, d^2 q - d^2 b\, d^2 p).$$

Supposons que leur somme soit égale à zéro; on a, par hypothèse,

$$d^2a\,dq + d^2q\,da - d^2b\,dp - d^2p\,db = 0, \tag{2}$$

qui donne par la différentiation,

$$d^3a\,dq + d^3q\,da - d^3b\,dp - d^3p\,db = 2\,d^2b\,d^2p - 2\,d^2a\,d^2q. \tag{3}$$

D'après cela, la condition pour que la somme des termes du quatrième ordre soit nulle est

$$d^2a\,d^2q - d^2b\,d^2p = 0,$$

ou

$$\frac{d^2p}{d^2a} = \frac{d^2q}{d^2b}. \tag{4}$$

Cette équation exprime que la courbe est plane. Les équations (3) (**572**) donnent en effet par la différentiation

$$d^2p = -z\,d^2a - da\,dz,$$
$$d^2q = -z\,d^2b - db\,dz,$$

et l'équation (4) devient ainsi

$$\frac{d^2a}{da} = \frac{d^2b}{db},$$

ou

$$d.l\,da = dl\,db,$$

lda et ldb ont par conséquent une différence constante, et le rapport $\frac{da}{db}$ est constant. En le désignant par k, on a

$$da = k\,db,$$

donc

$$a = kb + l, \tag{5}$$

l étant une constante.

Cette équation exprime que les droites sont parallèles à un même plan, et il est clair qu'elles ne peuvent alors être tangentes à une courbe que si elles sont situées dans un seul et même plan. C'est ce que l'on peut d'ailleurs prouver analytiquement en remarquant que dx, dy et dz sont proportionnels à a, b et 1, et que l'on a par conséquent

$$dx = k\,dy + l\,dz, \tag{6}$$

d'où l'on déduit

$$x = ky + lz + \mathrm{N}, \tag{7}$$

N désignant une constante. L'équation (7) représente un plan dans lequel est située la courbe, lieu des points x, y, z.

Équation du plan osculateur.

374. Les équations d'une courbe étant connues, il est facile de trouver celle du plan osculateur en un de ses points. Soient x, y, z, les coordonnées du point considéré; t, u, v, celles d'un point quelconque du plan osculateur: celui-ci, passant par le point x, y, z, a une équation de la forme

$$\text{(1)} \qquad A(t-x)+B(u-y)+C(v-z)=0.$$

Pour déterminer A, B, C, exprimons que la distance de ce plan au point M′ de la courbe infiniment voisin de M, est un infiniment petit du troisième ordre; en nommant $x+\Delta x$, $y+\Delta y$, $z+\Delta z$ les coordonnées de ce point M′, sa distance au plan a pour expression

$$\frac{A\Delta x + B\Delta y + C\Delta z}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

et comme A, B, C sont des quantités finies, il suffit d'exprimer que le numérateur est nul quand on néglige les infiniment petits d'ordre supérieur au second. On a, dans cette hypothèse (276),

$$\text{(2)} \qquad \begin{aligned} \Delta x &= dx + \frac{1}{2}d^2x, \\ \Delta y &= dy + \frac{1}{2}d^2y, \\ \Delta z &= dz + \frac{1}{2}d^2z. \end{aligned}$$

On doit donc avoir, pour que les termes du premier ordre disparaissent,

$$\text{(3)} \qquad A\,dx + B\,dy + C\,dz = 0,$$

et pour qu'il en soit de même de ceux du second,

$$\text{(4)} \qquad A\,d^2x + B\,d^2y + C\,d^2z = 0.$$

On déduit des équations (3) et (4)

$$\text{(5)} \qquad \frac{A}{dy\,d^2z - dz\,d^2y} = \frac{B}{dz\,d^2x - dx\,d^2z} = \frac{C}{dx\,d^2y - dy\,d^2x}.$$

A, B, C peuvent être remplacés dans l'équation (1) par les expressions auxquelles

ils sont proportionnels, et l'équation du plan osculateur est, par conséquent,

$$(6)\quad (t-x)(dy\,d^2z-dz\,d^2y)+(u-y)(dz\,d^2x-dx\,d^2z)+(v-z)(dx\,d^2y-dy\,d^2x)=0.$$

Le choix de la variable indépendante, qui reste arbitraire, exerce évidemment une influence sur les termes de cette formule, mais sans rien changer toutefois au résultat final.

575. Pour donner une application de la formule précédente, nous chercherons le plan osculateur de l'arête de rebroussement d'une surface développable donnée : nous savons (**571**) que ce plan est précisément le plan tangent de la surface, et ce résultat connu, obtenu de nouveau à l'aide de nos formules, leur servira de confirmation.

Soit

$$(1)\qquad x\varphi(\alpha)+y\psi(\alpha)+z\,\mathrm{F}(\alpha)=\varpi(\alpha)$$

l'équation d'un plan mobile dans laquelle α désigne un paramètre variable; la surface développable, enveloppe de ce plan, est représentée par l'équation (1) combinée avec sa dérivée par rapport à α,

$$(2)\qquad x\varphi'(\alpha)+y\psi'(\alpha)+z\,\mathrm{F}'(\alpha)=\varpi'(\alpha),$$

et l'arête de rebroussement de la surface par les deux équations (1) et (2) auxquelles on adjoint l'équation

$$(3)\qquad x\varphi''(\alpha)+y\psi''(\alpha)+z\,\mathrm{F}''(\alpha)=\varpi''(\alpha),$$

dérivée de la seconde par rapport à α.

Pour trouver le plan osculateur de la courbe représentée par les équations (1), (2), (3), il faut déduire de ces équations, dx, dy, dz, d^2x, d^2y, d^2z, afin de les substituer dans l'équation du plan osculateur. En différentiant deux fois l'équation (1), les termes qui proviennent de la variation de α disparaissent à cause des équations (2) et (3), et l'on a

$$dx\varphi(\alpha)+dy\psi(\alpha)+dz\,\mathrm{F}(\alpha)=0,$$
$$d^2x\varphi(\alpha)+d^2y\psi(\alpha)+d^2z\,\mathrm{F}(\alpha)=0;$$

on en conclut

$$\frac{dx\,d^2y-dy\,d^2x}{\mathrm{F}(\alpha)}=\frac{dy\,d^2z-dz\,d^2y}{\varphi(\alpha)}=\frac{dz\,d^2x-dx\,d^2z}{\psi(\alpha)},$$

et l'équation du plan osculateur est par conséquent

$$(t-x)\mathrm{F}(\alpha)+(u-y)\varphi(\alpha)+(v-z)\psi(\alpha)=0,$$

c'est-à-dire à cause de (1),

$$tF(\alpha)+u\varphi(\alpha)+v\psi(\alpha)=\varpi(\alpha):$$

c'est précisément ce que nous devions trouver.

576. Cherchons, pour seconde application, le plan osculateur d'une hélice. Nous entendons par *hélice* une courbe tracée sur un cylindre et qui, dans le développement de celui-ci, se transforme en une ligne droite. Quelle que soit la section droite du cylindre, elle se transforme dans le développement en une ligne droite à laquelle toutes les génératrices sont perpendiculaires, et le point de départ de l'hélice étant pris sur cette section droite, les coordonnées de la transformée, comptées sur les génératrices, seront évidemment proportionnelles aux abscisses comptées sur la section droite, c'est-à-dire aux arcs de celle-ci, qui se terminent à leur pied. Si donc on nomme s l'arc de section droite, et que les coordonnées x et y de ses points, par rapport à deux axes pris dans son plan, soient exprimées par les équations

$$\begin{aligned} x&=\varphi(s),\\ y&=\psi(s), \end{aligned} \tag{1}$$

en prenant l'axe des z parallèle aux génératrices du cylindre, et nommant z l'ordonnée du point de l'hélice projeté sur le point x, y de la section droite, on aura

$$z=ms, \tag{2}$$

m étant une constante égale à la cotangente de l'angle sous lequel l'hélice coupe les génératrices. Les fonctions φ et ψ ne sont pas quelconques, on doit avoir

$$dx^2+dy^2=ds^2, \tag{3}$$

et par conséquent

$$\varphi'(s)^2+\psi'(s)^2=1. \tag{4}$$

Si l'on prend s pour variable indépendante, les équations (1) et (2) permettent de former immédiatement les coefficients de l'équation du plan osculateur. On a

$$\begin{aligned} dx&=\varphi'(s)\,ds,\\ dy&=\psi'(s)\,ds,\\ dz&=m\,ds,\\ d^2x&=\varphi''(s)\,ds^2,\\ d^2y&=\psi''(s)\,ds^2,\\ d^2z&=0, \end{aligned} \tag{5}$$

et l'équation du plan osculateur est par conséquent, en supprimant le facteur ds^3,

$$(t-x)\,m\psi''(s)-(u-y)\,m\varphi''(s)+(v-z)[\psi'(s)\varphi''(s)-\varphi'(s)\psi''(s)]=0. \tag{6}$$

Il est aisé de voir que ce plan contient la normale au cylindre et coupe par conséquent celui-ci à angle droit. La normale du cylindre est parallèle en effet à la normale correspondante de la section droite, et forme par conséquent avec les axes des angles dont les cosinus sont proportionnels à

$$-\psi'(s), \quad \varphi'(s), \quad \text{et} \quad 0;$$

les cosinus des angles formés avec les mêmes axes par la normale au plan représenté par l'équation (6), sont

$$\psi''(s), \quad -\varphi''(s), \quad [\psi'(s)\varphi''(s) - \varphi'(s)\psi''(s)],$$

et la condition de perpendicularité,

$$\psi'(s)\psi''(s) + \varphi'(s)\varphi''(s) = 0,$$

est une conséquence évidente de l'équation (4).

577. Des considérations géométriques conduisent aisément à la même conclusion. Les tangentes de l'hélice faisant un angle constant avec les génératrices du cylindre, leurs parallèles menées par un même point forment un cône de révolution, et l'indicatrice sphérique d'une hélice, quelle que soit la base du cylindre sur lequel elle est tracée, est un petit cercle de la sphère. Les plans osculateurs sont parallèles (566) à ceux des grands cercles tangents à l'indicatrice, et par conséquent aux plans tangents du cône de révolution dont ce petit cercle est la base, et qui a pour sommet le centre de la sphère. Or le plan tangent à un cône de révolution est perpendiculaire au plan méridien passant par l'axe du cône et par la génératrice correspondante, et par suite au plan passant par la génératrice du cylindre, parallèle à l'axe du cône, et par la tangente à l'hélice parallèle à la génératrice du cône, c'est-à-dire enfin, au plan tangent au cylindre; le plan osculateur, étant perpendiculaire au plan tangent du cylindre, contient la normale de celui-ci.

CHAPITRE IV.

LES DEUX COURBURES D'UNE COURBE, LE CERCLE OSCULATEUR ET LA SPHÈRE OSCULATRICE.

Définition de la courbure.

578. La courbure d'un arc de courbe est l'angle des tangentes extrêmes. La courbure moyenne est le rapport de la courbure totale à la longueur de l'arc, et la courbure, en un point, est la courbure moyenne d'un arc infiniment petit compté sur la courbe à partir de ce point. Ces définitions sont absolument les mêmes que pour les courbes planes; on doit remarquer seulement que, dans le cas de la courbe à double courbure, les tangentes extrêmes d'un arc ne se rencontrent pas, et que leur angle est l'angle formé par deux droites parallèles à leurs directions et menées par un point quelconque de l'espace. L'angle infiniment petit de deux tangentes infiniment voisines se nomme angle de contingence, comme dans le cas des courbes planes, et la courbure est le rapport de l'angle de contingence à l'arc infiniment petit qui lui correspond. L'angle étant un nombre abstrait, la courbure peut être représentée par l'inverse d'une ligne $\frac{1}{\rho}$: cette ligne ρ est le rayon du cercle dont la courbure est égale à celle de la courbe au point considéré : on le nomme rayon de courbure.

579. Lorsqu'une droite se déplace suivant une loi quelconque, et de telle manière que chacune de ses positions corresponde à une valeur attribuée à un paramètre variable, l'angle de deux positions infiniment voisines (6) est de même ordre que la variation de ce paramètre. Si la droite considérée est la tangente à une courbe, les coordonnées du point de contact peuvent évidemment s'exprimer en fonction du paramètre qui la détermine, et la distance de deux points de contact infiniment voisins est, par conséquent, de même ordre que les variations de ce paramètre. L'angle des tangentes et la distance de leurs points de contact sont, d'après cela, des infiniment petits de même ordre, et la courbure, qui est leur rapport, a en chaque point une valeur finie. Les points pour lesquels elle est nulle ou infinie sont exceptionnels, et ne peuvent jamais former un arc continu. Une ligne dont la courbure est nulle en chaque point est droite, et il est impossible que la courbure soit infinie en chaque point d'une ligne sans que celle-ci se réduise à un point.

Définition de la seconde courbure.

580. Le rapport de l'angle de deux plans osculateurs infiniment voisins à l'arc qui sépare leurs points de contact se nomme seconde courbure d'une courbe à double courbure. De même que la première courbure indique le plus ou moins de différence avec la forme rectiligne, la seconde courbure indique, pour ainsi dire, par la variation plus ou moins rapide du plan osculateur, la rapidité avec laquelle la courbe s'éloigne d'être plane.

Lorsqu'un plan se déplace suivant une loi quelconque, et de telle manière que chacune de ses positions corresponde à une valeur attribuée à un paramètre variable, l'angle de deux positions infiniment voisines est de même ordre que la variation de ce paramètre. Ce théorème, démontré pour une droite (6), s'applique évidemment au plan qui lui est perpendiculaire, et dont deux positions quelconques font un angle égal à celui de leurs deux normales. Si le plan considéré est le plan osculateur à une courbe, les coordonnées du point de contact sont évidemment des fonctions déterminées du paramètre qui détermine le plan, et la distance de deux points de contact infiniment voisins est par conséquent de même ordre que la variation du paramètre. L'angle de deux plans osculateurs infiniment voisins est, d'après cela, de même ordre que la distance de leurs points de contact, et la seconde courbure a, en chaque point, une valeur finie. Les points pour lesquels elle est nulle ou infinie sont exceptionnels et ne peuvent former un arc continu que dans le cas d'une courbe plane dont les plans osculateurs se confondent, ou d'une ligne droite pour laquelle ils sont indéterminés.

Rapport des deux courbures.

581. Le rapport des deux courbures d'une courbe en un point est égal à la courbure géodésique de l'indicatrice sphérique. Soient, en effet, M et M′ deux points infiniment voisins d'une courbe à double courbure; P et P′ les points correspondants de son indicatrice sphérique (566). L'arc PP′ mesure l'angle de contingence formé par les tangentes aux points M et M′; les grands cercles qui touchent en P et P′ l'indicatrice sphérique ont (566) leurs plans parallèles aux plans osculateurs en M et M′, et leur angle est égal, par conséquent, à celui des plans osculateurs infiniment voisins de la courbe proposée. La courbure géodésique de la courbe indicatrice en P est le rapport de l'angle des deux grands cercles tangents en P et en P′ à l'arc qui sépare leurs points de contact, c'est-à-dire le rapport de l'angle formé par les plans osculateurs de la courbe proposée aux points M et M′, à l'angle de contingence formé par les tangentes aux mêmes points, et c'est évidemment le rapport de la seconde courbure à la première. Pour que le rapport des deux courbures d'une courbe soit constant, il faut que la courbure de l'indicatrice

sphérique soit constante; sa développée, dont un arc quelconque a une longueur nulle (553), se réduit alors à un point, et l'indicatrice est un petit cercle de la sphère. La condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est que toutes les tangentes à la courbe donnée fassent des angles égaux avec une droite fixe, et que celle-ci soit par conséquent une hélice tracée sur un cylindre dont les génératrices sont parallèles à la droite fixe.

Le rapport des deux courbures d'une hélice est donc constant, et cette propriété appartient exclusivement aux hélices tracées d'ailleurs sur un cylindre à base quelconque.

Cercle de courbure.

582. Le cercle de courbure d'une courbe en un point est un cercle situé dans le plan osculateur, touchant la courbe au point considéré, et ayant en ce point une courbure égale à la sienne, et de même sens.

On peut démontrer, d'après cette définition, que le cercle de courbure d'une courbe en un point est celui de la courbe plane, projection de la courbe donnée sur son plan osculateur en ce point. Lorsqu'on substitue, en effet, à une courbe sa projection sur son plan osculateur, les deux termes infiniment petits du rapport qui mesure la courbure subissent des variations infiniment petites d'ordre supérieur au premier, et par conséquent négligeables. Les parallèles à deux tangentes infiniment voisines et la projection de l'une d'elles sur le plan osculateur correspondant à l'autre, forment, en effet, un trièdre dans lequel la différence de deux faces est moindre que la troisième; or deux des faces sont ici les angles de contingence dont nous parlons, et la troisième est l'inclinaison d'une tangente sur le plan osculateur infiniment voisin, et par conséquent (567) du second ordre. On voit tout aussi facilement que la corde d'un arc infiniment petit, et celle de la projection de cet arc sur le plan osculateur à l'une de ses extrémités, ont une différence moindre que la distance de ce plan osculateur à l'autre extrémité de l'arc, et, par conséquent, du troisième ordre tout au plus; chaque arc différant de sa corde d'un infiniment petit du troisième ordre, on en conclut que la différence des arcs est aussi du troisième ordre.

La projection d'une courbe sur son plan osculateur en un point a donc, en ce point, même courbure, et par conséquent même cercle de courbure que celle-ci.

Cercle osculateur.

583. Le cercle de courbure d'une courbe à double courbure en est, en même temps, comme celui d'une courbe plane, le cercle osculateur, c'est-à-dire qu'il s'approche de la courbe, dans le voisinage du point de contact, infiniment plus que tout autre cercle passant par le même point.

Si l'on porte en effet sur une courbe, à partir de son point de contact M avec le cercle de courbure, un arc infiniment petit du premier ordre MM′, la distance du cercle à l'extrémité M′ de cet arc est infiniment petite du troisième ordre. Le cercle de courbure étant en effet, d'après ce que nous avons dit, cercle osculateur de la projection de la courbe sur le plan osculateur en M, sa distance à la projection du point M′ sur ce plan osculateur est du troisième ordre, et comme la distance du point M′ à sa projection est elle-même du troisième ordre, la distance au cercle est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les deux côtés sont du troisième ordre, et elle est, par conséquent, du même ordre qu'eux.

Aucun autre cercle tangent à la courbe en M ne peut partager avec le cercle de courbure la propriété de passer à distance infiniment petite d'ordre supérieur au second, du point infiniment voisin M′. Si en effet deux cercles différents, se touchant au point M, étaient tels que leur distance au point M′ fût pour tous deux supérieure au second ordre, la distance de ces deux cercles dans le voisinage de leur point de contact serait aussi d'ordre supérieur au second; or il est impossible qu'il en soit ainsi. Si en effet les deux cercles sont dans un même plan, leur contact ne peut être que du premier ordre, et leur distance est du second ordre seulement; s'ils sont dans des plans différents, ces plans se coupant sous un angle fini suivant la tangente commune, un point pris sur l'un d'eux à distance infiniment petite du premier ordre du point de contact est à distance infiniment petite du second ordre de la tangente qui sert d'intersection aux deux plans, et par suite aussi à distance infiniment petite du second ordre du plan qui contient le second cercle; sa distance à ce cercle est donc tout au plus du second ordre.

Le cercle dont la distance à une courbe, dans le voisinage d'un point donné, est infiniment petite du troisième ordre, est par conséquent unique. Il approche de la courbe infiniment plus qu'aucun autre, et reçoit, pour cette raison, le nom de cercle osculateur; il ne diffère pas, d'après ce qui précède, du cercle de courbure.

Calcul du rayon de courbure.

584. La courbure d'une courbe à double courbure a été définie (578) : c'est le rapport de l'angle formé par deux tangentes infiniment voisines à l'arc qui sépare leurs points de contact. Le rayon de courbure est le rayon d'un cercle ayant même courbure que la courbe au point considéré. La courbure est égale à l'unité divisée par le rayon de courbure.

Les équations d'une courbe étant données, il est facile de calculer, en chaque point, la courbure $\frac{1}{\rho}$. Pour cela nous chercherons d'abord l'expression de l'angle de contingence.

Soient α, β, γ, les angles formés avec les axes par la tangente en un point M, et $\alpha + d\alpha$, $\beta + d\beta$, $\gamma + d\gamma$, les angles analogues correspondants au point voisin M'. Menons, par l'origine O des coordonnées, des parallèles à ces deux directions, et portons sur chacune d'elles une longueur égale à l'unité. En joignant les extrémités T et T' de ces longueurs, on obtiendra un triangle isocèle OTT', dans lequel l'angle au sommet O est égal à l'angle de contingence ε, que nous voulons calculer, et l'on a, par conséquent,

$$TT' = 2 \sin \frac{1}{2} \varepsilon.$$

ε étant infiniment petit, le sinus peut être remplacé par l'arc, et la distance TT' est égale par conséquent à l'angle de contingence. Les coordonnées du point T sont $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, et celles du point T', égales à ces mêmes cosinus augmentés de leurs différentielles; on a, par conséquent,

$$\overline{TT'}^2 = (d\cos\alpha)^2 + (d\cos\beta)^2 + (d\cos\gamma)^2$$

et

$$\varepsilon = TT' = \sqrt{(d\cos\alpha)^2 + (d\cos\beta)^2 + (d\cos\gamma)^2}.$$

Cette expression est d'ailleurs applicable, évidemment, à l'angle formé par deux droites infiniment voisines quelconques, formant avec les axes des angles α, β, γ, $\alpha + d\alpha$, $\beta + d\beta$, $\gamma + d\gamma$.

La courbure $\frac{1}{\rho}$ est, par définition, le rapport de l'angle ε à l'arc infiniment petit correspondant ds, et l'on a par conséquent

$$\frac{1}{\rho^2} = \left(\frac{d\cos\alpha}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\cos\beta}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\cos\gamma}{ds}\right)^2. \tag{1}$$

Si l'on nomme x, y, z les coordonnées du point considéré sur la courbe, et s la longueur de l'arc compté à partir d'une origine fixe quelconque, les cosinus des angles formés par la tangente avec les axes ont pour expression,

$$\frac{dx}{ds}, \quad \frac{dy}{ds}, \quad \frac{dz}{ds},$$

et la formule (1) donne par conséquent

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{\left(d.\frac{dx}{ds}\right)^2}{ds^2} + \frac{\left(d.\frac{dy}{ds}\right)^2}{ds^2} + \frac{\left(d.\frac{dz}{ds}\right)^2}{ds^2}. \tag{2}$$

Si l'on prend l'arc s pour variable indépendante, on a

$$d.\frac{dx}{ds} = \frac{d^2x}{ds^2}, \quad d.\frac{dy}{ds} = \frac{d^2y}{ds^2}, \quad d.\frac{dz}{ds} = \frac{d^2z}{ds^2},$$

et par conséquent,

$$\frac{1}{\rho^2} = \left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2. \tag{3}$$

Si l'on veut laisser la variable indépendante indéterminée, il faut écrire

$$\frac{d.\frac{dx}{ds}}{ds} = \frac{ds\,d^2x - dx\,d^2s}{ds^3},$$

et par conséquent,

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{(ds\,d^2x - dx\,d^2s)^2 + (ds\,d^2y - dy\,d^2s)^2 + (ds\,d^2z - dz\,d^2s)^2}{ds^6}. \tag{4}$$

Cette expression peut se transformer à l'aide de l'équation

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2, \tag{5}$$

dont on déduit, par la différentiation,

$$dx\,d^2x + dy\,d^2y + dz\,d^2z = ds\,d^2s. \tag{6}$$

L'équation (4) peut s'écrire

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{ds^2[(d^2x)^2+(d^2y)^2+(d^2z)^2]+(d^2s)^2(dx^2+dy^2+dz^2)-2\,ds\,d^2s(dx\,d^2x+dy\,d^2y+dz\,d^2z)}{ds^6}, \tag{7}$$

et, à cause des équations (5) et (6),

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{(d^2x)^2+(d^2y)^2+(d^2z)^2-(d^2s)^2}{ds^4},$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{(dx^2+dy^2+dz^2)[(d^2x)^2+(d^2y)^2+(d^2z)^2]-(dx\,d^2x+dy\,d^2y+dz\,d^2z)^2}{ds^6},$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{(dy\,d^2z - dz\,d^2y)^2+(dz\,d^2x - dx\,d^2z)^2+(dx\,d^2y - dy\,d^2x)^2}{ds^6}. \tag{8}$$

585. La formule (3) peut s'interpréter d'une manière élégante. Soient x, y, z les coordonnées d'un point M de la courbe que nous regardons comme des fonctions de l'arc s, compté à partir d'une origine arbitraire. Le point voisin correspondant à l'arc $s+ds$ aura pour coordonnées, en négligeant les infiniment petits d'ordre

supérieur au second,

$$x+\frac{dx}{ds}\,ds+\frac{1}{2}\,\frac{d^2x}{ds^2}\,ds^2,$$

$$y+\frac{dy}{ds}\,ds+\frac{1}{2}\,\frac{d^2y}{ds^2}\,ds^2,$$

$$z+\frac{dz}{ds}\,ds+\frac{1}{2}\,\frac{d^2z}{ds^2}\,ds^2.$$

Si l'on porte sur la tangente en M, à partir du point M, une longueur MT égale

à ds, les coordonnées du point T sont, rigoureusement,

$$x+\frac{dx}{ds}\,ds,\quad y+\frac{dy}{ds}\,ds,\quad z+\frac{dz}{ds}\,ds,$$

et, par conséquent,

$$\overline{M'T}^2=\frac{1}{4}\,ds^4\left[\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2\right]; \tag{1}$$

on en conclut, d'après la formule (3) du paragraphe précédent,

$$\frac{1}{\rho}=\frac{2M'T}{ds^2}. \tag{2}$$

La différence entre l'arc infiniment petit MM′ et sa corde étant du troisième ordre, dans le triangle TMM′, la différence des côtés MT, M′M est du troisième ordre, et infiniment petite par conséquent, par rapport à la base M′T qui est du second. On en conclut bien aisément que l'angle M′TM diffère infiniment peu d'un droit, et que M′T peut être remplacé par la distance du point M′ à la tangente MT; on peut en même temps substituer à l'arc ds la ligne MM′, et l'équation (2) devient alors entièrement semblable à celle qui a été démontrée (499), pour les courbes planes.

586. Le même théorème peut être présenté sous une forme différente, dont nous aurons à faire usage. La distance de l'une des extrémités d'un arc infiniment petit s, à la tangente passant par l'autre extrémité, est représentée par $\frac{s^2}{2\rho}$, ρ désignant le rayon de courbure de l'arc.

Normale principale.

587. La normale qui, partant d'un point d'une courbe, passe par le centre du cercle osculateur se nomme *la normale principale*. Les équations d'une courbe étant données, il est aisé de déterminer, en chaque point, la direction de la normale principale. Le problème est en quelque sorte résolu à l'avance par les formules qui donnent les équations du plan normal et du plan osculateur, dont la normale principale est l'intersection. Nous allons chercher cependant l'expression des cosinus des angles formés par cette normale avec les axes.

Soient M et M′ deux points voisins d'une courbe, nommons s l'arc compté à partir d'une origine arbitraire et se terminant en M; $s+ds$ l'arc qui se termine en M′; ds que nous regardons comme positif désignant, par conséquent, l'arc MM′. Par l'origine des coordonnées, menons deux droites OP, OP′, chacune de longueur égale à l'unité, et parallèles aux tangentes en M et M′; la droite PP′ est parallèle à la normale principale : le triangle OPP′ étant en effet isocèle, et l'angle O infiniment petit, PP′ est perpendiculaire à OP, c'est-à-dire à la direction de la tangente; de plus, le plan POP′ qui la contient étant parallèle à deux tangentes infiniment voisines est parallèle au plan osculateur : une ligne perpendiculaire à la tangente, dans un plan parallèle au plan osculateur, est évidemment parallèle à la normale principale.

Les coordonnées du point P sont les cosinus des angles formés par la tangente en M avec les axes de coordonnées; en les nommant $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, celles du point P′ sont

$$\cos\alpha+d\cos\alpha,\quad \cos\beta+d\cos\beta,\quad \cos\gamma+d\cos\gamma.$$

Les cosinus des angles λ, μ, ν formés avec les axes par la direction PP′, sont

$$(1)\qquad \begin{cases} \cos\lambda=\dfrac{d\cos\alpha}{\sqrt{(d\cos\alpha)^2+(d\cos\beta)^2+(d\cos\gamma)^2}},\\ \cos\mu=\dfrac{d\cos\beta}{\sqrt{(d\cos\alpha)^2+(d\cos\beta)^2+(d\cos\gamma)^2}},\\ \cos\nu=\dfrac{d\cos\gamma}{\sqrt{(d\cos\alpha)^2+(d\cos\beta)^2+(d\cos\gamma)^2}}. \end{cases}$$

Nous avons trouvé (584), en nommant ρ le rayon de courbure,

$$\frac{1}{\rho}=\frac{\sqrt{(d\cos\alpha)^2+(d\cos\beta)^2+(d\cos\gamma)^2}}{ds}.$$

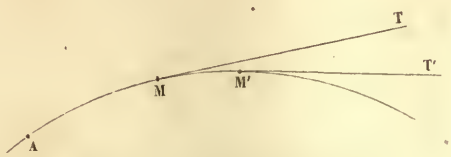
Les formules (1) deviennent par conséquent

$$\cos\lambda = \rho\,\frac{d\cos\alpha}{ds},$$

$$\cos\mu = \rho\,\frac{d\cos\beta}{ds},$$

$$\cos\nu = \rho\,\frac{d\cos\gamma}{ds}.$$

588. Il importe de distinguer sur la normale principale les deux directions opposées. Les formules précédentes se rapportent à la droite qui, partant de la courbe, se dirige vers le centre de courbure. $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ sont en effet les cosinus des angles formés avec les axes par la tangente considérée comme se dirigeant du point de contact vers le point infiniment voisin qui correspond à un accroissement positif de l'arc s. Si donc M et M′ sont deux points voisins, et que les arcs soient comptés d'une origine A, les droites OP, OP′, considérées dans la démonstration,



sont parallèles à MT et M′T′, et dirigées dans le même sens, et la ligne qui réunit le point P au point P′ est évidemment dirigée dans le même sens que la normale principale qui se dirige du point M vers le centre de courbure.

Si les arcs étaient comptés en sens opposés, l'accroissement MM′ de l'arc s étant négatif, les directions définies par les cosinus $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ changeraient de sens, et il en serait de même des lignes OP, OP′, et la ligne PP′, changeant de sens, serait dirigée en sens contraire du rayon de courbure qui, dans ce cas, forme avec les axes des angles dont les cosinus sont de signes contraires à $d\cos\alpha$, $d\cos\beta$, $d\cos\gamma$; mais comme, dans le cas actuel, ds est négatif, ces cosinus restent représentés, en valeur et en signe, par

$$\frac{d\cos\alpha}{ds},\quad \frac{d\cos\beta}{ds},\quad \frac{d\cos\gamma}{ds}.$$

Expression de la seconde courbure.

589. La seconde courbure d'une courbe est le rapport de l'angle de deux plans osculateurs infiniment voisins à l'arc infiniment petit qui sépare leurs points de con-

tact; si l'on nomme ξ, υ, ζ les angles formés par l'axe du plan osculateur avec les axes de coordonnées

$$\cos\xi = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{D},$$

$$\cos\upsilon = \frac{dy\,d^2z - dz\,d^2y}{D}, \tag{1}$$

$$\cos\zeta = \frac{dz\,d^2x - dx\,d^2z}{D},$$

en posant

$$D = \sqrt{(dx\,d^2y - dy\,d^2x)^2 + (dy\,d^2z - dz\,d^2y)^2 + (dz\,d^2x - dx\,d^2z)^2}, \tag{2}$$

on a, d'après l'une des formules qui donnent (584) l'expression du rayon de courbure ρ,

$$D = \frac{ds^3}{\rho}, \tag{3}$$

et, par conséquent,

$$\cos\xi = \rho\,\frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{ds^3},$$

$$\cos\upsilon = \rho\,\frac{dy\,d^2z - dz\,d^2y}{ds^3}, \tag{4}$$

$$\cos\zeta = \rho\,\frac{dz\,d^2x - dx\,d^2z}{ds^3}.$$

L'angle de deux plans osculateurs est égal à celui des droites qui leur sont normales : si donc par l'origine des coordonnées on mène des parallèles aux axes de deux plans osculateurs infiniment voisins et que, sur chacune d'elles, on porte une longueur égale à l'unité, la distance des points ainsi obtenus mesurera l'angle η des deux plans osculateurs. Les coordonnées des deux points étant évidemment

$$\cos\xi, \quad \cos\upsilon, \quad \cos\zeta,$$
$$\cos\xi + d\cos\xi, \quad \cos\upsilon + d\cos\upsilon, \quad \cos\zeta + d\cos\zeta,$$

on a

$$\eta = \sqrt{(d\cos\xi)^2 + (d\cos\upsilon)^2 + (d\cos\zeta)^2}. \tag{5}$$

Si la seconde courbure est représentée par $\frac{1}{r}$, on a par définition

$$\frac{1}{r} = \frac{\eta}{ds}, \tag{6}$$

et, par conséquent,

$$\frac{1}{r^2} = \frac{(d\cos\xi)^2 + (d\cos\eta)^2 + (d\cos\zeta)^2}{ds^2}. \tag{7}$$

Si l'on représente, pour abréger, par

$$A(t-x)+B(u-y)+C(v-z)=0$$

l'équation du plan osculateur, on a

$$\cos\xi=\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

$$\cos\upsilon=\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \tag{8}$$

$$\cos\zeta=\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}};$$

on en conclut,

$$d\cos\xi=\frac{(B^2+C^2)\,dA-AB\,dB-AC\,dC}{(A^2+B^2+C^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$d\cos\upsilon=\frac{(C^2+A^2)\,dB-BC\,dC-BA\,dA}{(A^2+B^2+C^2)^{\frac{3}{2}}}, \tag{9}$$

$$d\cos\zeta=\frac{(A^2+B^2)\,dC-CA\,dA-CB\,dB}{(A^2+B^2+C^2)^{\frac{3}{2}}},$$

et l'on en conclut, après des réductions faciles et indépendantes de la forme des expressions représentées par A, B, C,

$$\eta=\sqrt{(d\cos\xi)^2+(d\cos\upsilon)^2+(d\cos\zeta)^2}$$

$$=\frac{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)(dA^2+dB^2+dC^2)-(A\,dA+B\,dB+C\,dC)^2}}{A^2+B^2+C^2},$$

ou, ce qui revient au même,

$$\eta=\frac{\sqrt{(B\,dC-C\,dB)^2+(C\,dA-A\,dC)^2+(A\,dB-B\,dA)^2}}{A^2+B^2+C^2}; \tag{10}$$

mais on a

$$A=dy\,d^2z-dz\,d^2y,\quad B=dz\,d^2x-dx\,d^2z,\quad C=dx\,d^2y-dy\,d^2x,$$

$$dA=dy\,d^3z-dz\,d^3y,\quad dB=dz\,d^3x-dx\,d^3z,\quad dC=dx\,d^3y-dy\,d^3x;$$

on en déduit

$$\frac{A\,dB-B\,dA}{dz}=\frac{B\,dC-C\,dB}{dx}=\frac{C\,dA-A\,dC}{dy}=-d^2x\,dA-d^2y\,dB-d^2z\,dC;$$

par conséquent,

$$\frac{\sqrt{(B\,dC-C\,dB)^2+(C\,dA-A\,dC)^2+(A\,dB-B\,dA)^2}}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}} = dA\,d^2x+dB\,d^2y+dC\,d^2z,$$

et

$$(11)\qquad \eta = \frac{ds\,(dA\,d^2x+dB\,d^2y+dC\,d^2z)}{A^2+B^2+C^2}.$$

et enfin,

$$(12)\qquad \frac{\eta}{ds} = \frac{1}{r} = \frac{dA\,d^2x+dB\,d^2y+dC\,d^2z}{A^2+B^2+C^2}.$$

On a trouvé (584)

$$A^2+B^2+C^2 = [(d^2x)^2+(d^2y)^2+(d^2z)^2-(d^2s)^2]\,ds^2,$$

et l'expression de $\frac{1}{r}$ peut, d'après cela, être mise sous la forme

$$\frac{1}{r} = \frac{dA\,d^2x+dB\,d^2y+dC\,d^2z}{ds^2\,[(d^2x)^2+(d^2y)^2+(d^2z)^2-(d^2s)^2]},$$

ou encore, ce qui revient au même, d'après les valeurs de dA, dB, dC,

$$\frac{1}{r} = \frac{A\,d^3x+B\,d^3y+C\,d^3z}{ds^2\,[(d^2x)^2+(d^2y)^2+(d^2z)^2-(d^2s)^2]}.$$

Formules de M. Serret.

590. On peut considérer en chaque point d'une courbe à double courbure trois droites rectangulaires dont la position est intimement liée aux affections de la courbe, savoir : la tangente, la normale principale, et la perpendiculaire au plan osculateur. Nous avons fait connaître les formules qui expriment les cosinus des angles formés par chacune de ces directions avec les axes. Les différentielles de ces cosinus s'expriment aussi d'une manière élégante et satisfont à des équations importantes données par M. Serret, et que nous allons faire connaître.

Soient α, β, γ, les angles formés avec les axes par la tangente en un point de la courbe; ξ, υ, ζ, les angles formés par la perpendiculaire au plan osculateur; λ, μ, ν, les angles formés par la normale principale.

$\frac{1}{\rho}$ et $\frac{1}{r}$ désignant toujours les deux courbures de la courbe, on a (587)

$$(1)\qquad \begin{aligned} \cos\lambda &= \rho\frac{d\cos\alpha}{ds}, \\ \cos\mu &= \rho\frac{d\cos\beta}{ds}, \\ \cos\nu &= \rho\frac{d\cos\gamma}{ds}; \end{aligned}$$

on en conclut

$$d\cos\alpha = \frac{ds}{\rho}\cos\lambda,$$

$$d\cos\beta = \frac{ds}{\rho}\cos\mu, \tag{2}$$

$$d\cos\gamma = \frac{ds}{\rho}\cos\nu.$$

Les différentielles des angles ξ, υ, ζ peuvent s'exprimer d'une manière analogue : si, en effet, par l'origine des coordonnées, on mène des perpendiculaires à deux plans osculateurs infiniment voisins, et que, sur chacune d'elles, on porte une longueur égale à l'unité, la droite qui réunit les deux points ainsi obtenus est évidemment perpendiculaire à l'axe du plan osculateur et parallèle par conséquent à ce plan ; elle est de plus dans un plan perpendiculaire à l'intersection des deux plans osculateurs infiniment voisins, et parallèle par conséquent au plan normal; il résulte de ces deux conditions qu'elle est parallèle à la normale principale, et forme avec les axes les angles λ, μ, ν ; les deux points réunis par cette droite ont pour coordonnées,

$$\cos\xi, \quad \cos\upsilon, \quad \cos\zeta,$$

$$\cos\xi + d\cos\xi, \quad \cos\upsilon + d\cos\upsilon, \quad \cos\zeta + d\cos\zeta;$$

on a, par conséquent,

$$\cos\lambda = \frac{d\cos\xi}{\sqrt{(d\cos\xi)^2+(d\cos\upsilon)^2+(d\cos\zeta)^2}},$$

$$\cos\mu = \frac{d\cos\upsilon}{\sqrt{(d\cos\xi)^2+(d\cos\upsilon)^2+(d\cos\zeta)^2}}, \tag{3}$$

$$\cos\nu = \frac{d\cos\zeta}{\sqrt{(d\cos\xi)^2+(d\cos\upsilon)^2+(d\cos\zeta)^2}}.$$

Mais en nommant η l'angle de deux plans osculateurs voisins, on a

$$\eta = \sqrt{(d\cos\xi)^2+(d\cos\upsilon)^2+(d\cos\zeta)^2} = \frac{ds}{r};$$

les équations (3) deviennent, d'après cela,

$$\cos\lambda = r\frac{d\cos\xi}{ds},$$

$$\cos\mu = r\frac{d\cos\upsilon}{ds},$$

$$\cos\nu = r\frac{d\cos\zeta}{ds},$$

et par conséquent,

$$d\cos\xi = \frac{ds\cos\lambda}{r},$$

$$d\cos\upsilon = \frac{ds\cos\mu}{r}, \tag{4}$$

$$d\cos\zeta = \frac{ds\cos\nu}{r}.$$

591. Les différentielles des trois autres cosinus $d\cos\lambda$, $d\cos\mu$, $d\cos\nu$, se déduisent de celles que nous venons d'obtenir. Les trois droites que nous considérons formant en effet un trièdre trirectangle, la somme des carrés des cosinus des angles qu'elles forment avec une droite quelconque, l'axe des X par exemple, est égale à l'unité, et l'on a

$$\cos^2\alpha + \cos^2\lambda + \cos^2\xi = 1; \tag{1}$$

on en conclut

$$\cos\alpha\, d\cos\alpha + \cos\lambda\, d\cos\lambda + \cos\xi\, d\cos\xi = 0, \tag{2}$$

et par conséquent,

$$d\cos\lambda = -\frac{\cos\alpha}{\cos\lambda}\, d\cos\upsilon - \frac{\cos\xi}{\cos\lambda}\, d\cos\xi, \tag{3}$$

c'est-à-dire, à cause des valeurs trouvées pour $d\cos\upsilon$ et $d\cos\xi$,

$$d\cos\lambda = -\left(\frac{\cos\alpha}{\rho} + \frac{\cos\xi}{r}\right) ds. \tag{4}$$

On trouvera de même

$$d\cos\mu = -\left(\frac{\cos\beta}{\rho} + \frac{\cos\upsilon}{r}\right) ds,$$

$$d\cos\nu = -\left(\frac{\cos\gamma}{\rho} + \frac{\cos\zeta}{r}\right) ds. \tag{5}$$

592. Les formules précédentes permettent de calculer pour une courbe quelconque les dérivées de l'une des coordonnées par rapport à l'arc, en fonction des angles qui définissent la tangente, des deux courbures de la courbe et de leurs dérivées.

On a, en effet,

$$\frac{dx}{ds} = \cos\alpha,$$

$$\frac{d^2x}{ds^2} = \frac{d\cos\alpha}{ds} = \frac{1}{\rho}\cos\lambda,$$

$$\frac{d^3x}{ds^3} = \cos\lambda\,\frac{d\frac{1}{\rho}}{ds} + \frac{1}{\rho}\,\frac{d\cos\lambda}{ds} = \cos\lambda\,\frac{d\frac{1}{\rho}}{ds} - \frac{1}{\rho}\left(\frac{\cos\alpha}{\rho} + \frac{\cos\xi}{r}\right),$$

et il est clair que les dérivées suivantes pourront se calculer successivement, en remplaçant $d\cos\lambda$, $d\cos\alpha$ et $d\cos\xi$ par leurs valeurs; on n'y verra figurer avec les trois cosinus que les courbures $\frac{1}{r}$, $\frac{1}{\rho}$ et leurs dérivées.

Axe du plan osculateur.

593. La perpendiculaire élevée au plan osculateur par le centre du cercle osculateur est souvent nommée *axe du cercle osculateur*. Cette droite est l'intersection de deux plans normaux infiniment voisins.

Soient, en effet, MM′ un arc infiniment petit d'une courbe à double courbure, et MM_1 la projection de cet arc sur le plan osculateur en M : l'intersection des deux plans normaux aux extrémités de l'arc plan MM_1 est évidemment l'axe du cercle osculateur de cet arc MM_1, c'est-à-dire aussi celui de MM′ qui, nous l'avons vu (582), est précisément le même. Il suffit donc de prouver que sans altérer la limite de cette intersection, on peut remplacer le plan normal en M_1 à l'arc MM_1, par le plan normal en M′ à l'arc MM′. L'angle formé par les deux plans que nous voulons ici substituer l'un à l'autre est égal à celui des tangentes auxquelles ils sont perpendiculaires, c'est-à-dire à celui de la tangente à l'arc MM′ avec le plan osculateur en M; cet angle (567) est infiniment petit du second ordre. Pour faire coïncider le plan normal à MM′ en M′ avec le plan normal à MM_1, en M_1, il suffit donc de le faire tourner d'un angle infiniment petit du second ordre autour d'une certaine droite passant par le point M′, et de faire parcourir ensuite à tous ses points des droites infiniment petites du troisième ordre égales et parallèles à MM_1 : il est aisé de voir que chacun de ces deux déplacements change infiniment peu l'intersection avec un plan fixe qui forme avec le plan considéré un angle infiniment petit du premier ordre.

594. Le calcul conduit aisément à la même conclusion. Soient x, y, z les coordonnées du point considéré sur une courbe à double courbure. L'équation du plan normal est

$$(t-x)\,dx+(u-y)\,dy+(v-z)\,dz=0. \tag{1}$$

Pour obtenir l'équation du plan normal infiniment voisin, il faut changer x, y, z en $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$ respectivement, et, par conséquent, augmenter le premier membre de l'équation (1) de sa différentielle. La droite d'intersection des deux plans normaux s'obtiendra par conséquent en combinant l'équation (1) avec sa différentielle

$$(t-x)\,d^2x+(u-y)\,d^2y+(v-z)\,d^2z-dx^2-dy^2-dz^2=0. \tag{2}$$

Si l'on représente l'équation du plan osculateur par

$$A(t-x)+B(u-y)+C(v-z)=0,$$

on a (574)

$$A\,dx+B\,dy+C\,dz=0,$$
$$A\,d^2x+B\,d^2y+C\,d^2z=0.$$

Ces équations montrent que les plans représentés par les équations (1) et (2) sont l'un et l'autre perpendiculaires au plan osculateur, auquel par conséquent leur intersection est normale. Cette intersection passe de plus par le centre de courbure, qui, étant situé sur la normale principale, à la distance ρ du point x, y, z, a pour coordonnées

$$x+\rho^2\frac{d^2x}{ds^2},\quad y+\rho^2\frac{d^2y}{ds^2},\quad z+\rho^2\frac{d^2z}{ds^2}.$$

Ces coordonnées substituées à t, u, v satisfont aux équations (1) et (2), en vertu des relations connues

$$dx\,d^2x+dy\,d^2y+dz\,d^2z=0,$$
$$\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2=\frac{1}{\rho^2}.$$

595. Le centre de courbure étant situé, d'après ce qui précède, sur la droite d'intersection de deux plans normaux infiniment voisins, peut être évidemment considéré comme l'intersection de la normale principale avec celle des normales infiniment voisines qui la rencontre.

Surface lieu des normales principales.

596. Les normales principales d'une courbe forment une surface réglée qui n'est jamais développable. Pour le démontrer, remarquons que la surface lieu des normales principales à une courbe a pour plan tangent, en chaque point de cette courbe, le plan osculateur même de la courbe. Ce plan tangent contient en effet deux lignes situées dans ce plan osculateur, et qui sont la normale principale au point considéré qui sert de génératrice à la surface, et la tangente à la courbe donnée qui évidemment appartient à la surface; si donc la surface, lieu des positions de la normale principale, était développable, chaque plan tangent étant le même le long d'une génératrice, elle serait l'enveloppe des plans osculateurs de la courbe proposée; mais (571) l'enveloppe des plans osculateurs d'une courbe est la surface développable lieu des tangentes à cette courbe, qui est évidemment distincte de la surface lieu des normales principales: il y a donc contradiction à

admettre que cette dernière soit développable. Les courbes planes font seules exception. La surface lieu des normales principales, et la surface lieu des tangentes, se confondent alors en un seul et même plan qui est celui de la courbe.

597. Il résulte de la remarque précédente que le lieu des centres de courbure d'une courbe à double courbure n'a pas pour tangentes les normales principales de cette courbe. Si cela était, en effet, les normales principales, étant tangentes à une même courbe, formeraient une surface développable : c'est là une différence essentielle entre la théorie des courbes à double courbure et celle des courbes planes. Les courbes à double courbure ont, il est vrai, des développées dont nous étudierons la théorie dans un autre chapitre; mais c'est dans le seul cas des lignes planes, que l'une d'elles se confond avec le lieu des centres de courbure.

Quelques pages écrites par d'illustres géomètres ont ajouté un intérêt historique à l'importance propre de la remarque précédente. Lagrange, en effet, en écrivant la théorie des fonctions analytiques, croyait que le lieu des centres des cercles osculateurs peut, dans certains cas, avoir pour tangentes les normales principales de la courbe; il cherche même la condition nécessaire pour qu'il en soit ainsi, et ne remarque pas, quoique Monge l'eût dit depuis longtemps, que les courbes planes satisfont seules à cette condition. L'erreur échappée à l'illustre auteur a été signalée par Jacobi, et niée par Poisson, qui, se méprenant sur le passage critiqué, contesta d'abord l'exactitude de l'observation qu'il ne tarda pas d'ailleurs à reconnaître; peu de temps après, Poinsot montra que l'analyse même de Lagrange conduit à la conclusion exacte, qu'il n'eût pas manqué d'apercevoir en poussant les calculs un peu plus loin.

598. Les formules que nous avons fait connaître permettent d'ailleurs de démontrer analytiquement d'une manière fort simple que les normales principales ne sont jamais tangentes à la courbe lieu des centres de courbure.

Soient x, y, z les coordonnées d'un point de la courbe; a, b, c celles du centre de courbure : on a, en adoptant les notations du paragraphe précédent,

$$\begin{aligned} a &= x + \rho\cos\lambda, \\ b &= y + \rho\cos\mu, \\ c &= z + \rho\cos\nu; \end{aligned}$$

on en conclut

$$\begin{aligned} da &= dx + \rho\, d\cos\lambda + \cos\lambda\, d\rho, \\ db &= dy + \rho\, d\cos\mu + \cos\mu\, d\rho, \\ dc &= dz + \rho\, d\cos\nu + \cos\nu\, d\rho. \end{aligned}$$

Mais si la courbe dont les points ont pour coordonnées a, b, c est tangente à la normale principale, le rayon de courbure étant tangent à la courbe parcourue par une de ses extrémités, et normal à celle que décrit l'autre, son accroissement $d\rho$ est

égal (21) au déplacement de cette extrémité, et l'on a

$$da = \cos\lambda\, d\rho, \quad db = \cos\mu\, d\rho, \quad dc = \cos\nu\, d\rho.$$

Les équations se réduisent par conséquent, dans ce cas, à

$$\begin{aligned} dx + \rho\, d\cos\lambda &= 0, \\ dy + \rho\, d\cos\mu &= 0, \\ dz + \rho\, d\cos\nu &= 0. \end{aligned}$$

En remplaçant dans cette équation dx, dy, dz par leurs valeurs $\cos\alpha\, ds$, $\cos\beta\, ds$, $\cos\gamma\, ds$, et $d\cos\lambda$, $d\cos\mu$, $d\cos\nu$, par les valeurs trouvées (590), on en déduit

$$\frac{\rho}{r}\cos\xi = 0,$$

$$\frac{\rho}{r}\cos\upsilon = 0,$$

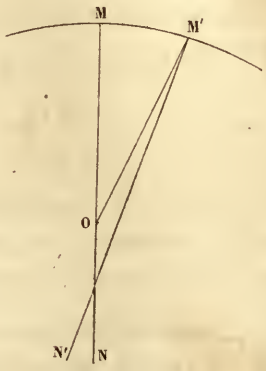
$$\frac{\rho}{r}\cos\zeta = 0.$$

Le rayon de courbure ne pouvant pas (579) être nul, ces équations exigent que r soit infini, et que par conséquent la courbe soit plane.

599. Après avoir démontré que les normales principales d'une courbe ne peuvent pas former une surface développable, il est naturel de se demander si cette condition est la seule qui leur soit imposée, et si toute surface gauche peut être considérée comme le lieu des normales principales à une courbe tracée sur elle. Mais la solution de cette question devant emprunter quelques résultats à la théorie des surfaces, elle trouvera sa place dans un autre chapitre.

Pour compléter en ce moment l'étude de la loi de distribution des normales principales à une courbe, nous allons chercher l'expression de l'angle formé par deux normales infiniment voisines, et la grandeur et la position de leur plus courte distance.

Soient MM′ un arc infiniment petit pris sur une courbe à double courbure, MN la normale principale en M, et M′N′ la normale en M′ : ces deux droites ne se rencontrent pas; mais parmi les normales menées par le point M′ à la courbe MM′, il en



est une M′O qui rencontre MN; et le point d'intersection O est (595) précisément le centre de courbure de MM′. Les deux normales MO, M′O se rencontrent en effet nécessairement sur l'intersection des plans normaux en M et en M′, c'est-à-dire sur l'axe du cercle osculateur, et la droite MN, étant située dans le plan osculateur, coupe nécessairement cet axe au centre même du cercle osculateur.

L'angle formé par les droites M′O, M′N′ est égal, en négligeant les infiniment petits du second ordre, à l'angle des plans osculateurs aux points M et M′. Le plan qui contient M′O et M′N′ est en effet le plan normal au point M′. Il fait avec le plan NMM′, qui diffère infiniment peu du plan osculateur, un angle infiniment peu différent d'un angle droit, et l'angle OM′N′ peut être regardé comme l'inclinaison de M′N′ sur le plan NMN′. Ce dernier forme avec le plan osculateur en M un angle infiniment petit du premier ordre ; mais, pour le faire coïncider avec lui, il suffit de le faire tourner autour de MO : les distances des différents points de M′N′ à ce plan ne seront, par là, altérées que d'infiniment petits du second ordre, et par suite M′N′ forme avec le plan osculateur en M et avec le plan NMM′ des angles dont la différence est infiniment petite du second ordre; mais l'intersection des plans osculateurs en M et M′ diffère (569) infiniment peu de la tangente; M′N′, qui appartient à l'un de ces plans, est donc, à la limite, perpendiculaire à cette intersection, et son inclinaison sur l'autre plan peut, par conséquent, être prise pour mesure de l'angle des deux plans. Si l'on désigne MM′ par ds en nommant toujours $\frac{1}{r}$ la seconde courbure, l'angle OM′N′ est par conséquent égal à $\frac{ds}{r}$.

600. Si par un point quelconque de l'espace on mène des parallèles aux trois droites MN, M′N′, M′O, on formera un angle trièdre rectangle. Le triangle sphérique correspondant peut être regardé comme rectiligne, et par conséquent le carré de la face opposée à l'angle droit est égal à la somme des carrés des deux autres; or, l'angle de M′N′ avec M′O est, on vient de le voir, égal à $\frac{ds}{r}$, MO étant égal au rayon de courbure ρ, l'angle de MO avec M′O est $\frac{ds}{\rho}$, le troisième angle, celui de M′N′ avec MN, est donc égal à

$$\sqrt{\frac{ds^2}{r^2}+\frac{ds^2}{\rho^2}}=ds\sqrt{\frac{1}{r^2}+\frac{1}{\rho^2}}.$$

Telle est l'expression de l'angle formé par deux normales principales infiniment voisines. L'angle trièdre infiniment petit que l'on vient de considérer fait connaître aussi l'inclinaison du plan osculateur qui est parallèle à une de ses faces, sur le plan parallèle à deux normales infiniment voisines, lequel est parallèle à la face

opposée à l'angle droit; cet angle a pour cosinus le rapport des deux faces qui le comprennent, c'est-à-dire

$$\frac{\frac{ds}{\rho}}{ds\sqrt{\frac{1}{r^2}+\frac{1}{\rho^2}}}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{\rho^2}{r^2}}},$$

la tangente est égale par conséquent à $\frac{\rho}{r}$.

Le plan parallèle aux deux normales principales peut être considéré comme passant par l'une d'elles MN, suivant laquelle il coupera évidemment le plan osculateur; l'angle qu'il forme avec ce plan osculateur est par conséquent égal à son inclinaison sur la tangente à la courbe perpendiculaire à MN, et égal par conséquent au complément de l'angle formé par la tangente avec la plus courte distance des deux normales principales. La tangente de cet angle est, d'après cela, égale à $\frac{r}{\rho}$.

Si la courbe est plane, $\frac{r}{\rho}$ est infini; dans ce cas, en effet, la plus courte distance est nulle, mais sa direction, toujours déterminée, est perpendiculaire au plan de la courbe, et par conséquent à la tangente à celle-ci.

La direction de la plus courte distance des normales infiniment voisines étant connue, il est facile d'en calculer la longueur, qui est égale, en effet, à la projection de l'arc *ds* sur cette direction connue, c'est-à-dire au produit de *ds* par le cosinus de l'angle dont la tangente est $\frac{r}{\rho}$.

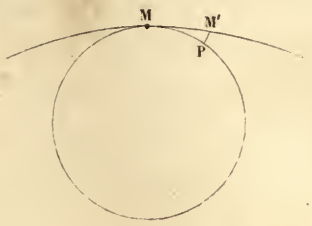
La plus courte distance de deux normales infiniment voisines est d'après cela

$$\frac{ds\,\rho}{\sqrt{r^2+\rho^2}}.$$

Sphère osculatrice.

601. Lorsqu'une sphère passe par le cercle osculateur d'une courbe, en un point M, la distance de cette sphère à un point M′, situé sur la courbe à distance infiniment petite du premier ordre de M, est moindre que la distance du même point M′ au cercle osculateur, et par conséquent du troisième ordre tout au plus. Mais parmi toutes ces sphères il en est une qui s'approche de la courbe infiniment plus que les autres, et dont la distance au point M′ est infiniment petite d'ordre supérieur au troisième. Nous allons démontrer l'existence de cette sphère que l'on nomme sphère osculatrice, et déterminer son rayon et la position de son centre.

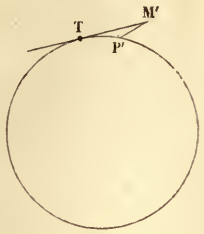
Considérons une courbe à double courbure, et le cercle osculateur en un point M. Soient M′ un point de la courbe infiniment voisin de M, et M′P la distance du point M′



au cercle osculateur en M. M′P est infiniment petit du troisième ordre. Concevons une sphère passant par le cercle osculateur MP. La distance du point M′ à cette sphère sera une droite M′P′, normale à la sphère, et qui formera avec M′P un triangle rectangle à la limite, et dont M′P est l'hypoténuse. M′P′ est donc moindre que M′P, et le rapport de ces deux lignes est le sinus de l'angle en P, c'est-à-dire le sinus de l'angle sous lequel M′P coupe la sphère. Si donc la sphère est tangente à la droite M′P, le rapport des deux distances a pour limite zéro, et la première étant infiniment petite du troisième ordre, la seconde est d'un ordre supérieur. La sphère pour laquelle cette condition est remplie se nomme sphère osculatrice; elle est déterminée par un cercle qu'elle contient et une droite qui lui est tangente en un point de ce cercle.

602. Nous nous arrêterons ici pour montrer par un nouvel exemple combien de précautions minutieuses sont nécessaires quand on raisonne sur les infiniment petits. Lorsqu'un point est à une distance infiniment petite d d'une sphère, le carré de la tangente menée de ce point à la sphère est le produit de d par une ligne finie égale à la limite au diamètre de la sphère, et si par conséquent la tangente est un infiniment petit du troisième ordre, la distance d est du sixième. On pourrait se croire autorisé, d'après cela, à affirmer que la distance de la courbe à la sphère osculatrice est infiniment petite du sixième ordre. La ligne M′P, dans la démonstration précédente, est en effet du troisième ordre, et si elle est tangente à la sphère osculatrice, la normale à cette sphère doit être du sixième ordre. Mais ce raisonnement, qui semble si simple, est inexact; la sphère osculatrice est en effet la sphère limite de celle qui passe par le cercle osculateur en M, en touchant la ligne M′P; pour une position quelconque du point M′, la distance M′P′ n'est pas tangente à la sphère osculatrice, elle la coupe seulement sous un angle qui tend vers zéro, et cette circonstance suffit pour que la tangente issue du point M′ soit infiniment plus longue que la droite M′P′.

Soient en effet M′T la tangente, et M′P′ la droite tangente à la limite, et qui coupe la sphère sous un angle infiniment petit :



on a

$$\frac{M'T}{M'P'} = \frac{\sin M'P'T}{\sin M'TP'};$$

les deux sinus sont nuls à la limite, mais rien ne prouve que leur rapport soit fini : nous devons donc attendre l'étude analytique de la question pour dire avec précision quel est l'ordre de la distance d'une courbe à la sphère osculatrice. Notre démonstration prouve seulement ici qu'elle est d'ordre supérieur au troisième.

Détermination de la sphère osculatrice.

603. Après avoir démontré l'existence, en chaque point d'une courbe, d'une sphère osculatrice dont la courbe s'éloigne dans le voisinage du point de contact, infiniment moins que du cercle osculateur, nous allons donner le moyen de former l'équation de cette sphère, et d'en déterminer le centre et le rayon.

Soit

$$(t-a)^2+(u-b)^2+(v-c)^2-R^2=0 \qquad (1)$$

l'équation de la sphère osculatrice au point de la courbe dont les coordonnées sont x, y, z. La distance, à cette sphère, du point de la courbe infiniment voisin du point de contact doit être infiniment petite d'ordre supérieur au troisième (602) : or cette distance est de même ordre que le carré de la tangente menée du même point à la sphère, et représenté, comme on sait, par le premier membre de l'équation (1). Les constantes a, b, c, R doivent donc être telles, que l'équation (1) soit satisfaite, quand on y fait $t=x$, $u=y$, $v=z$, et que de plus le premier membre devienne infiniment petit d'ordre supérieur au troisième, lorsqu'on y remplace x, y, z par les coordonnées d'un point voisin pris sur la courbe, à distance infiniment petite du premier ordre. Si nous regardons x, y, z comme des fonctions données d'une variable α, dont l'accroissement $d\alpha$ correspond au déplacement considéré sur la courbe, cette condition revient à dire qu'en changeant α en $\alpha+d\alpha$, dans le premier membre de (1), et développant ensuite suivant les puissances

de $d\alpha$, les termes en $d\alpha$, $d\alpha^2$ et $d\alpha^3$ ont des coefficients nuls. On doit par conséquent égaler à zéro les trois premières dérivées du premier membre, ou, ce qui revient au même, les trois premières différentielles que l'on calculera en laissant la variable indépendante indéterminée.

On aura donc, pour déterminer les coordonnées a, b, c du centre de courbure,

$$\begin{gathered}(x-a)\,dx+(y-b)\,dy+(z-c)\,dz=0,\\ (x-a)\,d^2x+(y-b)\,d^2y+(z-c)\,d^2z-dx^2-dy^2-dz^2=0,\\ (x-a)\,d^3x+(y-b)\,d^3y+(z-c)\,d^3z-dx\,d^2x-dy\,d^2y-dz\,d^2z=0.\end{gathered}\tag{2}$$

604. Les trois équations précédentes expriment que le centre de la sphère osculatrice est le point commun à trois plans normaux infiniment voisins. La première des équations (2), si l'on y considère a, b, c comme variables, représente en effet le plan normal au point (x, y, z), et les deux suivantes, qui en sont les différentielles première et seconde, étant combinées avec elle, représentent le point commun aux trois plans normaux infiniment voisins.

Les plans normaux d'une courbe enveloppent une surface développable qui a pour génératrices les axes des plans osculateurs; l'arête de rebroussement à laquelle toutes les génératrices de la surface sont tangentes a (571) pour plans osculateurs ces plans normaux eux-mêmes, et chaque point de cette arête de rebroussement, pouvant être considéré comme le point commun à trois plans osculateurs infiniment voisins, coïncide avec le centre de la sphère osculatrice, intersection des trois plans normaux infiniment voisins à la courbe donnée.

Le centre de la sphère osculatrice en chaque point d'une courbe est par conséquent le point correspondant de l'arête de rebroussement de la surface développable enveloppe des plans normaux de la courbe donnée, et qui a pour génératrices les axes des cercles osculateurs.

605. Le centre de la sphère osculatrice est, d'après ce qui précède, le point de rencontre de trois plans normaux infiniment voisins. Pour en calculer les coordonnées, il faut combiner l'équation du plan normal avec ses deux premières différentielles; mais on peut aisément donner à ces équations une forme plus simple qui conduira à un résultat plus élégant.

En nommant, comme nous l'avons fait (590) α, β, γ, les angles formés par la tangente avec les axes des coordonnées, l'équation du plan normal est

$$(t-x)\cos\alpha+(u-y)\cos\beta+(v-z)\cos\gamma=0;\tag{1}$$

la différentielle divisée par ds est

$$(t-x)\frac{d\cos\alpha}{ds}+(u-y)\frac{d\cos\beta}{ds}+(v-z)\frac{d\cos\gamma}{ds}-\cos\alpha\frac{dx}{ds}-\cos\beta\frac{dy}{ds}-\cos\gamma\frac{dz}{ds}=0.\tag{2}$$

En nommant λ, μ, ν les angles de la normale principale avec les axes, cette équation devient, en vertu des formules démontrées (587),

$$\frac{1}{\rho}[(t-x)\cos\lambda+(u-y)\cos\mu+(v-z)\cos\nu]-1=0. \tag{3}$$

Avant de la différentier une seconde fois, il est évidemment permis de la multiplier par ρ, et d'y substituer

$$(t-x)\cos\lambda+(u-y)\cos\mu+(v-z)\cos\nu-\rho=0; \tag{4}$$

la différentielle est

$$(t-x)\frac{d\cos\lambda}{ds}+(u-y)\frac{d\cos\mu}{ds}+(v-z)\frac{d\cos\nu}{ds}-\frac{d\rho}{ds}=0, \tag{5}$$

ou, en remplaçant $\frac{d\cos\lambda}{ds}$, $\frac{d\cos\mu}{ds}$, $\frac{d\cos\nu}{ds}$ par leurs valeurs (591), l'équation (5) peut donc s'écrire, en multipliant par r,

$$(t-x)\cos\xi+(u-y)\cos\upsilon+(v-z)\cos\zeta-r\frac{d\rho}{ds}=0; \tag{6}$$

elle représente un plan parallèle au plan osculateur, et passant par le centre de la sphère osculatrice dont les coordonnées t, u, v seront déterminées par les équations (1), (4), (6).

Si l'on fait passer dans le second membre les derniers termes de ces équations et qu'on les ajoute ensuite après les avoir élevées au carré, en ayant égard aux relations qui lient les cosinus des angles formés avec les axes par trois droites rectangulaires, on trouvera

$$(t-x)^2+(u-y)^2+(v-z)^2=\rho^2+r^2\left(\frac{d\rho}{ds}\right)^2;$$

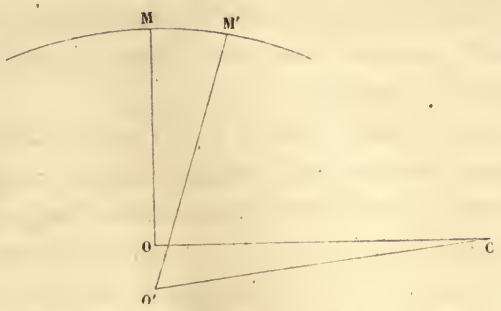
c'est l'expression du carré du rayon de la sphère osculatrice.

606. On peut arriver au même résultat par des considérations purement géométriques.

Le centre de la sphère osculatrice est situé en effet sur l'arête de rebroussement de la surface lieu des axes des cercles osculateurs.

Soient M et M′ deux points infiniment voisins de la courbe considérée, et ds l'arc infiniment petit MM′; MO, M′O′ les rayons de courbure correspondants, et OC, O′C les axes des cercles osculateurs que l'on peut considérer comme se coupant au centre C de la sphère osculatrice. La ligne MO, étant située dans le plan normal

à MM′, est tangente à la surface développable, et les directions OM, OO′, OC sont par conséquent dans un même plan. Soit η l'angle OCO′ formé par les axes des cer-



cles osculateurs en M et M′; on a, en désignant comme précédemment la seconde courbure par $\frac{1}{r}$,

$$\eta = \frac{ds}{r}.$$

Si l'on pose OC $= l$, et que θ désigne l'angle O′OC, on a évidemment aussi

$$\eta = \frac{OO'.\sin\theta}{l},$$

et par conséquent

$$l = \frac{r.OO'.\sin\theta}{ds}.$$

Les lignes MO, M′O′, étant normales à MM′, leur différence $d\rho$ est égale (21) à OO′ cos (MO, M′O′); mais MO étant perpendiculaire à OC, on a

$$\cos(MO, M'O') = \sin\theta,$$

et par conséquent

$$OO'\sin\theta = d\rho;$$

on en conclut

$$l = r\frac{d\rho}{ds},$$

et le rayon MC de la sphère étant l'hypoténuse du triangle MOC, on a enfin

$$R^2 = \rho^2 + r^2\left(\frac{d\rho}{ds}\right)^2.$$

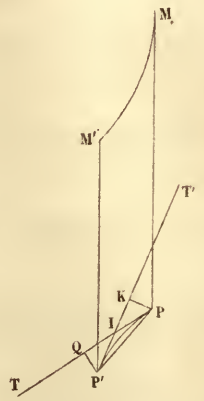
607. Lorsque la courbure d'une courbe est constante, on a $\frac{d\rho}{ds} = 0$, et l'équa-

tion précédente donne $R = \rho$. Le cercle osculateur est, dans ce cas, un grand cercle de la sphère osculatrice. La longueur désignée par l est alors égale à zéro. L'arête de rebroussement de la surface enveloppe des plans normaux est donc, dans ce cas, le lieu des centres de courbure. Monge a remarqué que cette courbe a, comme la proposée, un rayon de courbure constant, et que chacune d'elles est alors le lieu des centres de courbure de l'autre.

Nommons en effet S la courbe proposée, et Σ l'arête de rebroussement de la surface enveloppe des plans normaux qui, dans ce cas, est à la fois le lieu des centres de courbure et des centres des sphères osculatrices. Les tangentes à la courbe Σ sont les axes des cercles osculateurs de S, et par conséquent les plans normaux de Σ sont les plans osculateurs de S; l'enveloppe de ces plans normaux est donc une surface développable dont S est l'arête de rebroussement, et par conséquent la courbe S est le lieu des centres des sphères osculatrices de la courbe Σ. Les deux courbes S et Σ étant telles, que le plan normal à chacune est osculateur de l'autre, et la normale principale étant l'intersection du plan osculateur avec le plan normal, les deux courbes ont mêmes normales principales, et ces normales réunissent leurs points correspondants. Il en résulte que pour la courbe Σ, comme pour la courbe S, le rayon de la sphère osculatrice se confond avec la normale principale, et que S, lieu des centres des sphères osculatrices de Σ, est aussi le lieu de ses centres de courbure.

Détermination de quelques grandeurs infiniment petites.

608. *Distance d'un point d'une courbe au plan osculateur infiniment voisin.* — Soit MM′ un arc infiniment petit de courbe à double courbure que nous désignerons par ds; projetons cet arc sur un plan perpendiculaire à la tangente en M.



Soient P la projection du point M, P′ la projection de M′, PT la tangente à la courbe P′ au point P, et P′T′ la tangente en P′.

Le plan osculateur de la courbe MM′ au point M est MPT; il est parallèle à M′P′, et par conséquent la distance que nous voulons évaluer est égale à la perpendiculaire P′Q, abaissée du point P′ sur ce plan, ou, ce qui revient au même, sur la ligne PT. On a, en réunissant les points P et P′ par une ligne droite, pour former le triangle rectangle QPP′,

$$P'Q = PP' \sin QPP'. \tag{1}$$

Le facteur PP′, distance du point M′ à la tangente en M, est infiniment petit du second ordre, et l'on a (586)

$$PP' = \frac{s^2}{2\rho}. \tag{2}$$

Nous avons donc seulement à évaluer l'angle QPP′, mais dans cette évaluation se présente une difficulté singulière que nous signalerons à la fin du calcul, et par suite de laquelle un raisonnement très-spécieux va nous conduire à un résultat inexact.

L'angle I, formé par les tangentes PT, P′T′, mesure l'inclinaison du plan osculateur en M sur le plan parallèle aux deux tangentes en M et M′; cet angle, moitié (566) de celui des deux plans osculateurs voisins, est égal par conséquent, en négligeant bien entendu les infiniment petits du second ordre, à $\frac{s}{2r}$. L'angle TPP′ semble devoir être la moitié du précédent et égal à $\frac{s}{4r}$, en sorte que la formule (1) donne, pour distance du point M′ au plan osculateur en M,

$$P'Q = \frac{s^3}{8r\rho}.$$

Mais une circonstance singulière rend ce résultat inexact. L'arc PP′ présente, en effet, un cas exceptionnel. Le rayon de courbure au point P est nul. L'angle de contingence I de l'arc PP′ est en effet infiniment petit du premier ordre, c'est-à-dire de même ordre que l'arc MM′ représenté par s; mais l'arc PP′, dont la corde est égale à $\frac{s^2}{2\rho}$, est du second ordre. Le rapport de l'angle de contingence à la longueur de l'arc est donc infini, et le rayon de courbure est égal à zéro.

Le théorème dont nous avons déduit l'angle TPP′ étant en défaut, il faut, pour calculer cet angle, recourir à d'autres considérations. Rapportons l'arc PP′ à deux axes rectangulaires situés dans son plan, en prenant pour axe des X la tangente PT, et pour axe des Y une perpendiculaire à cette tangente menée par le point P. L'abscisse du point P′ par rapport à ces axes peut être considérée comme égale

à PP′, c'est-à-dire à $\frac{s^2}{2\rho}$; l'angle PIT′, qui a pour tangente $\frac{dy}{dx}$, est égal à $\frac{s}{2r}$; on a donc

$$x = \frac{s^2}{2\rho}, \tag{3}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{s}{2r}, \tag{4}$$

d'où l'on conclut

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(2\rho x)^{\frac{1}{2}}}{2r}, \tag{5}$$

en négligeant toujours, il doit être superflu de le rappeler, les infiniment petits d'ordre supérieur à ceux que l'on conserve.

On conclut de l'équation (4), en vertu du théorème démontré (549),

$$y = \frac{1}{3}(2\rho)^{\frac{1}{2}}\frac{x^{\frac{3}{2}}}{r}, \tag{6}$$

et par conséquent

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{3}(2\rho)^{\frac{1}{2}}\frac{x^{\frac{1}{2}}}{r} = \frac{2}{3}\frac{dy}{dx} = \frac{s}{3r}; \tag{7}$$

$\frac{y}{x}$ est la tangente de l'angle P′PT, elle peut remplacer le sinus dans la formule (1), et l'on a enfin,

$$P'Q = \frac{s^3}{6r.\rho}. \tag{8}$$

Telle est la distance de l'une des extrémités de l'arc infiniment petit s, au plan osculateur correspondant à l'autre extrémité.

609. *Distance de deux tangentes infiniment voisines.* — La tangente en M ayant pour projection de la courbe PP′ le point P, et la tangente en M′ se projetant suivant la droite P′T′, la plus courte distance de ces deux tangentes est la perpendiculaire PK abaissée du point P sur P′T′, et l'on a évidemment

$$PK = PP' \sin PP'K.$$

PP′ est égal, nous l'avons dit, à $\frac{s^2}{2\rho}$; quant à l'angle PP′K, il est la différence des deux angles KIP, IPP′, précédemment évalués : le premier égal à $\frac{s}{2r}$, et le second

à $\frac{s}{3r}$; on a donc

$$PP'K = \frac{s}{2r} - \frac{s}{3r} = \frac{s}{6r},$$

et par conséquent

$$PK = \frac{s^3}{12\rho r}.$$

Telle est l'expression de la plus courte distance des deux tangentes aux extrémités d'un arc infiniment petit s.

Ces deux théorèmes élégants sont dus à M. O. Bonnet.

Définition de la développée.

610. La développée d'une courbe est une seconde courbe dont les tangentes rencontrent la première et lui sont normales.

D'après cette définition, pour obtenir une développée d'une courbe, il suffit de lui mener une série de normales suivant une loi telle, que leur ensemble forme une surface développable dont l'arête de rebroussement sera la développée.

On peut obtenir cette surface de la manière suivante : par un premier point M de la courbe, on mènera une normale arbitraire; puis, par un point M′ voisin de M, une seconde normale qui rencontre la première; par un point M″ voisin de M′, une normale qui rencontre la seconde, et ainsi de suite : chacune de ces normales est déterminée, quand on se donne son point de départ, par la condition d'être située dans le plan normal correspondant, et de rencontrer une droite donnée; leur ensemble forme un polygone qui, lorsque les points M, M′ se rapprochent indéfiniment, a pour limite une développée. La première normale issue du point M étant arbitraire, chaque courbe a une infinité de développées. Une courbe à double courbure, de même qu'une courbe plane, est dite la développante de sa développée.

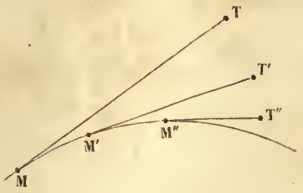
Longueur d'un arc de développée.

611. Les développées d'une courbe à double courbure partagent la propriété caractéristique de la développée d'une courbe plane : un arc de développée est égal à la différence des tangentes à ses extrémités, comprises entre leurs points de contact et leur intersection avec la développante.

La démonstration donnée (22) s'applique sans modification. Lorsqu'une droite se meut en restant tangente à la courbe parcourue par l'une de ses extrémités, et normale à celle que parcourt l'autre, la variation de sa longueur entre deux positions quelconques est égale à la longueur de l'arc auquel la droite est restée tan-

gente : que la droite se meuve ou non dans un même plan, cela ne change rien à la démonstration.

On a vu (21) que la variation de longueur d'une droite qui se déplace infiniment peu est la somme des déplacements de ses extrémités, respectivement projetées sur la direction de la droite. Lors donc que l'une des extrémités se déplace tangentiellement à la droite, le terme correspondant dans la variation de la longueur est égal à l'arc infiniment petit qu'elle a parcouru ; pour que cet arc représente la variation totale de longueur, il est donc nécessaire et suffisant que le déplacement de l'autre extrémité soit normal à la droite. D'après cela, si l'on porte sur les tangentes à



une courbe quelconque des longueurs MT, M′T′, M″T″, dont les différences soient égales aux arcs qui séparent les points de contact, la première longueur MT étant d'ailleurs entièrement arbitraire, le lieu des points T, T′, T″ sera normal à toutes les tangentes ; il est par conséquent une développante de la courbe donnée.

On peut énoncer le résultat précédent en disant qu'un fil étant enroulé sur la courbe MM′M″, et l'une des extrémités étant fixe, si on le déroule en laissant toujours la portion déroulée tendue en ligne droite dans la direction de la tangente au point où elle se sépare de la courbe, chacun des points du fil décrira une développante.

612. On peut facilement donner une forme analytique aux démonstrations précédentes.

Soient t, u, v les coordonnées d'un point quelconque d'une courbe donnée S, et x, y, z, celles du point obtenu en portant, à partir du point de contact, une longueur l sur la tangente au point t, u, v. Cherchons la condition nécessaire et suffisante pour que la courbe Σ, lieu des points x, y, z, soit la développante de la courbe S.

En nommant α, β, γ les angles formés avec les axes par la tangente au point t, u, v, on a,

$$(1)\qquad \begin{aligned} x &= t + l\cos\alpha, \\ y &= u + l\cos\beta, \\ z &= v + l\cos\gamma; \end{aligned}$$

on en conclut

$$(2)\qquad \begin{aligned} dx &= dt + ld\cos\alpha + \cos\alpha\, dl,\\ dy &= du + ld\cos\beta + \cos\beta\, dl,\\ dz &= dv + ld\cos\gamma + \cos\gamma\, dl. \end{aligned}$$

Ajoutons ces équations après avoir multiplié la première par $\cos\alpha$, la seconde par $\cos\beta$, et la troisième par $\cos\gamma$, en ayant égard aux équations

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$
$$\cos\alpha\, d\cos\alpha + \cos\beta\, d\cos\beta + \cos\gamma\, d\cos\gamma = 0,$$

nous aurons,

$$(3)\qquad dx\cos\alpha + dy\cos\beta + dz\cos\gamma = \cos\alpha\, dt + \cos\beta\, du + \cos\gamma\, dz + dl.$$

Mais en nommant ds la différentielle de l'arc de la courbe S, on a

$$\cos\alpha = \frac{dt}{ds},\quad \cos\beta = \frac{du}{ds},\quad \cos\gamma = \frac{dz}{ds},$$

et l'équation (3) devient

$$dx\cos\alpha + dy\cos\beta + dz\cos\gamma = \frac{dt^2 + du^2 + dv^2}{ds} + dl = ds + dl.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que $ds + dl = 0$, est donc que le premier membre soit nul, et que, par conséquent, la tangente à la courbe Σ, qui forme avec les axes des angles dont les cosinus sont proportionnels à dx, dy, dz, soit perpendiculaire à la droite l, qui forme les angles α, β, γ.

613. La normale principale de la développée est parallèle, en chaque point, à la tangente correspondante de la développante.

Considérons en effet deux normales voisines perçant la développante en M et M′, et touchant la développée aux points correspondants T et T′. La normale principale

en T est perpendiculaire à MT, et située dans le plan osculateur de la courbe TT′, lequel (571) touche suivant MT la surface développable, lieu des droites TM, T′M′, et contient par conséquent la tangente à la courbe MM′ située sur cette surface. La

normale principale en T et la tangente en M étant dans un même plan et perpendiculaires toutes deux à la droite MT, elles sont parallèles.

614. Il est facile de démontrer la même propriété par le calcul. En nommant en effet t, u, v les coordonnées du point T, et x, y, z celles du point M et l la distance qui les sépare, on a trouvé (612)

$$(1)\qquad \begin{aligned} dx &= dt + l\,d\cos\alpha + \cos\alpha\, dl,\\ dy &= du + l\,d\cos\beta + \cos\beta\, dl,\\ dz &= dv + l\,d\cos\gamma + \cos\gamma\, dl; \end{aligned}$$

mais on a

$$dl + ds = 0,$$

d'ailleurs,

$$\frac{dt}{ds} = \cos\alpha, \quad \frac{du}{ds} = \cos\beta, \quad \frac{dv}{ds} = \cos\gamma;$$

par conséquent,

$$(2)\qquad \begin{aligned} dt + \cos\alpha\, dl &= 0,\\ du + \cos\beta\, dl &= 0,\\ dv + \cos\gamma\, dl &= 0, \end{aligned}$$

et les équations (1) se réduisent à

$$(3)\qquad \begin{aligned} dx &= l\,d\cos\alpha,\\ dy &= l\,d\cos\beta,\\ dz &= l\,d\cos\gamma. \end{aligned}$$

Elles prouvent que la direction qui fait avec les axes des angles dont les cosinus sont proportionnels à dx, dy, dz, c'est-à-dire la tangente à la développante, est parallèle à celle qui fait des angles dont les cosinus sont proportionnels à $d\cos\alpha$, $d\cos\beta$, $d\cos\gamma$, c'est-à-dire à la normale principale à la développée.

Surface lieu des développées.

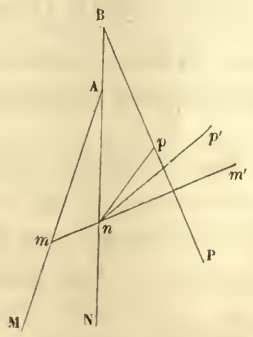
615. Chaque point d'une développée est l'intersection de deux normales infiniment voisines de la développante. Il est donc situé sur l'intersection de deux plans normaux infiniment voisins de celle-ci, c'est-à-dire sur l'axe du plan osculateur; toutes les développées d'une courbe sont donc situées sur la surface lieu des axes des cercles osculateurs. Cette surface, lieu des développées, est aussi le lieu des intersections successives des plans normaux de la développante, c'est-à-dire la surface développable enveloppe de ces plans normaux, qui a (604) pour arête de rebroussement le lieu des centres des sphères osculatrices.

616. Les développées situées sur cette surface développable sont telles, que, par le développement de la surface sur un plan, elles se transforment toutes en lignes droites. Elles sont par conséquent les lignes les plus courtes que l'on puisse tracer entre deux de leurs points sur la surface développable.

La normale principale d'une développée étant en effet parallèle à la tangente au point correspondant de la développante, elle est perpendiculaire au plan normal de celle-ci, c'est-à-dire au plan tangent de la surface développable lieu des développées. Une développée a donc en chaque point sa normale principale, et par conséquent aussi le plan osculateur qui la contient, perpendiculaire au plan tangent de la surface développable sur laquelle elle est tracée. Or nous allons montrer qu'une courbe, dont le plan osculateur est en chaque point normal à la surface développable sur laquelle elle est tracée, se change en ligne droite par le développement de celle-ci.

Pour cela, cherchons quelle est la courbure de la transformée d'une ligne quelconque tracée sur une surface développable que l'on développe. Lorsque cette courbure sera nulle, la transformée sera rectiligne.

Considérons d'abord un polyèdre dont les arêtes sont les intersections successives d'une série de plans ; il suffira de supposer que les plans successifs se rapprochent indéfiniment pour que ce polyèdre soit remplacé par une surface développable, à laquelle les résultats obtenus s'appliquent comme limite. Soient AM,



BN, BP trois arêtes consécutives du polyèdre, et *mn*, *np*, deux côtés d'un polygone tracé sur la surface. Pour développer le polyèdre sur un plan, il faudra faire successivement tourner chaque face autour de l'arête qui la réunit à la face voisine. Dans ce mouvement les côtés *mn* et *np* ne changeront pas de longueur, mais l'angle formé par eux, ou, ce qui revient au même, par leurs prolongements, sera altéré. Soit *np'* la position de *np* après la rotation. Posons $m'np = \varepsilon$, $m'np' = \varepsilon'$: *np*, *np'* sont deux génératrices d'un cône dont *n*B est l'axe, leur plan est donc à la limite tangent à ce cône, et par conséquent perpendiculaire au plan B*np'*, ou, ce qui revient au même, à *m'np'*. On peut donc, en passant à la limite, regarder le

trièdre $npp'm'$ comme rectangle suivant l'arête np', et si l'on pose

$$m'np = \varepsilon, \quad m'np' = \varepsilon',$$

que l'on nommé θ l'angle dièdre formé par la face $p'np$ avec pnm', on aura

$$\operatorname{tang} \varepsilon' = \operatorname{tang} \varepsilon \cos \theta,$$

ou, ce qui revient au même, ε et ε' étant infiniment petits,

$$\varepsilon' = \varepsilon \cos \theta.$$

Telle est la relation qui lie l'angle de contingence ε' de la courbe transformée, à l'angle de contingence ε de la courbe primitive. θ désigne évidemment l'angle formé par le plan osculateur de la courbe limite avec le plan tangent à la surface développable, mené par la tangente à cette courbe. L'élément de la courbe ne changeant pas de longueur dans le développement, le rapport des courbures est celui des angles de contingence, et par conséquent, en nommant ρ le rayon de courbure de la courbe tracée sur la surface développable, et ρ' celui de la transformée après le développement de la surface, on a

$$\frac{1}{\rho'} = \frac{\cos\theta}{\rho}.$$

Pour que $\frac{1}{\rho'}$ soit nul, c'est-à-dire pour que la transformée soit une ligne droite, il faut et il suffit que $\cos\theta$ soit égal à zéro, c'est-à-dire que le plan osculateur de la courbe soit normal à la surface sur laquelle elle est tracée.

617. Toutes les développées d'une courbe se transforment en lignes droites par le développement de la surface développable qui les contient. Mais la proposition réciproque ne serait pas exacte: toute courbe tracée sur la surface développable, et qui par le développement devient une ligne droite, n'est pas pour cela une développée.

Les lignes droites dans lesquelles se transforment toutes les développées concourent en un même point.

Imaginons en effet la surface développable enveloppe des plans normaux d'une courbe donnée, sur laquelle se trouvent toutes les développées de cette courbe. Concevons un plan enroulé sur elle et qui se déroule en tournant successivement autour des diverses génératrices. A un instant quelconque de l'opération, ce plan touche la surface suivant une génératrice et, sur la portion déjà déroulée, les diverses développées se sont transformées en lignes droites qui se raccordent avec les parties encore situées sur la surface, et les touchent précisément sur cette génératrice de contact où la portion déjà développée de la surface se raccorde avec celle

qui ne l'est pas encore. Tous ces points, où les diverses développées viennent couper une même génératrice de la surface développable, correspondent à un seul et même point de la courbe primitive dont le cercle osculateur a pour axe cette génératrice ; les tangentes aux diverses développées vont concourir en ce point. Lorsque le plan tangent en se déroulant touchera successivement la surface développable suivant toutes les génératrices, le développement des développées les transformera donc à chaque instant en une série de lignes droites concourant en un point variable, qui, entraîné par le plan tangent mobile, parcourt précisément la courbe donnée, et lorsque le développement sera terminé, il en sera évidemment de même, et toutes les développées transformées iront concourir en un même point.

618. La courbe lieu des centres de courbure d'une courbe donnée est située sur la surface lieu des axes des cercles osculateurs qui contient toutes les développées, mais elle n'est jamais elle-même une développée. Chacun de ses points est le pied de la perpendiculaire abaissée du point correspondant de la courbe donnée sur la génératrice correspondante de la surface développable. Nous venons de voir qu'en supposant les points de la courbe primitive liés aux génératrices correspondantes de la surface développable et tournant avec les plans tangents dans le développement de celle-ci, pendant le mouvement de développement du plan mobile que l'on suppose enroulé sur la surface, chacun d'eux parcourra la courbe elle-même, en sorte qu'ils se trouveront tous réunis, après l'opération, au point même où viennent concourir les droites transformées des diverses développées. Les points de la courbe lieu des centres de courbure sont donc, après ce développement, les pieds des perpendiculaires abaissées d'un point fixe sur les transformées des génératrices, c'est-à-dire sur les tangentes à la courbe transformée de l'arête de rebroussement lieu des centres des sphères osculatrices.

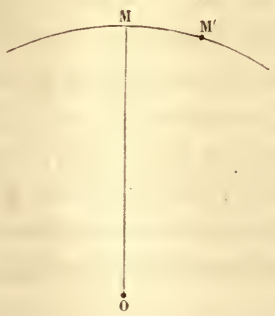
619. Toutes les développées se transformant, par le développement de la surface développable qui les contient, en droites issues d'un même point, l'une de ces droites représente, non-seulement la développée qui lui correspond, mais encore toutes les tangentes à cette développée supposées entraînées dans le développement avec le plan tangent qui les contient. Si l'on considère deux développées différentes, les tangentes à ces développées qui correspondent à un même point de la courbe primitive sont situées dans un même plan normal à celle-ci, et, par conséquent, dans un même plan tangent à la surface développable lieu des développées. Le développement n'altérera donc pas l'angle qu'elles forment, et cet angle est égal, par conséquent, à celui des deux droites qui, après le développement, représentent les deux développées. D'après cela, si l'on considère deux développées d'une même courbe à double courbure, et les deux groupes de normales à celle-ci, qui sont tangentes à chacune d'elles, ces normales se couperont deux à deux sur la

courbe donnée sous un angle constant. En d'autres termes, si l'on considère les normales qui enveloppent une première développée, pour obtenir celles qui en enveloppent une seconde, il suffira de faire tourner chacune d'elles d'un angle constant autour du point où elle rencontre la courbe, sans la faire sortir, bien entendu, du plan normal qui la contient.

620. Si l'on considère la série des normales qui enveloppent une même développée, l'angle formé par l'une d'elles avec le plan osculateur correspondant varie d'un point à l'autre, et reçoit en chaque point un accroissement constant lorsque l'on substitue une développée à une autre. La différentielle de cet angle est, par conséquent, indépendante de la développée considérée.

Cette différentielle est égale à l'angle de deux plans osculateurs infiniment voisins.

Soient, en effet, M et M′ deux points infiniment voisins d'une courbe à double courbure. Considérons celle des développées à laquelle est tangente la normale



principale en M : l'inclinaison de cette normale sur le plan osculateur étant égal à zéro, la différentielle cherchée est l'inclinaison du plan osculateur en M′ sur celle des normales au point M′ qui va rencontrer la normale MO. Or on a vu (599) que cette inclinaison est précisément l'angle des plans osculateurs en M et en M′.

621. L'analyse conduit aisément à la même conclusion. Considérons, comme nous l'avons fait (590), en un point M de la courbe donnée, la tangente, la normale principale et la perpendiculaire au plan osculateur qui forment un trièdre trirectangle. Soient α, β, γ, λ, μ, ν, ξ, υ, ζ, les angles formés par ces trois droites avec les axes de coordonnées ; désignons par λ', μ', ν', les angles formés avec les mêmes axes par celle des normales qui est tangente à la développée considérée ; en nommant θ l'angle de cette normale avec l'axe du cercle osculateur, on a

$$\cos\theta = \cos\lambda'\cos\xi + \cos\mu'\cos\upsilon + \cos\nu'\cos\zeta, \tag{1}$$

et par conséquent, en différentiant,

$$(2)\qquad \begin{aligned} -\sin\theta\, d\theta = {} & \cos\lambda' d\cos\xi + \cos\mu' d\cos\nu + \cos\nu' d\cos\zeta + \cos\xi d\cos\lambda' + \cos\nu d\cos\mu' \\ & + \cos\zeta d\cos\nu'; \end{aligned}$$

en nommant $d\eta$ l'angle de deux plans osculateurs infiniment voisins, on a

$$\begin{aligned} d\cos\xi &= d\eta\cos\lambda, \\ d\cos\nu &= d\eta\cos\mu, \\ d\cos\zeta &= d\eta\cos\nu; \end{aligned}$$

de plus, $d\cos\lambda'$, $d\cos\mu'$, $d\cos\nu'$ sont proportionnels aux cosinus des angles formés avec les axes par la normale principale de la développée qui est (613) parallèle à la tangente de la développante; il en résulte que la somme des trois derniers termes de l'équation (2) est égale à zéro, et cette équation se réduit à

$$(3)\qquad -\sin\theta\, d\theta = d\eta\,(\cos\lambda\cos\lambda' + \cos\mu\cos\mu' + \cos\nu\cos\nu').$$

Le multiplicateur de $d\eta$ dans le second membre est le cosinus de l'angle formé par la normale principale de la courbe donnée avec la normale qui touche la développée; il est évidemment égal à $\sin\theta$, et l'on a, par conséquent,

$$d\theta = -d\eta,$$

ce qui démontre la proposition énoncée.

Équation des développées.

622. Après le développement sur un plan de la surface développable qui contient toutes les développées, les génératrices sont représentées par des lignes droites tangentes à une même courbe qui est la transformée de l'arête de rebroussement. Les développées sont représentées par des lignes droites qui coupent ces diverses tangentes. Si l'on nomme α et α_0 les angles sous lesquels une même développée coupe deux génératrices de la surface développable, et Ω l'angle formé par ces génératrices après le développement, on a, évidemment,

$$\alpha - \alpha_0 = \Omega.$$

Cela posé, pour chercher l'équation des développées, après avoir choisi sur la surface développable une génératrice initiale à laquelle correspond l'angle α_0, on calculera l'angle Ω relatif à une génératrice quelconque. Cette détermination exigera l'emploi du calcul intégral. La différentielle $d\Omega$, angle de deux génératrices infiniment voisines de la surface développable, est en effet l'angle de deux plans osculateurs correspondants de la courbe donnée, et peut être considérée comme

connue. Supposons que l'on en ait déduit l'expression de Ω en fonction des coordonnées du point correspondant de la courbe donnée. Soit ρ le rayon de courbure en ce point, et ρ_1 sa distance au point correspondant de la développée. ρ_1 est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont l'un des côtés est ρ, et dans lequel l'angle opposé à ce côté est $\alpha_0 + \Omega$: on a donc

$$\rho_1 = \frac{\rho}{\sin(\alpha_0 + \Omega)}.$$

Cette valeur de ρ_1 permettra, lorsqu'on aura choisi α_0, de déterminer le point de la développée correspondant à un point donné de la développante, et les coordonnées d'un point pourront ainsi s'exprimer en fonction d'une seule variable, dont l'élimination fera connaître les équations de la courbe.

623. M. O. Bonnet a proposé, pour la détermination analytique des développées, une méthode plus directe, sur laquelle nous aurons à revenir. Nous nous bornerons ici à montrer comment il ramène le problème à la détermination d'une fonction satisfaisant à une certaine équation différentielle.

Le plan osculateur de la développée contient la tangente et la normale principale; la première de ces lignes est normale à la développante, et la seconde (611) parallèle à la tangente de celle-ci. Il en résulte que les plans osculateurs d'une développée sont des plans menés par les tangentes de la courbe proposée, et tels, que l'intersection de chacun d'eux par le plan infiniment voisin soit une normale à la courbe.

C'est en exprimant cette propriété que l'on trouve l'équation annoncée.

Soient

$$x = az + p, \quad y = bz + q, \tag{1}$$

les équations de la tangente à la courbe proposée, a, b, p, q, étant des fonctions connues d'un même paramètre α, vérifiant (572) la condition

$$\frac{da}{dp} = \frac{db}{dq}. \tag{2}$$

Le plan osculateur de la développée passant par la droite (1) a pour équation

$$(x - az - p) + \lambda(y - bz - q) = 0, \tag{3}$$

où λ représente une fonction inconnue de α. La tangente à la développée étant l'intersection de deux plans osculateurs infiniment voisins, est représentée par l'équation (3) et par sa différentielle

$$z\,da + dp + \lambda(z\,db + dq) - d\lambda(y - bz - q) = 0. \tag{4}$$

La condition pour que la droite représentée par les équations (3) et (4) soit perpendiculaire à la tangente de la courbe donnée est

$$(a^2+b^2+1)\,d\lambda+\lambda(bdb-ada)-\lambda^2(adb+bda)=0,$$

et si l'on trouve une fonction λ qui satisfasse à cette équation, on aura l'équation générale des plans osculateurs de la développée, et l'on pourra (575) en déduire l'équation de celle-ci.

EXERCICES.

1. Les équations d'une courbe étant données, reconnaître si cette courbe est située tout entière sur une même sphère.

2. Le plan mené par une tangente et par un point pris sur la courbe à distance infiniment petite du point de contact forme avec le plan osculateur un angle égal au tiers de celui de deux plans osculateurs infiniment voisins.

3. La perpendiculaire commune à deux tangentes infiniment voisines forme, avec la perpendiculaire à l'un des plans osculateurs correspondants, un angle égal à la moitié de l'angle de deux plans osculateurs infiniment voisins.

4. On donne deux courbes tangentes l'une à l'autre en un point O; à partir de ce point on porte sur chacune d'elles une longueur infiniment petite égale à l: trouver la direction limite de la ligne qui réunit les extrémités de ces longueurs.

5. Les centres de courbure de toutes les projections d'une courbe sur des plans conduits par la tangente en un point sont situés sur une même droite perpendiculaire au plan osculateur de la courbe.

CHAPITRE V.

THÉORIE DE LA COURBURE DES SURFACES.

Courbure des sections normales.

624. La courbure d'une surface en un point n'offre pas une idée aussi simple que celle d'une ligne courbe, et pour la faire connaître il semble nécessaire de déterminer, non-seulement les courbures des sections, mais encore celle des lignes à double courbure qui passent par le point considéré. Ces diverses courbures sont liées, pour une surface quelconque, par des lois remarquables que nous allons faire connaître dans ce chapitre.

Nous étudierons d'abord la courbure des sections faites dans la surface par les plans normaux. Prenons pour axe des Z la normale OZ en un point O de la surface considérée, et pour axes des X et des Y des droites perpendiculaires l'une à l'autre, menées dans le plan tangent en O. Soit $z = \varphi(x, y)$ l'équation de la surface rapportée à ces axes. z, $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$ sont évidemment nuls tous les trois lorsque l'on suppose $x = 0$, $y = 0$. Nous allons chercher la courbure de la section faite dans la surface par un plan conduit suivant l'axe des z, et incliné d'un angle α sur le plan ZOX. L'équation d'un tel plan est $y = x \operatorname{tang} \alpha$.

Rapportons la courbe suivant laquelle il coupe la surface donnée à deux axes situés dans son plan, dont l'un OZ soit précisément l'axe des Z, et l'autre OX_1 la trace de ce plan sur celui des XY. En nommant x_1 et z_1 les coordonnées d'un point quelconque de la courbe par rapport à ces nouveaux axes, et x, y, z celles du même point par rapport aux axes primitifs, on a évidemment

$$(1) \qquad \begin{aligned} z &= z_1, \\ x &= x_1 \cos\alpha, \\ y &= x_1 \sin\alpha, \end{aligned}$$

et par conséquent, le point étant situé sur la surface dont l'équation est $z = \varphi(x, y)$, on a

$$z_1 = \varphi(x_1 \cos\alpha,\ x_1 \sin\alpha);$$

c'est l'équation de la courbe rapportée aux axes OZ, OX_1, situés dans son plan. Le

rayon de courbure est donné par la formule

$$\rho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dz_1}{dx_1}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2 z_1}{dx_1^2}}, \tag{2}$$

dans laquelle il faut supposer $x_1 = 0$, et par suite $\frac{dz_1}{dx_1} = 0$, car la courbe est évidemment tangente à l'axe des X_1. Pour calculer $\frac{d^2 z_1}{dx_1^2}$, il suffit de différentier deux fois par rapport à x_1 l'équation

$$z = \varphi(x, y),$$

en se rappelant les relations (1); on obtient ainsi

$$\frac{dz}{dx_1} = \frac{dz}{dx}\cdot\frac{dx}{dx_1} + \frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx_1} = \cos\alpha\frac{dz}{dx} + \sin\alpha\frac{dz}{dy}, \tag{3}$$

et en différentiant de nouveau par rapport à x_1,

$$\frac{d^2 z}{dx_1^2} = \cos^2\alpha\frac{d^2 z}{dx^2} + 2\sin\alpha\cos\alpha\frac{d^2 z}{dx\,dy} + \sin^2\alpha\frac{d^2 z}{dy^2}. \tag{4}$$

Les formules (3) et (4) se rapportent à un point quelconque de la courbe d'intersection; pour en déduire les valeurs des dérivées relatives au point O, origine des coordonnées, il faut y supposer $x = 0$, $y = 0$, et on a alors $\frac{dz}{dx} = 0$, $\frac{dz}{dy} = 0$; les dérivées du second ordre $\frac{d^2 z}{dx^2}$, $\frac{d^2 z}{dx\,dy}$, $\frac{d^2 z}{dy^2}$ prennent des valeurs déterminées que nous représenterons par A, B, C, et nous aurons

$$\frac{dz}{dx_1} = 0,$$
$$\frac{d^2 z}{dx_1^2} = A\cos^2\alpha + 2B\sin\alpha\cos\alpha + C\sin^2\alpha;$$

z ne différant pas de z_1, les valeurs substituées dans l'équation (2) font connaître le rayon de courbure ρ, et l'on a

$$\rho = \frac{1}{A\cos^2\alpha + 2B\sin\alpha\cos\alpha + C\sin^2\alpha}.$$

Cette formule résout complétement le problème; elle montre que la loi suivant laquelle varie le rayon de courbure ρ est toujours la même, et que les valeurs numériques des trois constantes A, B, C varient seules d'une surface à l'autre.

625. Il peut sembler bien extraordinaire, au premier abord, que la loi suivant

laquelle varient les rayons de courbure des sections d'une surface soit déterminée indépendamment de la définition particulière de celle-ci. Rien ne semble en effet rattacher les unes aux autres les diverses valeurs du rayon de courbure. Lorsque l'on se donne un point d'une surface et la normale en ce point, les sections faites dans la surface par les divers plans conduits suivant la normale restent arbitraires et indépendantes les unes des autres. Quelles que soient les courbes, pourvu qu'elles se succèdent en se déformant suivant une loi continue, leur ensemble formera une surface, et rien ne restreint évidemment la loi suivant laquelle peuvent varier les rayons de courbure. Ce raisonnement bien simple montre seulement que le théorème précédemment démontré doit présenter des exceptions. Sa démonstration elle-même, si on l'examine de près, conduit d'ailleurs à la même conclusion. Nous avons admis en effet que les dérivées $\frac{d^2z}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dx\,dy}$, $\frac{d^2z}{dy^2}$ prennent, lorsqu'on y suppose $x=0$, $y=0$, des valeurs déterminées qui ont été désignées par A, B, C; or il peut arriver que ces expressions, quoique fonctions déterminées de x et de y, deviennent indéterminées pour ce système particulier de valeurs. C'est ce qui a lieu par exemple lorsqu'elles dépendent du rapport $\frac{y}{x}$, dont, pour $x=0$, $y=0$, la valeur est arbitraire. Ces exceptions, qui ne peuvent se présenter qu'en des points singuliers de certaines surfaces, ont d'ailleurs peu d'importance, elles n'infirment pas plus la théorie générale de la courbure, que l'existence d'un point anguleux tel que le sommet d'un cône n'infirme celle du plan tangent.

626. La courbure $\frac{1}{\rho}$ d'une section normale quelconque a pour expression

$$\frac{1}{\rho} = A\cos^2\alpha + 2B\sin\alpha\cos\alpha + C\sin^2\alpha.$$

Les constantes A, B, C, qui varient d'une surface à l'autre, et d'un point à l'autre sur une même surface, suffisent, quand elles sont connues, pour déterminer les courbures de toutes les sections normales.

Lorsque l'angle α varie, le trinôme qui représente $\frac{1}{\rho}$ passe par une valeur maxima et par une valeur minima que l'on obtiendra toutes deux en égalant la dérivée à zéro; on a ainsi

$$(C-A)\sin 2\alpha + 2B\cos 2\alpha = 0,$$

$$\operatorname{tang} 2\alpha = \frac{2B}{A-C}.$$

Cette équation fournit pour α un nombre infini de valeurs auxquelles correspondent, comme on sait, deux directions perpendiculaires l'une à l'autre. La seconde

dérivée de $\frac{1}{\rho}$ est

$$2(C-A)\cos 2\alpha - 4B\sin 2\alpha.$$

Si l'on y remplace successivement α par les deux valeurs α_1 et $\alpha_1 + \frac{\pi}{2}$, qui annulent la première dérivée, on obtient évidemment deux résultats de signes contraires. L'une de ces valeurs correspond par conséquent à un maximum, et l'autre à un minimum.

627. Les deux sections normales, perpendiculaires l'une à l'autre, et dont les courbures sont maxima et minima, se nomment les sections principales de la surface au point considéré.

Si nous prenons les plans de ces deux sections, dont l'existence est maintenant démontrée, pour plan des ZX et pour plan des ZY, les valeurs maxima et minima de la courbure correspondront à $\alpha = 0$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$, et l'on aura alors, pour l'une et pour l'autre,

$$\operatorname{tang} 2\alpha = 0;$$

la constante désignée par B doit par conséquent être égale à zéro, et l'expression de la courbure d'une section quelconque prend la forme

$$\frac{1}{\rho} = A\cos^2\alpha + C\sin^2\alpha. \tag{1}$$

Pour obtenir les courbures maxima et minima que nous nommerons $\frac{1}{R_1}$ et $\frac{1}{R_2}$, il faut faire successivement $\alpha = 0$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$, et l'on trouvera $\frac{1}{R_1} = A$, $\frac{1}{R_2} = B$, en sorte que l'expression générale de la courbure d'une section normale peut se mettre sous la forme

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{R_1}\cos^2\alpha + \frac{1}{R_2}\sin^2\alpha. \tag{2}$$

De cette équation on déduit un théorème remarquable.

Si l'on considère deux sections normales perpendiculaires l'une à l'autre, on obtiendra leurs courbures au point O, en remplaçant successivement dans l'équation (2) α par deux valeurs ω et $\omega + \frac{\pi}{2}$; on aura ainsi

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{1}{R_1}\cos^2\omega + \frac{1}{R_2}\sin^2\omega,$$

$$\frac{1}{\rho_2} = \frac{1}{R_1}\sin^2\omega + \frac{1}{R_2}\cos^2\omega;$$

on en déduit

$$\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2},$$

c'est-à-dire que la somme des courbures de deux sections perpendiculaires l'une à l'autre est constante et égale à la somme des courbures maxima et minima.

628. Nous devons remarquer que la formule employée pour le rayon de courbure indique par le signe qu'elle lui assigne (492) le sens de la courbure. L'expression générale de $\frac{1}{\rho}$ est donc susceptible de devenir, suivant les cas, positive ou négative, et la valeur zéro, lorsqu'elle est atteinte, n'est pas, en général, une valeur minima. Si donc le rayon de courbure d'une section est infini, il ne doit pas, d'après notre analyse, être considéré comme un rayon de courbure maximum, et la section qui lui correspond n'est pas en général une section principale.

Si nous considérons, par exemple, un hyperboloïde gauche, parmi les sections normales que l'on y peut faire autour d'un point, il y en a deux qui sont rectilignes, et pour lesquelles la courbure $\frac{1}{\rho}$ est égale à zéro. Ce ne sont pas des sections principales: $\frac{1}{\rho}$ en devenant nul change en effet de signe et n'acquiert pas une valeur maxima. Les sections principales sont celles qui correspondent aux plus grandes valeurs absolues, l'une positive et l'autre négative, de $\frac{1}{\rho}$. Les sections principales sont donc deux sections à courbures opposées, et dont chacune a un rayon de courbure minimum entre toutes celles qui sont courbées dans le même sens.

Courbure d'une section oblique.

629. Considérons actuellement une section oblique de la surface, et cherchons l'expression de son rayon de courbure en un point. Prenons toujours pour axe des Z la normale à la surface au point considéré, et supposons l'axe des X dirigé suivant la droite d'intersection du plan tangent et du plan de la section considérée. Ce plan, passant alors par l'axe des X, aura pour équation

$$y = z \operatorname{tang} \gamma, \tag{1}$$

où γ désigne l'angle qu'il forme avec le plan des XY. Soit

$$z = \varphi(x, y) \tag{2}$$

l'équation de la surface. Rapportons la courbe d'intersection à deux axes rectangulaires situés dans son plan, dont l'un soit l'axe des X actuel, et l'autre la trace du plan de la courbe sur celui des ZY; en nommant x_1, z_1 les coordonnées d'un point de la courbe par rapport à ces deux axes, et x, y, z les coordonnées du même

point par rapport aux trois axes primitifs, on a évidemment

$$(3)\qquad \begin{aligned} x &= x_1, \\ z &= z_1 \cos\gamma, \\ y &= z_1 \sin\gamma, \end{aligned}$$

et l'équation (2) donne par conséquent

$$(4)\qquad z_1 \cos\gamma = \varphi(x_1, z_1 \sin\gamma),$$

qui est l'équation de la courbe par rapport à des axes situés dans son plan. L'expression du rayon de courbure est

$$(5)\qquad \rho_\gamma = \frac{\left[1 + \left(\frac{dz_1}{dx_1}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2 z_1}{dx_1^2}}.$$

Pour obtenir les dérivées $\frac{dz_1}{dx_1}$, $\frac{d^2 z_1}{dx_1^2}$, qui y figurent, prenons la dérivée par rapport à x_1 de l'équation

$$z = \varphi(x_1 y);$$

en se rappelant les formules (3), on aura

$$(6)\qquad \frac{dz_1}{dx_1}\cos\gamma = \frac{dz}{dx} + \frac{dz}{dy}\cdot\frac{dz_1}{dx_1}\sin\gamma.$$

Cette équation fournira la valeur de $\frac{dz_1}{dx_1}$; en prenant de nouveau la dérivée par rapport à x_1, on obtiendra $\frac{d^2 z_1}{dx_1^2}$, mais comme nous voulons avoir seulement la valeur relative à $x_1 = 0$, le calcul est susceptible d'une simplification. Remarquons en effet que le dernier terme du second membre contient deux facteurs $\frac{dz_1}{dx_1}$ et $\frac{dz}{dy}$, qui, évidemment, s'annulent au point considéré. Or, pour prendre la dérivée de ce produit, on ne doit faire porter la différentiation que sur un seul facteur à la fois: les deux termes qui composent cette dérivée sont par conséquent nuls, quand on y suppose $x_1 = 0$, il est donc inutile de les écrire, et l'on a, pour le point particulier qui nous occupe,

$$(7)\qquad \frac{d^2 z_1}{dx_1^2}\cos\gamma = \frac{d^2 z}{dx^2} + \frac{d^2 z}{dx\,dy}\cdot\sin\gamma\,\frac{dz_1}{dx_1};$$

$\frac{dz_1}{dx_1}$ étant nul, puisque la courbe est évidemment tangente à l'axe des X, il reste,

pour le point O,

$$\frac{d^2 z_1}{dx_1^2} = \frac{\frac{d^2 z}{dx^2}}{\cos\gamma}, \tag{8}$$

la valeur de $\frac{d^2 z}{dx^2}$ correspondant au point dont les coordonnées sont $x = 0$, $y = 0$, et étant, par conséquent, une constante déterminée que nous désignerons par A. D'après ce résultat, et $\frac{dz_1}{dx_1}$ étant égal à zéro, la valeur du rayon de courbure ρ_γ devient

$$\rho_\gamma = \frac{\cos\gamma}{A}. \tag{9}$$

Si l'on fait $\gamma = 0$, cette formule représente le rayon de courbure de la section normale conduite suivant l'axe des X, et l'on a, en le désignant par ρ_x,

$$\rho_x = \frac{1}{A}. \tag{10}$$

On conclut des équations (9) et (10)

$$\rho_\gamma = \rho_x \cos\gamma, \tag{11}$$

et par conséquent le rayon de courbure d'une section oblique est égal au rayon de courbure de la section normale qui a même tangente, multiplié par le cosinus de l'angle formé par le plan des deux sections.

Courbure d'une ligne à double courbure.

630. On peut déduire du théorème précédent le rayon de courbure d'une ligne quelconque tracée sur une surface donnée. Nous allons prouver en effet que la courbure, en un point quelconque, d'une ligne tracée sur une surface, est égale à celle de la section plane faite dans la surface par le plan osculateur de la ligne considérée en ce point.

Le plan osculateur est en effet, dans le voisinage de son point de contact, à une distance infiniment petite du troisième ordre de la courbe, c'est-à-dire, comme on l'a expliqué (562), qu'un point situé sur la courbe à distance infiniment petite du premier ordre du point de contact est à distance infiniment petite du troisième ordre du plan osculateur. Il en résulte évidemment qu'il est aussi à distance infiniment petite du troisième ordre de l'intersection de la surface par le plan osculateur, le seul cas d'exception possible étant celui où le plan osculateur est tangent à la surface, et par conséquent, en laissant de côté ce cas exceptionnel, les deux courbes ont même cercle osculateur.

Il résulte de là que le rayon de courbure d'une courbe quelconque tracée sur une surface est égal au rayon de courbure de la section normale qui a même tangente, multiplié par le cosinus de l'angle formé par le plan de cette section avec le plan osculateur de la courbe considérée. De toutes les courbes tracées sur une surface donnée et ayant même tangente, celle qui a le plus grand rayon de courbure est celle dont le plan osculateur est normal : elles sont évidemment en nombre infini.

Ligne minima sur une surface quelconque.

631. Il résulte du théorème précédent que sur une surface quelconque, la propriété caractéristique de la ligne minima est d'avoir en chaque point son plan osculateur normal à la surface. Il est évident en effet que si une ligne est la plus courte entre ses deux points extrêmes, elle est *à fortiori* la plus courte que l'on puisse mener entre deux points intermédiaires quelconques, et, en particulier, entre deux points infiniment voisins arbitrairement choisis sur sa longueur. Mais lorsque l'on se donne deux points infiniment voisins d'une surface, la corde de l'arc qui les réunit étant déterminée, cet arc est d'autant moindre (517) qu'il a un plus petit rayon de courbure : d'un autre côté, la tangente est déterminée, puisqu'elle peut être considérée comme confondue avec la corde infiniment petite que l'on s'est donnée; le rayon de courbure sera donc maximum si le plan osculateur est normal à la surface, et cette condition doit être remplie en chaque point de la courbe minima.

Ce théorème a déjà été démontré (616) dans le cas d'une surface développable; nous le déduirons plus tard d'une autre théorie, et nous aurons souvent occasion de l'appliquer.

Formules plus générales relatives à des axes de coordonnées quelconques.

632. Après avoir obtenu les formules générales qui permettent d'exprimer le rayon de courbure d'une courbe quelconque tracée sur une surface, en fonction des rayons de courbure principaux et des éléments qui déterminent la position du plan osculateur de la courbe considérée, il est indispensable de reprendre la même théorie sans faire aucune hypothèse sur la position des axes de coordonnées, afin de pouvoir trouver, pour une surface quelconque rapportée à des axes quelconques, la position des sections principales et l'expression de leurs courbures.

Considérons une courbe quelconque située sur une surface donnée rapportée à des axes quelconques, et cherchons l'expression de son rayon de courbure.

x, y, z étant les coordonnées d'un point de la courbe, le plan normal en ce point a pour équation

$$(t-x)\,dx+(u-y)\,dy+(v-z)\,dz=0. \tag{1}$$

L'équation du plan normal infiniment voisin s'obtiendra en changeant x, y, z en $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$, de sorte que la droite suivant laquelle se coupent les deux plans, c'est-à-dire l'axe du cercle osculateur, est représentée par l'équation (1) jointe à sa différentielle

$$(t-x)\,d^2x+(u-y)\,d^2y+(v-z)\,d^2z-dx^2-dy^2-dz^2=0. \tag{2}$$

Cette droite représentée par les équations (1) et (2) est la perpendiculaire élevée au plan osculateur de la courbe considérée par le centre de courbure de cette courbe : étant située dans le plan normal d'une courbe tracée sur la surface, elle rencontre évidemment la normale à la surface dont les équations sont

$$\begin{aligned} t-x+p(v-z)&=0,\\ u-y+q(v-z)&=0, \end{aligned} \tag{3}$$

et la combinaison des quatre équations précédentes donne pour coordonnées du point d'intersection

$$\begin{aligned} t&=x-\frac{p}{\mathrm{D}},\\ u&=y-\frac{q}{\mathrm{D}},\\ v&=z+\frac{1}{\mathrm{D}}, \end{aligned} \tag{4}$$

en posant

$$d^2z-p\,d^2x-q\,d^2y=\mathrm{D}\,ds^2. \tag{5}$$

Soit N la portion de normale à la surface, comprise entre la surface et le point dont nous venons de déterminer les coordonnées : le rayon de courbure que nous cherchons est évidemment la projection de N sur le plan osculateur de la courbe. Si donc nous désignons par θ l'angle formé par la normale à la surface avec le rayon de courbure de la courbe, l'expression du rayon de courbure ρ sera

$$\rho=\mathrm{N}\cos\theta; \tag{6}$$

mais les équations (4) donnent

$$\mathrm{N}^2=(t-x)^2+(u-y)^2+(v-z)^2=\frac{1+p^2+q^2}{\mathrm{D}^2}, \tag{7}$$

on en conclut, en ayant égard à (5),

$$\rho=\frac{\cos\theta\sqrt{1+p^2+q^2}}{\dfrac{d^2z}{ds^2}-p\dfrac{d^2x}{ds^2}-q\dfrac{d^2y}{ds^2}}; \tag{8}$$

or on a

$$dz=p\,dx+q\,dy;$$

en différentiant par rapport à l'arc s de la courbe considérée et posant

$$\frac{d^2z}{dx^2} = r, \quad \frac{d^2z}{dx\,dy} = s, \quad \frac{d^2z}{dy^2} = t,$$

on en déduit

$$d^2z = pd^2x + qd^2y + rdx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2,$$

et par conséquent

$$d^2z - pd^2x - qd^2y = rdx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2, \tag{9}$$

ce qui donne

$$D = r\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + 2s\left(\frac{dx}{ds}\right)\left(\frac{dy}{ds}\right) + t\left(\frac{dy}{ds}\right)^2; \tag{10}$$

ou, en nommant α, β, γ les angles que la tangente à la courbe forme avec les axes,

$$D = r\cos^2\alpha + 2s\cos\alpha\cos\beta + t\cos^2\beta, \tag{11}$$

et enfin

$$\rho = \frac{\sqrt{1+p^2+q^2}\cos\theta}{r\cos^2\alpha + 2s\cos\alpha\cos\beta + t\cos^2\beta}. \tag{12}$$

On voit, par cette formule, que α et β restant constants, ρ est proportionnel à $\cos\theta$. Si la courbe considérée a son plan osculateur normal à la surface, l'angle θ est nul, et le facteur $\cos\theta$ se réduit à l'unité; la formule (12) exprime alors le rayon de courbure de la section normale conduite suivant la tangente considérée. On voit que pour obtenir le rayon de courbure de toute autre ligne située sur la surface et ayant même tangente, il faut multiplier le rayon de la section normale par le cosinus de l'angle qu'elle forme avec le rayon de courbure de la courbe considérée.

633. Si nous nous bornons à considérer les sections normales faites en un point donné O d'une surface, l'expression générale de leur rayon de courbure est, d'après ce qui précède,

$$\rho = \frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{r\cos^2\alpha + 2s\cos\alpha\cos\beta + t\cos^2\beta}; \tag{1}$$

p, q, r, s, t sont des dérivées partielles, elles se réduisent pour le point considéré à des constantes dont la valeur numérique doit être considérée comme connue. Les seules quantités qui varient avec la direction de la section sont les angles α et β formés par la tangente avec les axes des X et des Y.

Pour déterminer les directions des sections principales, il faut chercher quelles valeurs de α et de β rendent maximum ou minimum le dénominateur

$$r\cos^2\alpha + 2s\cos\alpha\cos\beta + t\cos^2\beta; \tag{2}$$

$\cos\alpha$ et $\cos\beta$ étant liés à l'angle γ formé par la tangente avec l'axe des z, par l'équation

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1, \tag{3}$$

qui a lieu pour toute direction, et par la relation

$$\cos\gamma=p\cos\alpha+q\cos\beta, \tag{4}$$

exprimant que la direction de la tangente est perpendiculaire à la normale, qui forme, comme on sait, avec les axes, des angles dont les cosinus sont proportionnels à p, q, -1.

L'élimination de $\cos\gamma$ entre les deux équations (3) et (4) donne

$$(1+p^2)\cos^2\alpha+2pq\cos\alpha\cos\beta+(1+q^2)\cos^2\beta=1; \tag{5}$$

l'expression (2) devant être maxima ou minima, sous la condition que l'équation (5) soit satisfaite, il faut égaler à zéro les deux différentielles, et l'on a

$$(r\cos\alpha+s\cos\beta)\,d\cos\alpha+(s\cos\alpha+t\cos\beta)\,d\cos\beta=0,$$
$$[(1+p^2)\cos\alpha+pq\cos\beta]\,d\cos\alpha+[(1+q^2)\cos\beta+pq\cos\alpha]\,d\cos\beta=0.$$

De ces deux équations on déduit, par l'élimination des différentielles,

$$\frac{r\cos\alpha+s\cos\beta}{(1+p^2)\cos\alpha+pq\cos\beta}=\frac{t\cos\beta+s\cos\alpha}{(1+q^2)\cos\beta+pq\cos\alpha}, \tag{6}$$

c'est-à-dire

$$[pqt-(1+q^2)s]\cos^2\beta+[(1+p^2)t-(1+q^2)r]\cos\alpha\cos\beta+[(1+p^2)s-pqr]\cos^2\alpha=0, \tag{7}$$

et cette équation jointe aux relations (3) et (4) déterminera la direction des sections principales. On peut aisément vérifier que leurs directions sont perpendiculaires l'une à l'autre. Écrivons en effet l'équation (7) sous la forme

$$A\cos^2\beta+B\cos\alpha\cos\beta+C\cos^2\alpha=0. \tag{8}$$

Soient α, β, γ, α', β', γ' les angles formés avec les axes par les tangentes aux sections principales, on a

$$\cos\gamma=p\cos\alpha+q\cos\beta,$$
$$\cos\gamma'=p\cos\alpha'+q\cos\beta',$$

et l'équation qui exprime la perpendicularité,

$$\cos\alpha\cos\alpha'+\cos\beta\cos\beta'+\cos\gamma\cos\gamma'=0,$$

peut être remplacée par

$$\cos\alpha\cos\alpha'(1+p^2)+\cos\beta\cos\beta'(1+q^2)+pq(\cos\alpha\cos\beta'+\cos\beta\cos\alpha')=0,$$

c'est-à-dire, en divisant par $\cos\beta\cos\beta'$,

$$\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}\cdot\frac{\cos\alpha'}{\cos\beta'}(1+p^2)+(1+q^2)+pq\left(\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}+\frac{\cos\alpha'}{\cos\beta'}\right)=0. \tag{9}$$

Or $\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}$, $\frac{\cos\alpha'}{\cos\beta'}$ sont les deux racines de l'équation (7) dans laquelle on considère $\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}$ comme inconnue; on a donc

$$\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}\cdot\frac{\cos\alpha'}{\cos\beta'}=\frac{A}{C},$$

$$\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}+\frac{\cos\alpha'}{\cos\beta'}=-\frac{B}{C},$$

et l'équation (9) devient

$$\frac{A}{C}(1+p^2)+(1+q^2)-\frac{B}{C}pq=0,$$

ou

$$A(1+p^2)+C(1+q^2)-Bpq=0,$$

équation qui devient identique lorsque l'on y remplace A, B, C par leurs valeurs.

634. Après avoir déterminé les directions des sections principales, il nous reste à trouver l'expression des rayons de courbure correspondants. Reprenons pour cela l'équation

$$\rho=\frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{r\cos^2\alpha+2s\cos\alpha\cos\beta+t\cos^2\beta}, \tag{1}$$

et la relation

$$\frac{r\cos\alpha+s\cos\beta}{(1+p^2)\cos\alpha+pq\cos\beta}=\frac{t\cos\beta+s\cos\alpha}{(1+q^2)\cos\beta+pq\cos\alpha}. \tag{6}$$

Si l'on multiplie par $\cos\alpha$ les deux termes de la fraction qui forme le premier membre de l'équation (6), et par $\cos\beta$ ceux de la fraction qui forme le second membre, et que l'on ajoute ensuite les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux pour former une fraction égale à chacune des deux autres, le numérateur de la fraction ainsi obtenue sera précisément le dénominateur D de la valeur de ρ, et le dénominateur, en vertu de l'équation (5), est égal à l'unité. On a donc

$$\frac{r\cos\alpha+s\cos\beta}{(1+p^2)\cos\alpha+pq\cos\beta}=D, \tag{10}$$

$$\frac{t\cos\beta+s\cos\alpha}{(1+q^2)\cos\beta+pq\cos\alpha}=D. \tag{11}$$

En éliminant entre ces équations le rapport $\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}$, on trouve

$$(12)\qquad (1+p^2+q^2)\,D^2 - D\left[(1+p^2)\,t+(1+q^2)\,r-2pqs\right]+rt-s^2=0,$$

et puisque l'on a

$$\rho=\frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{D},$$

on en conclut

$$(13)\quad \rho^2(rt-s^2)-\rho\sqrt{1+p^2+q^2}\left[(1+p^2)\,t+(1+q^2)\,r-2pqs\right]+(1+p^2+q^2)^2=0.$$

Cette équation a pour racines les deux rayons de courbure principaux de la surface au point considéré; ces rayons sont toujours réels; il est facile de vérifier que l'équation a en effet toujours ses racines réelles; d'après la relation qui lie ρ à D, il suffit de prouver qu'il en est ainsi de l'équation (12) en D: or cette équation peut être mise sous la forme

$$(14)\qquad \left[D(1+p^2)-r\right]\left[D(1+q^2)-t\right]-(s-pqD)^2=0,$$

et il est clair qu'en substituant successivement à D, dans le premier membre, les valeurs

$$D=-\infty,\quad D=\frac{r}{1+p^2},\quad D=+\infty,$$

on obtient les signes $+$, $-$, $+$; l'équation a donc deux racines réelles, l'une plus petite et l'autre plus grande que $\frac{r}{1+p^2}$. On aurait pu substituer à cette fraction $\frac{t}{1+q^2}$, et l'on aurait vu de même que l'une des racines est moindre, et l'autre plus grande que $\frac{t}{1+q^2}$.

635. Il résulte des remarques précédentes que les deux racines de l'équation en D, et par suite les deux valeurs de ρ, ne peuvent être égales que si l'on a

$$\frac{r}{1+p^2}=\frac{t}{1+q^2};$$

de plus, la valeur commune de ces deux fractions est alors évidemment la valeur de D qui satisfait à l'équation (14), et l'on doit avoir par conséquent

$$s-pqD=0,$$

c'est-à-dire que chacune des fractions doit être égale à $\frac{s}{pq}$.

Les conditions nécessaires et suffisantes pour que les rayons de courbure soient égaux sont par conséquent

$$\frac{r}{1+p^2}=\frac{t}{1+q^2}=\frac{s}{pq}.$$

Il est important de remarquer qu'elles sont au nombre de deux, et que, réunies à l'équation de la surface, elles déterminent par conséquent un nombre fini de points que l'on nomme des ombilics, et pour lesquels toutes les sections normales ont même courbure.

636. L'équation

$$\text{(1)}\qquad A\cos^2\beta+B\cos\alpha\cos\beta+C\cos^2\alpha=0,$$

à laquelle satisfont les cosinus des angles formés avec deux des axes par l'une des directions principales, conduit à une relation remarquable entre les variations infiniment petites des quantités x, y, z, p, q, lorsqu'on se déplace successivement sur chacune des deux sections. Désignons en effet par la lettre d la différentielle relative à un déplacement effectué sur l'une des sections, et par la lettre δ celle qui se rapporte à un déplacement sur l'autre section : les valeurs de $\cos\beta$ et de $\cos\alpha$ correspondant à la première section sont proportionnelles à dy et à dx, et celles qui correspondent à la seconde le sont à δy et à δx; $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{\delta y}{\delta x}$ sont par conséquent les deux racines de l'équation

$$\text{(2)}\qquad Au^2+Bu+C=0,$$

et l'on a

$$\frac{dy}{dx}\cdot\frac{\delta y}{\delta x}=\frac{C}{A},$$

$$\frac{dy}{dx}+\frac{\delta y}{\delta x}=-\frac{B}{A}.$$

On a d'ailleurs identiquement, comme on peut le vérifier, d'après les valeurs de A, B, C,

$$Ar+Ct=Bs,$$

et par conséquent,

$$r+t\frac{dy}{dx}\frac{\delta y}{\delta x}+s\left(\frac{dy}{dx}+\frac{\delta y}{\delta x}\right)=0,$$

c'est-à-dire

$$dx(r\delta x+s\delta y)+dy(s\delta x+t\delta y)=0;$$

mais on a,

$$r\delta x+s\delta y=\delta p,\quad s\delta x+t\delta y=\delta q,$$

par conséquent,

$$dx\,\delta p + dy\,\delta q = 0; \tag{3}$$

on a évidemment aussi

$$\delta x\,dp + \delta y\,dq = 0. \tag{4}$$

Ces deux équations sont l'expression d'un théorème fort important sur lequel nous aurons à revenir; elles expriment que les normales à la surface menée par deux points infiniment voisins d'une section principale peuvent être considérées comme se rencontrant lorsque l'on néglige les infiniment petits du second ordre. Les cosinus des angles formés avec les axes par la tangente à la section principale sont en effet proportionnels à dx, dy, dz, et ceux des angles formés par la normale le sont à p, q, -1. Ces deux directions étant perpendiculaires, on a

$$p\,dx + q\,dy - dz = 0. \tag{5}$$

La normale au point dont les coordonnées sont $x + \delta x$, $y + \delta y$, $z + \delta z$, forme avec les axes des angles dont les cosinus sont proportionnels à $p + \delta p$, $q + \delta q$, -1, et la condition nécessaire et suffisante pour qu'elle soit perpendiculaire à la tangente de la section principale au point x, y, z est

$$dx\,(p + \delta p) + dy\,(q + \delta q) - dz = 0,$$

qui se réduit, en vertu de (5), à

$$dx\,\delta p + dy\,\delta q = 0. \tag{6}$$

Cette équation exprime donc que la tangente à l'une des sections principales en un point, est perpendiculaire à la normale menée à la surface par le point infiniment voisin de l'autre section principale. Il faut et il suffit pour cela que les deux normales voisines se rencontrent et soient dans un même plan perpendiculaire à la tangente considérée. Comme on a d'ailleurs, dans les calculs, négligé les infiniment petits du second ordre, la rencontre des deux normales n'a pas lieu rigoureusement, et l'on doit dire seulement que leur plus courte distance est un infiniment petit d'ordre supérieur au premier. Les deux normales infiniment voisines qui se rencontrent étant situées dans le plan de la section principale, leur point d'intersection est précisément le centre de courbure de celle-ci, et la distance de ce point à la surface est égal à l'un des rayons de courbure principaux.

637. Les théorèmes précédents conduisent à une relation fort simple, qui caractérise les directions des sections principales, et peut dans certains cas être employée utilement.

Désignons par X, Y, Z les cosinus des angles formés par la normale de la surface considérée avec les axes de coordonnées, et considérons la section principale

en un point dont les coordonnées sont x, y, z; le point infiniment voisin de la même section a pour coordonnées $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$, les cosinus des angles formés avec les axes par la normale en ce point sont $X+dX$, $Y+dY$, $Z+dZ$; d'après ce qui a été dit, les deux normales se rencontrent au centre de courbure de la section normale considérée : en nommant R le rayon de courbure de cette section, les deux normales et l'arc infiniment petit ds qui sépare leurs points de départ sur la surface forment un triangle isocèle. La projection dx de la base sur l'axe des X est égale à la différence des projections des deux autres côtés, c'est-à-dire $R\,dX$, et l'on a par conséquent

$$\frac{dX}{dx} = \frac{1}{R};$$

on aura de même

$$\frac{dY}{dy} = \frac{1}{R},$$

$$\frac{dZ}{dz} = \frac{1}{R},$$

en sorte que l'on a

$$\frac{dX}{dx} = \frac{dY}{dy} = \frac{dZ}{dz}.$$

Cette condition est d'ailleurs caractéristique et exprime que le point dont les coordonnées sont $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$, est situé sur la section principale au point x, y, z. Il serait facile d'en déduire l'équation déjà trouvée plus haut pour la détermination des sections principales.

DÉMONSTRATION GÉOMÉTRIQUE DES THÉORÈMES PRÉCÉDENTS.

Indicatrice.

638. Les théorèmes qui précèdent, et en particulier celui qui fait connaître la loi suivant laquelle varie la courbure des sections normales en un point d'une surface, peuvent se déduire facilement et se représenter avec élégance à l'aide d'une courbe nommée *indicatrice* par M. Dupin, qui l'a considérée le premier.

L'indicatrice d'une surface en un point M de cette surface est la section faite à une distance infiniment petite du point M, par un plan parallèle au plan tangent en M : il faut observer seulement que si la courbe d'intersection a des dimensions finies, comme cela a lieu pour les surfaces à courbures opposées qui sont traversées par leur plan tangent, on donne le nom d'indicatrice à la seule portion de la courbe d'intersection qui est située à une distance infiniment petite du point M.

Nous commencerons par démontrer le théorème suivant :

En un point quelconque d'une surface l'indicatrice est une courbe du second degré.

Prenons pour axe des Z la normale à la surface au point considéré, et pour plan des XY le plan tangent en ce point. Soit

$$z = \varphi(x, y) \tag{1}$$

l'équation de la surface par rapport à ces axes. Un plan parallèle au plan tangent aura pour équation $z = h$, et l'indicatrice, projetée en vraie grandeur sur le plan des XY, sera représentée par l'équation

$$h = \varphi(x, y), \tag{2}$$

x et y étant infiniment petits pour tous les points de l'indicatrice : si l'on développe le second membre par le théorème de Maclaurin, on aura

$$h = \varphi(0, 0) + \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)_0 x + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)_0 y + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right)_0 x^2 + 2\left(\frac{d^2\varphi}{dx\,dy}\right)_0 xy + \left(\frac{d^2\varphi}{dy^2}\right)_0 y^2\right] + \mathrm{R},$$

R étant infiniment petit (**276**) par rapport aux termes qui le précèdent; d'ailleurs on a rigoureusement

$$\varphi(0, 0) = 0, \quad \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)_0 = 0,$$

puisque la surface passe par l'origine des coordonnées, et qu'elle est, en ce point, tangente au plan des XY; l'équation de l'indicatrice se réduit donc à

$$h = \frac{x^2}{2}\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right)_0 + xy\left(\frac{d^2\varphi}{dx\,dy}\right)_0 + \frac{y^2}{2}\left(\frac{d^2\varphi}{dy^2}\right)_0 + \mathrm{R}.$$

Soient $x'y'$ les coordonnées d'un point appartenant à une courbe semblable ayant pour centre de similitude l'origine, et m pour rapport de similitude, on aura

$$x' = mx, \quad y' = my,$$

$$h = \frac{x'^2}{2m^2}\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right)_0 + \frac{x'y'}{m^2}\left(\frac{d^2\varphi}{dx\,dy}\right)_0 + \frac{y'^2}{2m^2}\left(\frac{d^2\varphi}{dy^2}\right)_0 + \mathrm{R},$$

ou, en multipliant par m^2,

$$2hm^2 = x'^2\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right)_0 + 2x'y'\left(\frac{d^2\varphi}{dx\,dy}\right)_0 + y'^2\left(\frac{d^2\varphi}{dy^2}\right)_0 + 2m^2\mathrm{R}.$$

Supposons que m^2 augmente en même temps que h diminue, et de telle sorte que $m^2 h$ ait une limite finie k. x' et y' auront aussi alors des limites finies, et $m^2\mathrm{R}$

tendra vers zéro, puisque R est infiniment petit par rapport aux termes que la multiplication par m^2 a rendus finis. On aura donc à la limite

$$k = x'^2 \left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right)_0 + 2x'y' \left(\frac{d^2\varphi}{dx\,dy}\right)_0 + y'^2 \left(\frac{d^2\varphi}{dy^2}\right)_0, \tag{3}$$

et la courbe semblable à l'indicatrice est une courbe du second degré, ayant pour centre l'origine des coordonnées.

639. L'indicatrice peut être une ellipse ou une hyperbole; ces deux cas correspondent à deux formes très-différentes que peut avoir la surface autour du point considéré.

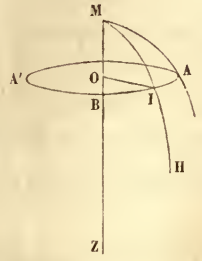
Lorsque l'indicatrice est une ellipse, en changeant h en $-h$, et par suite k en $-k$, l'équation représente une courbe imaginaire, et par conséquent les plans conduits d'un seul côté du plan tangent la coupent suivant des courbes réelles. La surface est donc tout entière du même côté de son plan tangent, et la forme elliptique de la section infiniment petite faite par un plan voisin de ce plan tangent montre suffisamment qu'elle ressemble à un paraboloïde elliptique dans le voisinage de son sommet.

Lorsque l'indicatrice est une hyperbole, si l'on change h en $-h$, et par suite k en $-k$, la courbe représentée par l'équation (3) demeure réelle. Les plans parallèles au plan tangent coupent donc la surface de quelque côté qu'ils soient menés, et celle-ci est située de part et d'autre du plan tangent qui par conséquent est traversé par elle. Si l'on considère alors les diverses sections faites au point considéré par des plans normaux à la surface, ces sections seront les unes au-dessus du plan tangent, les autres au-dessous; les premières seront coupées par le plan parallèle au plan tangent mené de l'un des côtés de ce plan, et les autres par celui qui est mené de l'autre côté, en sorte que chaque indicatrice a des rayons vecteurs réels correspondant aux sections normales courbées de l'un des côtés du plan, et des rayons vecteurs imaginaires correspondant à celles qui ont une courbure opposée. On voit que si l'on considère à la fois les deux indicatrices qui correspondent à des sections faites de part et d'autre du plan tangent, les rayons vecteurs réels de l'une correspondent aux rayons imaginaires de l'autre, et réciproquement; c'est d'ailleurs ce que montre l'équation (3), car en y attribuant à h, et par suite à k, deux valeurs égales et de signes contraires, on obtient deux hyperboles *conjuguées* ayant les mêmes asymptotes, mais situées dans des angles différents.

Loi de la courbure des sections normales.

640. Nous pouvons actuellement étudier la loi de variation de la courbure des sections normales d'une surface autour d'un point donné. Soient M ce point, MZ la

normale, ABA′ l'indicatrice dont A et A′ sont les sommets. Menons par la normale MZ un plan quelconque qui coupe la surface suivant la courbe MIH, le rayon de courbure de cette courbe sera donné par la formule (498) $2R=\frac{\overline{IO}^2}{OM}$, et comme OM



a la même valeur pour les diverses sections normales, le rayon de courbure est proportionnel au carré du rayon de l'indicatrice qui sert de trace au plan de la section considérée. On voit tout de suite, d'après cela, que les sections de plus grande et de moindre courbure ont pour traces les axes de l'indicatrice, et sont par conséquent perpendiculaires l'une à l'autre. De plus, la relation qui lie le rayon de courbure d'une section quelconque aux deux rayons maxima et minima, est la même que celle qui lie le carré du diamètre d'une section conique aux carrés des deux axes de la courbe; on aura donc, en nommant R et R′ les rayons maxima et minima, et ρ le rayon correspondant à la section qui forme l'angle φ avec la section dont le rayon est R′,

$$\rho=\frac{RR'}{R\cos^2\varphi+R'\sin^2\varphi},$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{\rho}=\frac{1}{R'}\cos^2\varphi+\frac{1}{R}\sin^2\varphi,$$

ce qui est précisément la relation obtenue (626).

641. Le cas où l'indicatrice est une hyperbole doit être examiné à part; il semble que la méthode ne s'applique qu'aux sections qui correspondent à des rayons vecteurs réels de l'indicatrice, et que pour étudier la courbure des autres sections, il soit nécessaire de considérer une seconde indicatrice déterminée par un plan situé de l'autre côté du plan tangent. Il n'en est rien cependant, et la considération d'une seule indicatrice peut fournir la courbure de toutes les sections sans exception. Remarquons, en effet, que les deux indicatrices situées de part et d'autre du plan tangent sont des hyperboles conjuguées, et que par conséquent les rayons vecteurs réels de l'une s'obtiennent en multipliant par $\sqrt{-1}$ les rayons imaginaires de l'autre, dirigés suivant le même diamètre. Or les rayons de courbure

étant proportionnels au carré du rayon de l'indicatrice, on peut tous les déduire d'une seule hyperbole en remarquant que les carrés des rayons imaginaires, étant négatifs, donnent précisément des rayons négatifs pour la section dont la courbure sera opposée à celle des sections dont le rayon est considéré comme positif.

Dans le cas où l'indicatrice est une hyperbole, il existe deux sections dont le rayon de courbure est infini, ce sont celles qui ont pour traces sur le plan tangent les asymptotes de l'indicatrice. Ces sections séparent celles qui sont courbées dans un sens, par rapport au plan tangent, de celles qui le sont en sens opposé; leur courbure étant nulle, elles sont situées à une distance infiniment petite du second ordre du plan tangent, et sont tangentes par conséquent à la courbe suivant laquelle ce plan coupe la surface.

Il peut sembler extraordinaire que ces sections, dont le rayon de courbure est infini, soient distinctes de celles dont le rayon de courbure est maximum; cela tient à ce que l'expression qu'on rend maxima ou minima est l'inverse du rayon de courbure, et que cette expression étant susceptible de signe, les valeurs négatives sont inférieures à zéro, et que, par suite, lorsque la courbure est nulle, elle n'est pas, analytiquement parlant, la moindre possible. Les courbures extrêmes sont la plus grande courbure absolue de la section dans l'un et dans l'autre sens.

642. Il peut arriver que l'indicatrice soit du genre parabolique; mais comme, d'après la forme de son équation, elle est toujours une courbe à centre, elle se réduit dans ce cas à deux droites parallèles; la section de moindre courbure a alors un rayon de courbure infini, et l'autre qui lui est perpendiculaire a une courbure finie. Cette circonstance se présente ordinairement en des points exceptionnels; mais pour la classe particulière des surfaces développables, l'indicatrice est partout parabolique, comme nous le montrerons plus loin.

Courbure d'une section oblique.

643. Soit OT une droite tangente à une surface en un point O; menons par cette droite et par la normale ON à la surface un plan qui coupe la surface suivant une courbe *ok*, et un second plan faisant avec le premier un angle θ, et coupant la surface suivant une courbe *ok'*. Pour comparer les courbures des deux sections, prenons sur la ligne OT, qui évidemment est tangente à toutes deux, une longueur infiniment petite OM, et par le point M élevons dans le plan des deux courbes les perpendiculaires MI, MI', qui formeront entre elles l'angle θ mesurant l'inclinaison de ces plans; la courbure de la première courbe est (498)

$$\frac{2\,\mathrm{MI}}{\overline{\mathrm{OM}}^2},$$

et celle de la seconde

$$\frac{2MI'}{\overline{OM}^2};$$

leur rapport est donc $\frac{MI}{MI'}$. Or le triangle MII′ est à la limite rectangle en I, car MI, parallèle à la normale en O, est infiniment voisin de la normale en I à la surface, et II′ est, à la limite, une tangente à cette surface; on a donc, puisque l'angle IMI′ est égal à θ,

$$\frac{MI}{MI'} = \cos\theta,$$

et par conséquent le rapport des deux courbures est $\cos\theta$. Le rayon de courbure d'une section oblique est donc, comme on l'a vu (629), égal au produit du rayon de courbure de la section normale correspondante, par le cosinus de l'angle formé par les plans des deux sections.

Tangentes conjuguées.

644. Deux tangentes parallèles à deux diamètres conjugués de l'indicatrice en un point M, portent le nom de tangentes conjuguées. Si l'on considère sur la surface un point M′ infiniment voisin de M, l'intersection des plans tangents en M et en M′ est, à la limite, la tangente conjuguée de MM′. Le plan de l'indicatrice qui passe par le point M′ est parallèle, en effet, au plan tangent en M, et son intersection par le plan tangent en M′, c'est-à-dire la tangente en M′ à l'indicatrice, est parallèle à l'intersection des deux plans tangents. Mais cette tangente est parallèle aussi au diamètre conjugué de celui qui aboutit en M′, et qui à la limite se confond avec la direction MM′; il est donc prouvé que la direction MM′ et l'intersection des deux plans tangents sont parallèles, à la limite, à deux diamètres conjugués de l'indicatrice.

645. Considérons un cylindre circonscrit à une surface, et soit MM′ un arc infiniment petit appartenant à la courbe de contact. La direction MM′ est la direction conjuguée de la génératrice du cylindre en M. Les plans tangents à la surface en M et en M′ sont, en effet, tangents en même temps au cylindre, leur intersection est donc à la limite la génératrice du cylindre qui par conséquent est une tangente conjuguée à la direction MM′.

La même relation existe d'ailleurs évidemment, et pour la même raison, entre la génératrice d'une surface développable quelconque circonscrite à une surface donnée, et la tangente à la courbe de contact.

EXERCICES.

1. Lorsque deux surfaces se coupent, pour obtenir la courbure de la ligne d'intersection en un de ses points, on peut procéder de la manière suivante : mener par le point considéré deux plans respectivement tangents aux deux surfaces; chacun d'eux coupera l'autre surface suivant une courbe; si l'on porte sur la normale de chacune de ces courbes une longueur égale à sa courbure, la diagonale du parallélogramme construit sur ces lignes est dirigée suivant la normale principale de la courbe d'intersection dont elle mesure la courbure.

2. Deux surfaces étant tangentes l'une à l'autre en un point, connaissant la direction de leurs sections principales et la grandeur de leurs rayons de courbure, trouver les tangentes aux deux branches de leur courbe d'intersection.

3. Appliquer la méthode précédente à la recherche de la tangente de l'intersection d'un tore par un de ses plans tangents.

4. Si l'on mène par un point d'une surface n sections normales dont les plans successifs fassent un angle égal à $\frac{2\pi}{n}$, la moyenne entre les courbures de ces sections est indépendante du nombre n et de l'orientation du premier plan.

CHAPITRE VI.

ÉTUDE DES NORMALES A UNE MÊME SURFACE.

Il n'existe pas, en général, de surface normale aux droites d'un faisceau.

646. La disposition dans l'espace des normales à une même surface est soumise à des lois nécessaires dont l'existence même est loin d'être évidente *à priori*. L'habitude de transporter, par analogie, à la géométrie à trois dimensions, les résultats de la géométrie plane, conduirait au contraire à penser qu'il n'en doit exister aucune. Quelle que soit, en effet, la loi suivant laquelle des droites se succèdent dans un plan, de telle sorte seulement qu'il en passe une par chaque point du plan, il existe toujours des courbes qui les coupent à angle droit. La condition d'être normales à une même courbe n'impose donc aux droites d'un faisceau aucune condition particulière; mais on commettrait une erreur grave, dans laquelle sont tombés d'habiles géomètres, en en concluant par analogie que des droites se succédant dans l'espace suivant une loi telle, qu'il en passe une par chaque point, peuvent toujours être coupées orthogonalement par une même surface. Elles doivent, pour qu'il en soit ainsi, remplir des conditions très-précises, à l'étude desquelles est consacré ce chapitre.

647. Nous commencerons par montrer que des droites se succédant suivant une loi quelconque ne sont pas, en général, normales à une même surface.

Considérons, en effet, un faisceau tel, que par chaque point de l'espace passe une des droites qui le composent, et soit AB l'une quelconque de ces droites. Supposons, s'il est possible, qu'une surface S, normale à toutes les droites du faisceau, coupe AB en M, cherchons en quel point cette surface S rencontrera une autre ligne A′B′ appartenant au faisceau , et située à distance finie de AB. Réunissons pour cela, par une courbe arbitraire C, un point de AB avec un point de A′B′, les droites du faisceau qui rencontrent la courbe C forment une surface réglée Σ dont les génératrices sont, par hypothèse, normales à la surface S; l'intersection des surfaces S et Σ est par conséquent une courbe passant par le point M, et située sur la surface réglée Σ, dont elle coupe à angle droit toutes les génératrices, et comme une telle définition la détermine complétement, le point M′ où elle rencontre A′B′ est lui-même déterminé, et ce point M′ est évidemment l'intersection de A′B′ avec la surface inconnue S. Mais la courbe C qui réunit les droites AB et A′B′ étant arbi-

traire, on peut la remplacer par une infinité d'autres, et substituer par là, à la surface Σ, une infinité d'autres surfaces réglées n'ayant de commun avec elles que les génératrices extrêmes. Sur chacune de ces surfaces la courbe normale aux génératrices, et partant du point M, ira généralement couper A′B′ en un point différent, on devrait, par conséquent, assigner une infinité de positions différentes à l'intersection de la droite A′B′ avec la surface S, et il faut en conclure que cette surface ne peut exister.

Condition nécessaire pour que la surface existe.

648. Les droites qui composent un faisceau doivent, d'après ce qui précède, remplir certaines conditions pour qu'il existe une surface qui les coupe à angle droit. Nous allons chercher l'expression analytique de cette condition.

Considérons chacune des droites qui composent un faisceau comme issue du point où elle rencontre une surface donnée, choisie d'ailleurs d'une manière quelconque. Soient x, y, z les coordonnées de l'un de ces points de départ, et X, Y, Z les cosinus des angles formés avec les axes par la droite correspondante. Le point x, y, z étant sur une surface donnée, z est une fonction connue de x et de y, nous supposerons que X, Y et Z soient également donnés en fonction des mêmes variables. Si sur chacune des droites du faisceau on porte, à partir du point de départ, une longueur l, variable d'un point à l'autre, les coordonnées x_1, y_1, z_1 de son extrémité seront

$$\begin{aligned} x_1 &= x + l\mathrm{X}, \\ y_1 &= y + l\mathrm{Y}, \\ z_1 &= z + l\mathrm{Z}, \end{aligned} \tag{1}$$

et pour que la surface, lieu des points x_1, y_1, z_1, coupe normalement toutes les droites considérées, on doit avoir

$$\mathrm{X}\,dx_1 + \mathrm{Y}\,dy_1 + \mathrm{Z}\,dz_1 = 0. \tag{2}$$

Cette équation exprime en effet que la direction qui forme avec les axes des angles dont les cosinus sont X, Y, Z est perpendiculaire à celle qui forme les angles dont les cosinus sont proportionnels à dx_1, dy_1, dz_1.

Les équations (1) donnent

$$\begin{aligned} dx_1 &= dx + l\,d\mathrm{X} + \mathrm{X}\,dl, \\ dy_1 &= dy + l\,d\mathrm{Y} + \mathrm{Y}\,dl, \\ dz_1 &= dz + l\,d\mathrm{Z} + \mathrm{Z}\,dl, \end{aligned} \tag{3}$$

et, en ayant égard aux relations évidentes

$$X^2+Y^2+Z^2=1,$$
$$X\,dX+Y\,dY+Z\,dZ=0,$$

on en déduit

$$X\,dx_1+Y\,dy_1+Z\,dz_1=X\,dx+Y\,dy+Z\,dz+dl; \tag{4}$$

l'équation de condition (2) équivaut, par conséquent, à

$$dl=-(X\,dx+Y\,dy+Z\,dz). \tag{5}$$

L'équation de la surface, lieu des points x, y, z, donne une relation de la forme

$$dz=p\,dx+q\,dy,$$

p et q étant des fonctions connues de x et de y; l'équation (5) devient, par conséquent,

$$dl=-(X+pZ)\,dx-(Y+qZ)\,dy, \tag{6}$$

elle équivaut à

$$\frac{dl}{dx}=-(X+pZ),\quad \frac{dl}{dy}=-(Y+qZ), \tag{7}$$

et comme on a, quelle que soit la fonction désignée par l,

$$\frac{d^2l}{dx\,dy}=\frac{d^2l}{dy\,dx},$$

ces deux équations exigent la relation

$$\frac{d(X+pZ)}{dy}=\frac{d(Y+qZ)}{dx}, \tag{8}$$

X, Y, Z, p et q étant, bien entendu, exprimés en fonction de x et y.

L'équation (8) exprime une condition nécessaire à l'existence d'une surface normale aux droites données. Nous verrons dans un autre chapitre qu'elle est suffisante pour assurer l'existence de la fonction l définie par les équations (7). Cette équation (8) résout donc le problème que nous nous étions proposé, mais elle peut, comme nous allons le montrer, recevoir une forme plus simple et une interprétation géométrique qui joue un grand rôle dans la théorie des surfaces.

649. Lorsque le faisceau de droites que l'on considère est donné, la surface, à partir de laquelle on considère ces droites comme issues, est complétement arbitraire et n'influe évidemment en rien sur l'existence ou la non-existence d'une surface coupant le faisceau orthogonalement. Pour interpréter l'équation (8), sup-

posons que la surface arbitraire que l'on peut nommer surface initiale, soit normale à l'une des droites du faisceau que nous supposerons de plus parallèle à l'axe des Z; on aura alors, pour cette droite et pour son point de départ situé sur la surface arbitraire qui la coupe à angle droit,

$$X=0,\quad Y=0,\quad Z=1,\quad p=0,\quad q=0,$$

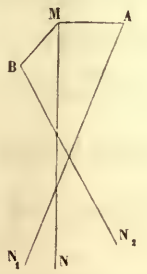
l'équation (8) devient alors, en ce point,

$$\frac{dX}{dy}+\frac{dp}{dy}=\frac{dY}{dx}+\frac{dq}{dx}, \tag{1}$$

et comme on a toujours $\frac{dp}{dy}=\frac{dq}{dx}$, elle se réduit à

$$\frac{dX}{dy}=\frac{dY}{dx}. \tag{2}$$

Soit MN la droite considérée parallèle, par hypothèse, à l'axe des Z. X étant égal à zéro, le numérateur du quotient $\frac{dX}{dy}$ est la valeur infiniment petite que prend X lorsque le point de départ M se déplace infiniment peu parallèlement à l'axe des Y. Le numérateur de $\frac{dY}{dx}$ est, pour la même raison, la valeur infiniment petite que prend Y, lorsque le point M reçoit un déplacement dx parallèle à l'axe des X. Considérons donc deux droites infiniment petites de même longueur, MA, MB, issues du point M et parallèles, l'une à l'axe des X, l'autre à l'axe des Y;



l'équation (2) exprime que la droite AN_1, issue du point A, fait avec l'axe des Y le même angle que la droite BN_2 forme avec l'axe des X: en d'autres termes, car évidemment cela revient au même, la droite issue de A forme avec le plan NMA le même angle que la droite issue de B avec le plan NMB. De plus, les cosinus des angles formés par la première droite avec MB, et par la seconde avec MA, étant égaux et de mêmes signes, les deux droites sont toutes deux situées dans l'angle dièdre BMA, ou toutes deux en dehors. Les axes de coordonnées étant arbitraires, et la condition trouvée étant la traduction de l'équation qui exprime l'existence d'une

surface normale aux droites considérées, on voit que si la condition précédente est satisfaite pour les deux droites MA, MB, elle le sera, par cela même, pour deux autres directions quelconques perpendiculaires entre elles et à MN.

Supposons que les deux droites issues des points A et B, et dirigées d'un même côté de la surface initiale, soient l'une et l'autre dans l'intérieur du dièdre AMB, si la droite infiniment petite MA tourne autour de M pour venir coïncider avec MB, son extrémité se déplacera sur le quart de cercle passant par le point A, et la droite issue de cette extrémité, qui d'abord était AN_1, finira par coïncider avec BN_2; or il faut évidemment pour cela qu'elle traverse le plan passant par MN et par son point de départ, et il existe par conséquent sur le quart de cercle un point C tel, que la droite issue de C soit située dans le plan MNC. Si l'on considère une droite infiniment petite MD égale à MC, et perpendiculaire à MC et à MN, celle des droites du faisceau qui part du point D forme avec le plan MND le même angle que celle qui part du point C forme avec MNC, c'est-à-dire un angle nul. Il existe donc, dans le voisinage de chaque droite MN, deux autres droites appartenant au faisceau et situées dans deux plans perpendiculaires passant par MN.

Ce théorème, découvert par Monge, joue un rôle important dans la théorie des surfaces.

650. Nous allons vérifier directement que les normales à une surface quelconque remplissent la condition qui vient d'être trouvée, et donner en même temps une expression plus précise de la loi suivant laquelle elles sont distribuées autour de l'une quelconque d'entre elles.

Considérons une surface quelconque rapportée à trois axes de coordonnées rectangulaires et représentée par une équation

$$z = \varphi(x, y). \tag{1}$$

Posons, conformément à notre notation habituelle,

$$\frac{dz}{dx} = p, \quad \frac{dz}{dy} = q, \quad \frac{dp}{dx} = r, \quad \frac{dp}{dy} = \frac{dq}{dx} = s, \quad \frac{dq}{dy} = t;$$

en nommant ξ, η, ζ les coordonnées courantes, les équations d'une normale sont

$$\begin{aligned} \xi - x + p(\zeta - z) &= 0, \\ \eta - y + q(\zeta - z) &= 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Prenons pour origine un point O de la surface, et pour axe des Z la normale en ce point; x, y, z, p, q étant nuls au point O, les équations de la normale en ce point se réduiront à

$$\begin{aligned} \xi &= 0, \\ \eta &= 0. \end{aligned}$$

Soient x_1, y_1, z_1, les coordonnées d'un point O_1 de la surface, infiniment voisin de O; p et q étant nuls en O, les valeurs p_1, q_1 de ces dérivées correspondantes au point O_1 sont, en négligeant les infiniment petits du second ordre,

$$p_1 = \frac{dp}{dx}x_1 + \frac{dp}{dy}y_1 = rx_1 + sy_1,$$

$$q_1 = \frac{dq}{dx}x_1 + \frac{dq}{dy}y_1 = sx_1 + ty_1,$$

les équations de la normale en ce point sont par conséquent

$$\begin{aligned} &\xi - x_1 + (rx_1 + sy_1)(\zeta - z_1) = 0, \\ &\eta - y_1 + (sx_1 + ty_1)(\zeta - z_1) = 0, \end{aligned} \tag{3}$$

en nommant α l'angle que le plan ZOO_1 forme avec ZOX et δ la distance OO_1, on a, en négligeant toujours les infiniment petits du second ordre,

$$\begin{aligned} x_1 &= \delta\cos\alpha, \\ y_1 &= \delta\sin\alpha. \end{aligned} \tag{4}$$

La normale en O_1 peut être définie par l'angle infiniment petit qu'elle forme avec la projection sur le plan ZOO_1, et par l'angle ω que fait cette projection avec l'axe des Z; le premier angle θ est le complément positif ou négatif de l'angle formé par la normale en O_1 avec la perpendiculaire au plan ZOO_1 menée par le point O dans le plan O_1OX. Or en nommant λ l'angle de la normale en O_1 avec l'axe des Z, les cosinus des angles qu'elle forme avec les axes des X et des Y sont, d'après les équations de cette droite,

$$-\cos\lambda(rx_1 + sy_1), \quad -\cos\lambda(sx_1 + ty_1),$$

c'est-à-dire

$$-\delta\cos\lambda(r\cos\alpha + s\sin\alpha), \quad -\delta\cos\lambda(s\cos\alpha + t\sin\alpha),$$

la perpendiculaire au plan ZOO_1 forme avec les axes des angles dont les cosinus sont

$$\sin\alpha, \quad -\cos\alpha;$$

donc, d'après la formule qui donne le cosinus de l'angle de deux droites, et en négligeant les infiniment petits du second ordre, ce qui permet de supposer $\cos\lambda = 1$, l'angle θ formé par la normale en O_1, avec le plan ZOO_1, est donné par la formule

$$\sin\theta = \delta[(t - r)\sin\alpha\cos\alpha + s(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)],$$

ou, en substituant l'arc infiniment petit à son sinus,

$$\theta = \frac{1}{2}\delta[(t - r)\sin 2\alpha + 2s\cos 2\alpha]. \tag{5}$$

Si l'on substitue à la direction OO_1 une direction perpendiculaire OO_2, il faut changer dans les formules α en $\alpha + \frac{\pi}{2}$; $\sin 2\alpha$ et $\cos 2\alpha$ changent alors de signe en conservant même valeur absolue, et par conséquent, en conservant bien entendu la même valeur à δ, l'angle θ_2 relatif au point O_2 est égal et de signe contraire à l'angle θ_1 relatif au point O_1.

La valeur de α pour laquelle θ_1 est égal à zéro est donnée par l'équation

$$(l - r)\sin 2\alpha + 2s\cos 2\alpha = 0,$$

ou

$$\text{tang}\, 2\alpha = \frac{2s}{r - l}. \tag{6}$$

Il existe donc deux directions perpendiculaires pour lesquelles l'angle θ est égal à zéro, lorsqu'on néglige les infiniment petits du second ordre. Pour toute direction faisant avec celle-là un angle fini, cet angle est infiniment petit du premier ordre.

Si l'on a pris, tout d'abord, l'axe des X et celui des Y dans les directions OO_1, OO_2, pour lesquelles l'angle désigné par θ est égal à zéro, l'équation

$$\text{tang}\, 2\alpha = \frac{2s}{r - l}$$

aura pour solution $\alpha = 0$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$, et l'on doit avoir, par conséquent, $s = 0$. On a vu (627) que les axes pour lesquels cette condition est remplie sont tangents aux sections principales. Nous retrouvons ainsi le résultat déjà obtenu (636) : la normale en un point d'une surface est rencontrée par la normale au point infiniment voisin situé sur l'une des sections principales; ce théorème supposant toujours que l'on néglige les infiniment petits du second ordre.

En adoptant les axes tangents aux sections principales, pour lesquels, comme on vient de le rappeler, la valeur de s est nulle, l'expression de l'angle θ se simplifie et l'on a

$$\theta = \frac{1}{2}\delta(l - r)\sin 2\alpha. \tag{7}$$

651. La direction de la normale à la surface considérée en un point O_1 infiniment voisin de O, peut être, comme on l'a dit, définie par deux angles. Le premier est l'angle θ formé par cette normale O_1N avec le plan ZOO_1 qui passe par son point de départ et par la normale OZ. Nous venons d'en calculer l'expression générale. Le second des deux angles est l'inclinaison sur OZ de la projection de la normale en O_1 sur le plan ZOO_1. Pour obtenir ce second angle que nous nommons ω, re-

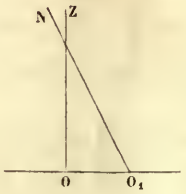
marquons que tang ω est rigoureusement égale au cosinus de l'angle que O_1N forme avec OO_1, divisé par le cosinus de l'angle qu'elle forme avec OZ. Si l'on prenait en effet ZOO_1 pour plan des ZX et pour axe des X la tangente en O à l'arc infiniment petit OO_1, les coordonnées de O_1 étant x_1, o et z_1, la projection sur le plan des XZ de la normale issue du point O_1 aura pour équation

$$X - x_1 = \text{tang}\,\omega\,(Z - z_1); \tag{1}$$

on en déduit

$$\text{tang}\,\omega = \frac{X - x_1}{Z - z_1}, \tag{2}$$

et comme les coordonnées X et Z de la projection d'un point de la normale sur le plan des XZ sont les mêmes que celles de ce point lui-même, le rapport $\frac{X-x_1}{Z-z_1}$ est, comme on l'a annoncé, le rapport des projections d'une portion de la normale sur l'axe des X et sur celui des Z, c'est-à-dire le rapport des cosinus des angles formés par cette normale avec les deux axes; remarquons que dans la formule précédente, l'angle ω désigne l'angle de l'axe des Z positifs avec la portion de la projection dirigée vers la région des X positifs. Si donc OZ représente l'axe des Z, et O_1N la projection



de la normale sur le plan ZOO_1, la valeur de tang ω formée par la formule (2) sera négative, et si nous désignons par ω l'angle infiniment petit que l'on veut étudier, il faudra changer le signe de l'expression. L'angle de la normale avec OZ est infiniment petit, le cosinus de cet angle qui forme le dénominateur de la valeur de tang ω peut donc être remplacé par l'unité, et comme le numérateur est infiniment petit, l'erreur commise ne portera que sur les infiniment petits du second ordre. En substituant en même temps à l'angle ω sa tangente, et faisant le changement de signe indiqué plus haut, nous aurons

$$\omega = \cos(O_1N,\ O_1O).$$

Pour calculer ce cosinus, remarquons que d'après les équations de la normale O_1N, et en nommant, comme plus haut, λ l'angle de cette normale avec l'axe des Z, les cosinus des angles qu'elle forme avec les trois axes sont, comme on l'a déjà dit (650), et en désignant par δ la distance infiniment petite OO_1,

$$-\delta\cos\lambda\,(r\cos\alpha + s\sin\alpha),\quad -\delta\cos\lambda\,(s\cos\alpha + t\sin\alpha),\quad \cos\lambda,$$

les cosinus des angles formés par O_1O avec les mêmes axes sont

$$-\cos\alpha, \quad -\sin\alpha \quad \text{et} \quad 0;$$

on a, par conséquent,

$$\omega = \cos OO_1N = \delta\cos\lambda\,(r\cos^2\alpha + 2s\sin\alpha\cos\alpha + t\sin^2\alpha),$$

λ étant infiniment petit, on peut, dans cette formule, et en négligeant seulement les infiniment petits du second ordre, remplacer cos λ par l'unité. Si de plus on suppose les axes tellement choisis, que la dérivée s soit égale à zéro, on aura enfin

$$\omega = \delta\,(r\cos^2\alpha + t\sin^2\alpha). \tag{3}$$

Le rapport $\frac{\omega}{\delta}$ ne diffère pas de l'expression trouvée (627) pour la courbure de la section faite dans la surface par le plan normal ZOO_1. Il est aisé de voir en effet que la projection de la normale en O_1 sur le plan ZOO_1, est précisément la normale à la courbe d'intersection de ce plan avec la surface. L'angle ω que cette normale fait avec OZ est donc la courbure totale de l'arc infiniment petit dont la longueur est δ, et $\frac{\omega}{\delta}$ représente la courbure. Nous aurions pu, d'après cela, nous dispenser de calculer l'angle ω et écrire immédiatement l'équation (3), comme conséquence des formules relatives à la courbure des sections normales.

652. L'angle formé par la normale OZ au point O, avec la normale au point infiniment voisin O_1, se déduit aisément des deux angles désignés par θ et ω, qui sont actuellement connus. Si, en effet, par un point de l'espace on mène trois droites respectivement parallèles à la normale OZ, à la normale O_1N, et à la projection de O_1N sur le plan ZOO_1, ces trois droites forment un trièdre rectangle auquel correspond un triangle sphérique rectangle infiniment petit, que l'on peut regarder comme rectiligne et dans lequel le carré de l'hypoténuse est égal, par conséquent, à la somme des carrés des deux autres côtés. Or l'hypoténuse mesure l'angle que nous cherchons, et les deux côtés représentent les angles désignés par θ et ω; on a, par conséquent, en nommant ψ l'angle des deux normales,

$$\psi^2 = \theta^2 + \omega^2 = \delta^2\,(r\cos^2\alpha + t\sin^2\alpha)^2 + (t-r)^2\delta^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha,$$

c'est-à-dire

$$\psi^2 = \delta^2\,(r^2\cos^2\alpha + t^2\sin^2\alpha):$$

telle est l'expression de l'angle ψ formé par deux normales infiniment voisines, les axes des X et des Y étant, on ne doit pas l'oublier, tangents aux sections principales.

653. Les dérivées du second ordre, r et t, sont liées aux rayons de courbure principaux par les relations fort simples

$$R_1 = \frac{1}{r},$$

$$R_2 = \frac{1}{t},$$

et les expressions trouvées pour les angles θ, ω et ψ, peuvent par conséquent être mises sous la forme

$$\theta = \frac{1}{2}\,\delta\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)\sin 2\alpha,$$

$$\omega = \delta\left(\frac{\cos^2\alpha}{R_1} + \frac{\sin^2\alpha}{R_2}\right),$$

$$\psi^2 = \delta^2\left(\frac{1}{R_1^2}\cos^2\alpha + \frac{1}{R_2^2}\sin^2\alpha\right),$$

δ désignant, on s'en souvient, la distance de deux points infiniment voisins, et α l'angle formé par la direction de la ligne qui les joint avec la section principale correspondant au rayon de courbure R_1.

654. La formule

$$\psi^2 = \delta^2\left(\frac{\cos^2\alpha}{R_1^2} + \frac{\sin^2\alpha}{R_2^2}\right) \tag{1}$$

donne le moyen de déterminer dans certains cas, d'une manière élégante, le produit des rayons de courbure d'une surface. On en déduit en effet le théorème suivant :

Si à partir d'un point O pris sur une surface dont les rayons de courbure sont R_1 et R_2, on porte sur la surface une longueur infiniment petite OO_1, dans une direction qui forme avec la section principale à laquelle correspond le rayon R_1, un angle dont la tangente soit égale à $\sqrt{\frac{R_2}{R_1}}$, l'angle ψ de la normale en O_1 avec la normale en O est égal à $\frac{OO_1}{\sqrt{R_1 R_2}}$.

Si l'on pose en effet

$$\operatorname{tang}\alpha = \sqrt{\frac{R_2}{R_1}},$$

on en conclut

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{R_1}}{\sqrt{R_1 + R_2}},$$

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{R_2}}{\sqrt{R_1 + R_2}},$$

et la formule (1) donne

$$\psi^2 = \delta^2 \left[\frac{R_1}{R_1^2 (R_1 + R_2)} + \frac{R_2}{R_2^2 (R_1 + R_2)} \right] = \delta^2 \frac{1}{R_1 R_2}.$$

655. Lorsque les rayons de courbure sont de signes contraires, le théorème précédent doit être modifié, la valeur choisie pour tang α serait, en effet, dans ce cas imaginaire; on devra poser

$$\operatorname{tang} \alpha = \sqrt{\frac{-R_2}{R_1}},$$

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{R_1}}{\sqrt{R_1 - R_2}},$$

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{-R_2}}{\sqrt{R_1 - R_2}},$$

et par suite

$$\psi^2 = \delta^2 \left[\frac{R_1}{R_1^2 (R_1 - R_2)} - \frac{R_2}{R_2^2 (R_1 - R_2)} \right] = -\delta^2 \frac{1}{R_1 R_2}.$$

656. La direction qui correspond à l'angle défini dans les deux paragraphes précédents est la diagonale du rectangle construit sur les axes de l'indicatrice, lorsque celle-ci est elliptique, et celle d'une asymptote dans le cas où, les rayons de courbure étant de signes contraires, l'indicatrice est hyperbolique.

Nous appliquerons la remarque précédente, qui est due à M. O. Bonnet, à la recherche de la loi suivant laquelle varie le produit des courbures principales le long de la génératrice d'une surface gauche. En un point quelconque d'une telle surface, la génératrice rectiligne est dirigée suivant l'asymptote de la section indicatrice. Si donc, à partir d'un point M situé sur une génératrice, on porte sur cette droite une longueur infiniment petite MM′, l'angle formé par les normales aux points M et M′, divisé par la distance MM′, donnera la valeur cherchée de $\sqrt{\frac{-1}{R_1 R_2}}$. On a vu (102) que la tangente de l'angle formé par le plan tangent d'une surface gauche avec un plan fixe passant par la génératrice qui contient son point de contact est proportionnelle à la distance de ce point de contact à un point fixe de la génératrice; en désignant cet angle par φ, et par z la distance OM du point de contact M au point fixe O, on a

$$\operatorname{tang} \varphi = G z,$$

G restant constant sur une même génératrice, on en conclut

$$\varphi = \text{arc tang } G z,$$

$$d\varphi = \frac{G\, dz}{1 + G^2 z^2},$$

et par conséquent

$$\frac{d\varphi}{dz} = \sqrt{\frac{-1}{R_1 R_2}} = \frac{G}{1 + G^2 z^2},$$

z désignant la distance du point considéré à un point fixe convenablement choisi sur la génératrice.

657. Il n'est pas sans intérêt de nous arrêter à la formule précédente pour définir géométriquement la position du point O, qui sert d'origine à la longueur désignée par z, et la constante G relative à chaque génératrice.

Soient AB, A′B′ deux génératrices infiniment voisines d'une surface gauche,

OO′ leur plus courte distance. Par le point O′ menons une parallèle O′C à OM. Soit M un point quelconque de AB. Par ce point M abaissons une perpendiculaire MP sur la ligne O′C, qui évidemment sera perpendiculaire aussi au plan CO′B′; du point P, abaissons une perpendiculaire PM′ sur O′B′, MM′ est, en vertu d'un théorème connu, perpendiculaire à O′B′. D'ailleurs les points M et M′ étant infiniment voisins, la ligne MM′ est située dans le plan tangent en M′, qui, passant aussi par la génératrice, est la limite du plan O′M′M. L'angle de ce plan avec le plan fixe B′O′C a évidemment pour mesure l'angle en M′ du triangle rectangle MPM′, et l'on a, en désignant par φ le complément de cet angle,

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{M'P}{MP}.$$

On a d'ailleurs, en nommant ε l'angle des deux génératrices infiniment voisines,

$$PM' = O'M' \cdot \operatorname{tang}\varepsilon;$$

on en conclut, en remplaçant tang ε par l'arc infiniment petit ε,

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{\varepsilon}{MP} \cdot O'M',$$

$\frac{\varepsilon}{MP}$ est le rapport de l'angle de deux génératrices infiniment voisines à leur plus courte distance; ce rapport est constant pour une même génératrice, il est la représentation de la quantité désignée par G, dans le paragraphe précédent, O′M′ est la distance désignée par z; et l'on voit que le point fixe O, dont l'existence a été démontrée (102), est, sur chaque génératrice, le point où se mesure

sa plus courte distance avec la génératrice voisine. La constante G est le rapport de l'angle de deux génératrices à leur plus courte distance. Lorsque, pour toutes les génératrices d'une surface réglée, G est infini, la surface (**103**) est développable. Le produit des rayons de courbure est alors infini, et l'un d'eux étant par suite infini, l'indicatrice se réduit à deux droites parallèles.

658. Les formules qui précèdent comprennent implicitement toutes les propriétés générales des normales à une surface dans le voisinage d'un point donné. Parmi les conséquences que l'on en peut déduire, nous nous bornerons à signaler le théorème suivant qui a été donné par Sturm :

Toutes les normales à une surface dans le voisinage du point O peuvent être considérées comme rencontrant deux droites fixes perpendiculaires l'une à l'autre, et menées par les centres de courbure des deux sections principales dans les plans de ces sections perpendiculairement à la normale au point O.

Il suffit évidemment, pour démontrer ce théorème, de chercher l'intersection d'une normale quelconque avec les plans des sections et de constater que ces intersections se trouvent sur les lignes indiquées, lorsque l'on néglige, bien entendu, les infiniment petits du second ordre.

Prenons pour axes des coordonnées la normale au point O et les tangentes aux deux sections principales. Soient x', y', z' les coordonnées du point O′; z' étant infiniment petit du second ordre peut être considéré comme nul; ξ, η, ζ étant les coordonnées courantes de la normale en O′, les équations de cette ligne sont

$$\xi - x' + (rx' + sy')\zeta = 0,$$
$$\eta - y' + (sx' + ty')\zeta = 0,$$

et comme à cause du choix particulier des axes on a $s = 0$, elles se réduisent à

$$\xi - x' + rx'\zeta = 0,$$
$$\eta - y' + ty'\zeta = 0;$$

pour avoir l'intersection avec le plan des ZX, il faut faire $\eta = 0$, on en déduit

$$\zeta = \frac{1}{t};$$

l'intersection est donc située sur une parallèle à l'axe des X, menée à la distance $\frac{1}{t}$, et passant par conséquent par le centre de courbure de la section ZOX. On verra de même que le plan ZOY est rencontré par la même normale, sur une parallèle à l'axe des Y, menée par le centre de courbure de la section principale qu'il détermine.

Sturm a déduit de son théorème une remarque curieuse. Si autour d'un point

d'une surface on trace une courbe fermée infiniment petite Σ, les normales à la surface issues des points de cette courbe forment une surface réglée dont la génératrice est assujettie à rencontrer la courbe Σ et les deux droites que nous venons de déterminer. Si, par exemple, la courbe Σ a la forme d'un cercle, l'équation de la surface est très-facile à obtenir, et l'on peut constater que les sections parallèles au plan du cercle sont des ellipses qui, pour deux positions particulières, se réduisent aux droites directrices. Ce résultat, rapproché du théorème que nous allons démontrer dans le paragraphe suivant, peut être mis en évidence par une ingénieuse et très-simple expérience que nous indiquerons plus loin.

659. Nous terminerons ce chapitre par la démonstration de deux théorèmes importants relatifs à la théorie des droites normales à une même surface.

Si des rayons de lumière normaux à une même surface quittent un milieu homogène pour pénétrer dans un autre milieu également homogène, en se réfractant suivant la loi de Descartes, quelle que soit la surface de séparation des deux milieux, ils seront encore, après leur réfraction, normaux à une même surface.

Soient x, y, z les coordonnées d'un point O de la surface qui sépare les deux milieux, α, β, γ les angles formés par le rayon incident avec les axes des coordonnées, α', β', γ' les angles formés avec les mêmes axes par le rayon réfracté, l la longueur qui sépare, sur le rayon incident, le point x, y, z où il rencontre la surface de séparation, du point x_1, y_1, z_1 où il perce la surface à laquelle sont normaux, par hypothèse, tous les rayons incidents. Soit enfin l' une longueur portée sur le rayon réfracté à partir de la surface de séparation des deux milieux, il s'agit de prouver que l'on peut déterminer cette longueur l', de telle sorte que la surface décrite par son extrémité soit normale à tous les rayons réfractés.

En nommant x_2, y_2, z_2, les coordonnées de l'extrémité de la longueur l', on a

$$(1)\qquad \begin{aligned} x_1 &= x + l\cos\alpha, \quad y_1 = y + l\cos\beta, \quad z_1 = z + l\cos\gamma, \\ x_2 &= x + l'\cos\alpha', \; y_2 = y + l'\cos\beta', \; z_2 = z + l'\cos\gamma', \end{aligned}$$

on déduit de ces équations

$$(2)\qquad \begin{aligned} &dx_1 = dx + \cos\alpha\, dl + l\, d\cos\alpha, \quad dy_1 = dy + \cos\beta\, dl + l\, d\cos\beta, \quad dz_1 = dz + \cos\gamma\, dl + l\, d\cos\gamma, \\ &dx_2 = dx + \cos\alpha'\, dl' + l'\, d\cos\alpha', \; dy_2 = dy + \cos\beta'\, dl' + l'\, d\cos\beta', \; dz_1 = dz + \cos\gamma'\, dl' + l'\, d\cos\gamma'. \end{aligned}$$

Ajoutons les trois premières équations (2) après les avoir respectivement multipliées par $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, et les trois autres, multipliées respectivement par $\cos\alpha'$, $\cos\beta'$, $\cos\gamma'$, nous aurons

$$(3)\qquad \begin{aligned} dx_1\cos\alpha + dy_1\cos\beta + dz_1\cos\gamma &= dl + dx\cos\alpha + dy\cos\beta + dz\cos\gamma, \\ dx_2\cos\alpha' + dy_2\cos\beta' + dz_2\cos\gamma' &= dl' + dx\cos\alpha' + dy\cos\beta' + dz\cos\gamma', \end{aligned}$$

la surface, lieu des points x_1, y_1, z_1, étant normale à la droite qui forme avec les axes les angles α, β, γ, on a

$$dx_1 \cos\alpha + dy_1 \cos\beta + dz_1 \cos\gamma = 0, \tag{4}$$

la première équation se réduit donc à

$$0 = dl + \cos\alpha\, dx + \cos\beta\, dy + \cos\gamma\, dz, \tag{5}$$

dx, dy, dz, sont les projections sur les axes de coordonnées d'un déplacement arbitraire effectué sur la surface de séparation des deux milieux. Soient ds ce déplacement, et λ, μ, ν les angles qu'il forme avec les axes; on a

$$dx = ds\cos\lambda, \quad dy = ds\cos\mu, \quad dz = ds\cos\nu,$$

et par conséquent l'équation (5) devient

$$0 = dl + ds\,(\cos\alpha\cos\lambda + \cos\beta\cos\mu + \cos\gamma\cos\nu), \tag{6}$$

ou, en nommant V l'angle formé par la direction du rayon incident avec celle du déplacement ds,

$$0 = dl + ds\cos V. \tag{7}$$

Considérons actuellement le trièdre ayant pour arêtes le rayon incident, la normale à la surface de séparation, et le déplacement ds, en nommant I l'angle du rayon incident avec la normale, et Ω le dièdre qui, dans le trièdre considéré, a pour arête la normale, on a

$$\cos V = \sin i\,\cos\Omega,$$

et l'équation (7) devient, par conséquent,

$$0 = dl + ds\sin i\cos\Omega. \tag{8}$$

En nommant i' l'angle formé par le rayon réfracté avec la normale, et remarquant que, d'après la loi de Descartes, les deux rayons sont dans un même plan avec cette normale, on verra de même que la seconde équation (3) devient

$$\cos\alpha' dx_2 + \cos\beta' dy_2 + \cos\gamma'\, dz_2 = dl' + ds\sin i'\cos\Omega; \tag{9}$$

en nommant r l'indice de réfraction, on a

$$\sin i' = r\sin i, \tag{10}$$

et par conséquent, si l'on prend $l' = rl$, on aura $dl' = rdl$, le second membre de (9) sera nul en vertu de l'équation (8), et l'on aura

$$0 = \cos\alpha' dx_2 + \cos\beta' dy_2 + \cos\gamma' dz_2,$$

ce qui prouve que la surface lieu des points dont les coordonnées sont x_2, y_2, z_2, est normale au rayon réfracté. Pour obtenir cette surface, il faut, d'après l'équation $l' = rl$, porter sur chaque rayon réfracté, à partir de la surface de séparation, une longueur égale au produit de l'indice de réfraction, par celle que l'on doit porter sur le rayon incident correspondant pour obtenir un point de la surface normale aux rayons incidents; il est clair, d'ailleurs, que la longueur l' peut de même que l être augmentée ou diminuée d'une constante, et que l'on obtiendra ainsi des surfaces parallèles.

660. D'après le théorème précédent, des rayons lumineux homogènes émanés d'un même point, et normaux par conséquent à des sphères concentriques, pourront traverser différents milieux séparés les uns des autres par des surfaces quelconques, ils seront toujours, après chaque réfraction, normaux à une même surface. C'est ici le lieu d'indiquer l'expérience fort simple qui peut, ainsi que nous l'avons dit (658), servir de vérification au théorème de Sturm, démontré dans ce paragraphe.

Il suffit de faire passer dans une chambre noire, à travers un très-petit trou percé dans un écran, un faisceau de lumière homogène qui tombe sur un sphéroïde de verre ou sur une petite fiole contenant un liquide et offrant une surface courbe irrégulière, dont on recouvre la partie postérieure avec un papier percé d'un petit trou d'une forme arbitraire. Les rayons qui sortent par cette ouverture, après être entrés par celle de l'écran, peuvent être considérés, à cause de la petitesse de celle-ci, comme émanant d'un simple point; en recevant le faisceau émergent sur un papier blanc, qu'on éloignera graduellement, on reconnaîtra la forme des différentes sections, et particulièrement deux petits traits lumineux plus ou moins distants l'un de l'autre, et dont les directions sont perpendiculaires entre elles.

661. Lorsque les droites d'un faisceau sont tangentes à une même surface, la condition nécessaire pour qu'elles soient en même temps normales à une autre surface, prend une forme très-élégante; il faut et il suffit qu'elles soient tangentes à une série de lignes géodésiques tracées sur la surface, ou, ce qui revient au même (631), à des lignes dont le plan osculateur soit normal en chaque point à la surface sur laquelle elles sont situées.

Remarquons d'abord que si les droites d'un faisceau sont tangentes à une même surface, et qu'il en passe une par chaque point, il existe nécessairement sur la surface une série de courbes auxquelles les droites considérées sont tangentes. A chaque point de la surface correspond en effet, par hypothèse, une droite du faisceau située dans le plan tangent; or il est clair que le mouvement d'un point serait déterminé s'il était assujetti à se mouvoir sur la surface en partant d'un point donné et se dirigeant toujours, dans chacune de ses positions, tangentiellement à la droite qui y correspond. La courbe ainsi parcourue a pour tangente en chaque point une

des droites du faisceau, et comme le point initial est arbitraire, il passe une telle courbe, ainsi que nous l'avons annoncé, par chaque point de la surface donnée. Cela posé, soit

$$z = \varphi(x, y) \tag{1}$$

l'équation de cette surface; nommons X, Y, Z les cosinus des angles formés avec les axes par la droite du faisceau qui touche cette surface au point dont les coordonnées sont x, y, z: la condition nécessaire pour qu'il existe une surface normale à toutes les droites du faisceau est (648) que, en ayant égard à la relation (1), la somme

$$\mathrm{X}\,dx + \mathrm{Y}\,dy + \mathrm{Z}\,dz \tag{2}$$

soit la différentielle d'une certaine fonction de x et de y. Or on a

$$dz = p\,dx + q\,dy, \tag{3}$$

et de plus, comme la direction définie par les cosinus X, Y, Z est dans le plan tangent,

$$\mathrm{Z} = p\mathrm{X} + q\mathrm{Y}; \tag{4}$$

l'expression (2) devient par conséquent

$$(\mathrm{X} + p\mathrm{Z})\,dx + (\mathrm{Y} + q\mathrm{Z})\,dy. \tag{5}$$

La condition, pour qu'elle soit une différentielle et qu'il existe par conséquent une surface normale aux droites du faisceau, est

$$\frac{d(\mathrm{X} + p\mathrm{Z})}{dy} = \frac{d(\mathrm{Y} + q\mathrm{Z})}{dx}, \tag{6}$$

c'est-à-dire, à cause de l'équation,

$$\frac{dp}{dy} = \frac{dq}{dx},$$

$$\frac{d\mathrm{X}}{dy} + p\frac{d\mathrm{Z}}{dy} = \frac{d\mathrm{Y}}{dx} + q\frac{d\mathrm{Z}}{dx}, \tag{7}$$

les dérivées étant prises, bien entendu, après que X, Y, Z ont été exprimés en fonction des seules variables x et y.

On a

$$\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2 + \mathrm{Z}^2 = 1,$$

par conséquent

$$\mathrm{X}\frac{d\mathrm{X}}{dx} + \mathrm{Y}\frac{d\mathrm{Y}}{dx} + \mathrm{Z}\frac{d\mathrm{Z}}{dx} = 0,$$

$$\mathrm{X}\frac{d\mathrm{X}}{dy} + \mathrm{Y}\frac{d\mathrm{Y}}{dy} + \mathrm{Z}\frac{d\mathrm{Z}}{dy} = 0,$$

l'équation (7) devient par suite

$$(8)\qquad Z\frac{dY}{dx}+p\left(X\frac{dX}{dy}+Y\frac{dY}{dy}\right)=Z\frac{dX}{dy}+q\left(X\frac{dX}{dx}+Y\frac{dY}{dx}\right).$$

Remplaçant Z par $pX+qY$, et remarquant qu'en indiquant par des parenthèses les dérivées partielles prises avant d'avoir remplacé z par sa valeur en x et y, on a

$$\frac{dX}{dx}=\left(\frac{dX}{dx}\right)+\left(\frac{dX}{dz}\right)\frac{dz}{dx},$$
$$\frac{dX}{dy}=\left(\frac{dX}{dy}\right)+\left(\frac{dX}{dz}\right)\frac{dz}{dy},$$
$$\frac{dY}{dx}=\left(\frac{dY}{dx}\right)+\left(\frac{dY}{dz}\right)\frac{dz}{dy},$$
$$\frac{dY}{dy}=\left(\frac{dY}{dy}\right)+\left(\frac{dY}{dz}\right)\frac{dz}{dy},$$

$\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$ ayant été désignés par p et q, en ayant égard à ces équations, la condition (8) devient

$$(9)\quad q\left[X\frac{dX}{dx}+Y\frac{dX}{dy}+(pX+qY)\frac{dX}{dz}\right]=p\left[X\frac{dY}{dx}+Y\frac{dY}{dy}+(pX+qY)\frac{dY}{dz}\right],$$

en nommant ds l'arc infiniment petit de la courbe à laquelle la droite considérée est tangente, on a

$$X=\frac{dx}{ds},\quad Y=\frac{dy}{ds},\quad Z=\frac{dz}{ds},$$

et par conséquent

$$X\frac{dX}{dx}+Y\frac{dX}{dy}+(pX+qY)\frac{dX}{dz}=\frac{dX}{dx}\frac{dx}{ds}+\frac{dX}{dy}\frac{dy}{ds}+\frac{dX}{dz}\frac{dz}{ds}=\frac{dX}{ds},$$

de même

$$X\frac{dY}{dx}+Y\frac{dY}{dy}+Z\frac{dY}{dz}=\frac{dY}{ds};$$

l'équation (9) équivaut donc à

$$q\frac{dX}{ds}=p\frac{dY}{ds},$$

ou

$$(10)\qquad \frac{\frac{dX}{ds}}{p}=\frac{\frac{dY}{ds}}{q};$$

on a d'ailleurs $X^2+Y^2+Z^2=1$, et par conséquent

$$(11)\qquad X\frac{dX}{ds}+Y\frac{dY}{ds}+Z\frac{dZ}{ds}=0;$$

on conclut de (10)

$$\frac{X\frac{dX}{ds}+Y\frac{dY}{ds}}{pX+qY}=\frac{\frac{dX}{ds}}{p},$$

c'est-à-dire, à cause de (11),

$$\frac{Z\frac{dZ}{ds}}{Z}=-\frac{\frac{dX}{ds}}{p};$$

donc enfin

$$\frac{\frac{dX}{ds}}{p}=\frac{\frac{dY}{ds}}{q}=-\frac{\frac{dZ}{ds}}{1},$$

ce qui prouve que la direction qui fait avec les axes les angles dont les cosinus sont proportionnels à p, q, -1, coïncide avec celle qui fait des angles dont les cosinus sont proportionnels à $\frac{dX}{ds}$, $\frac{dY}{ds}$, $\frac{dZ}{ds}$; la première de ces directions est celle de la normale à la surface Σ, et la seconde, celle de la normale principale à la courbe S. Pour que ces deux directions coïncident, il faut et il suffit que le plan osculateur de la courbe Σ soit normal en chaque point à la surface S.

662. Le même théorème peut se démontrer géométriquement de la manière suivante: pour que les droites d'un faisceau soient normales à une même surface, il faut et il suffit (649) que chacune d'elles soit rencontrée par deux autres infiniment voisines et situées dans des plans perpendiculaires l'un à l'autre, et passant par la droite considérée. Considérons, dans le cas qui nous occupe, l'une quelconque D des droites du faisceau et la ligne géodésique Σ à laquelle elle est tangente : l'une des droites infiniment voisines du faisceau qui rencontre la ligne D est évidemment la tangente infiniment voisine de Σ, et le plan qui les contient toutes deux est (563) le plan osculateur de cette courbe; toutes les droites du faisceau étant tangentes à la surface désignée par S, soient A le point de contact de D, et A′ celui de la seconde droite infiniment voisine, qui, faisant partie du faisceau, rencontre la droite D; la ligne AA′ est à la limite tangente à la surface S dont le plan DAA′ est par conséquent le plan tangent; l'un des deux plans qui passent par la droite D et par une droite infiniment voisine du faisceau est donc osculateur à une ligne géodésique de S, et l'autre tangent à cette surface; il en résulte (631) qu'ils sont perpendiculaires l'un à l'autre.

L'étude de la démonstration précédente peut donner lieu à une difficulté à laquelle il est nécessaire de répondre. Le raisonnement par lequel nous prouvons que le plan passant par la droite D et par une droite infiniment voisine du faisceau est tangent à la surface S, semble applicable aux deux droites du faisceau qui ren-

contrent D, et l'on pourrait en conclure que les deux plans qui contiennent les droites, loin d'être perpendiculaires l'un à l'autre, comme nous l'affirmons, se réduisent au contraire à un seul. Cette contradiction tient à ce que la proposition sur laquelle le raisonnement est fondé présente un cas d'exception relatif précisément à l'une des deux droites qui rencontrent D. On admet en effet que le plan passant par la droite qui touche la surface S en A, et par un point A′ infiniment voisin de A, est tangent à la surface S, parce qu'il contient deux droites tangentes à cette surface, la droite D elle-même et la ligne AA′ qui en réunit deux points infiniment voisins. Or il y a évidemment exception lorsque ces deux droites se confondent, c'est-à-dire lorsque le point A′ est situé sur une courbe tangente à la droite D; dans ce cas, le raisonnement général est en défaut, et le plan qui passe par le point A′ et par la droite D est le plan osculateur de la courbe AA′.

EXERCICES.

1. Quelle que soit la loi suivant laquelle se succèdent dans l'espace des droites telles, qu'il en parte une de chaque point de l'espace, soient AN celle qui part d'un point A, et AB, AC deux lignes infiniment petites perpendiculaires entre elles et à AN, les angles respectivement formés par la droite issue du point B avec le plan NAB, et par la droite issue de C avec NAC, ont une différence constante.

2. La plus courte distance des normales menées à une surface, par deux points infiniment voisins A et B, est égale au produit de la distance AB par le cosinus de l'angle qu'elle forme avec la direction conjuguée sur la surface.

3. Si AB, AC sont deux directions conjuguées en un point A d'une surface, et que Δ, Δ' désignent les distances du point A aux points où sont menées les plus courtes distances de la normale en A avec les normales en B et en C, la somme $\frac{1}{\Delta} + \frac{1}{\Delta'}$ est constante et égale à la somme des courbures principales de la surface.

4. Supposons que des rayons lumineux, d'abord normaux à une surface S, éprouvent une suite de réfractions. Désignons par l la portion d'un rayon comprise dans le premier milieu, et la surface qui sépare le premier milieu du second, par l' la partie de ce rayon comprise dans le second milieu, par l'' la partie comprise dans le troisième milieu, et ainsi de suite, puis par l_n la portion de ce rayon comprise dans le dernier milieu, entre la dernière surface séparatrice et l'une des surfaces auxquelles les rayons deviennent normaux dans le dernier milieu; on aura

$$al + a_1 l' + a_2 l'' + \ldots + a_n l_n = \text{const.},$$

$a, a_1, \ldots, a_n$ étant des constantes dépendant des indices de réfraction des divers milieux.

CHAPITRE VII.

THÉORIE DES LIGNES DE COURBURE.

Définition des lignes de courbure.

663. On nomme ligne de courbure d'une surface une ligne située sur cette surface et tangente en chacun de ses points à l'une des sections principales. Comme il passe, en chaque point de la surface, deux sections principales perpendiculaires l'une à l'autre, il passe aussi, en chaque point, deux lignes de courbure tangentes à ces sections et se coupant à angle droit. Les lignes de courbure d'une surface forment par conséquent deux systèmes dont chacun recouvre entièrement la surface, puisque par chacun de ses points passe une ligne de chaque système. Deux lignes de courbure de systèmes différents se coupent perpendiculairement, et, en général au moins, deux lignes de même système ne se coupent pas. Il existe cependant certains points (635) pour lesquels la direction des sections principales est indéterminée, et où peuvent se croiser une infinité de lignes de courbure; nous verrons d'ailleurs qu'en ces points ombilicaux eux-mêmes il ne passe quelquefois qu'une seule ligne de courbure.

664. Une ligne de courbure étant tangente en chaque point à une section principale de la surface, chacun des points d'une telle ligne peut être considéré, si l'on néglige les infiniment petits du second ordre, comme appartenant à la section principale qui correspond au point infiniment voisin. Il en résulte (636) que les normales menées à la surface par deux points infiniment voisins de la ligne de courbure peuvent être considérées comme se rencontrant, lorsque l'on néglige les infiniment petits d'ordre supérieur au premier. Cette propriété est caractéristique; elle exige en effet (637) que la direction de la ligne qui réunit les points de départ des deux normales infiniment voisines soit celle d'une section principale, et que par conséquent le lieu de ces points de départ soit une ligne de courbure.

On peut énoncer la propriété précédente en disant : pour qu'une ligne tracée sur une surface soit une ligne de courbure, il faut et il suffit que les normales menées par ses différents points forment une surface développable.

On doit remarquer que le plan et la sphère sont des surfaces exceptionnelles sur lesquelles il n'y a pas, à proprement parler, de lignes de courbure, ou sur lesquelles, si l'on veut, toute ligne est une ligne de courbure. Les sections principales sont en effet indéterminées, et une ligne arbitraire tracée sur une surface plane ou

sphérique peut être considérée comme étant en chaque point tangente à l'une d'elles. Les normales menées par les points de cette ligne forment d'ailleurs un cylindre ou un cône, c'est-à-dire, dans les deux cas, une surface développable.

Équation différentielle des lignes de courbure.

665. Lorsque l'équation d'une surface est donnée, on peut déterminer en chaque point la direction des sections principales, et par conséquent celle des lignes de courbure. Il en résulte qu'étant données les coordonnées d'un point de l'une de ces lignes, on peut calculer leurs différentielles, et former par conséquent l'équation différentielle des lignes de courbure.

La propriété démontrée dans le paragraphe précédent permet d'ailleurs de former directement cette équation sans recourir aux formules relatives aux sections principales.

Soient x, y, z les coordonnées d'un point d'une surface donnée. En adoptant la notation habituelle, et posant $\frac{dz}{dx} = p$, $\frac{dz}{dy} = q$, $\frac{d^2z}{dx^2} = r$, $\frac{d^2z}{dx\,dy} = s$, $\frac{d^2z}{dy^2} = t$, les équations d'une normale sont

$$\begin{aligned} \xi - x + p(\zeta - z) &= 0, \\ \eta - y + q(\zeta - z) &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

ξ, η, ζ désignant les coordonnées courantes.

La normale au point voisin dont les coordonnées sont $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$, a pour équations

$$\begin{aligned} \xi - x - dx + (p + dp)(\zeta - z - dz) &= 0, \\ \eta - y - dy + (q + dq)(\zeta - z - dz) &= 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Pour que les deux normales se rencontrent, il faut que les équations (1) et (2) soient compatibles; leur combinaison donne, si l'on néglige les infiniment petits du second ordre,

$$\begin{aligned} dx + p\,dz - dp(\zeta - z) &= 0, \\ dy + q\,dz - dq(\zeta - z) &= 0, \end{aligned}$$

et en égalant les valeurs de $\zeta - z$, déduites de ces équations,

$$\frac{dx + p\,dz}{dp} = \frac{dy + q\,dz}{dq}.$$

En remplaçant dans cette équation dz, dp et dq par leurs valeurs, on obtiendra

l'équation différentielle des lignes de courbure. On a

$$dz = p\,dx + q\,dy,$$
$$dp = r\,dx + s\,dy,$$
$$dq = s\,dx + t\,dy,$$

et l'équation devient

$$\frac{dx\,(1+p^2)+pq\,dy}{r\,dx+s\,dy} = \frac{dy\,(1+q^2)+pq\,dx}{s\,dx+t\,dy},$$

ou, en réduisant,

$$(3)\quad dy^2[pqt - s(1+q^2)] + dx\,dy[(1+p^2)\,t - (1+q^2)\,r] + dx^2[(1+p^2)\,s - pqr] = 0.$$

Cette équation ne diffère de celle qui détermine (633) la direction des sections principales, que par la substitution de dx et dy à $\cos\alpha$ et à $\cos\beta$. On aurait pu le prévoir, car les différentielles des coordonnées des points d'une courbe sont proportionnelles aux cosinus des angles formés par la tangente avec les axes.

666. Les équations

$$(1)\quad \begin{aligned} dx + p\,dz - (\zeta - z)\,dp &= 0,\\ dy + q\,dz - (\zeta - z)\,dq &= 0, \end{aligned}$$

combinées avec celles de la normale, donnent les coordonnées ξ, η, ζ du point d'intersection des deux normales voisines; on en déduit

$$(2)\qquad \zeta - z = \frac{dx + p\,dz}{dp} = \frac{dy + q\,dz}{dq},$$

c'est-à-dire, en remplaçant dz, dp, dq par leurs valeurs,

$$(3)\qquad \zeta - z = \frac{(1+p^2)\,dx + pq\,dy}{r\,dx + s\,dy} = \frac{(1+q^2)\,dy + pq\,dx}{t\,dy + s\,dx}.$$

La relation (3) équivaut à deux équations, entre lesquelles on peut éliminer le rapport $\frac{dy}{dx}$; on obtient ainsi la relation

$$(\zeta - z)^2(rt - s^2) + (\zeta - z)[2pqs - (1+p^2)\,t - (1+q^2)\,r] + 1 + p^2 + q^2 = 0.$$

D'après cette équation, les valeurs de $\zeta - z$ sont les mêmes que celles de $\frac{1}{D}$ fournies par l'équation (12) (634), et celles de $(\zeta - z)\sqrt{1+p^2+q^2}$, égales par conséquent à $\frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{D}$, c'est-à-dire aux rayons de courbure des sections principales; or $\zeta - z$ est la projection sur l'axe des z de la portion de normale comprise entre la surface et le point d'intersection avec la normale voisine; le produit

$(\zeta - z)\sqrt{1+p^2+q^2}$ est donc la longueur même de cette normale qui se trouve égale au rayon de courbure principal. Il en résulte que deux normales infiniment voisines se coupent précisément au centre de courbure de la section principale.

667. Lorsque l'équation d'une surface est donnée sous la forme

$$\varphi(x, y, z) = 0, \tag{1}$$

il est quelquefois commode d'introduire dans l'équation différentielle des lignes de courbure les dérivées partielles de la fonction φ, au lieu des dérivées de z par rapport à x et à y. On pourrait aisément faire cette transformation dans les formules précédemment obtenues, mais il est plus simple de reprendre la question pour la traiter avec cette notation nouvelle. ξ, η, ζ désignant toujours les coordonnées courantes, la normale au point dont les coordonnées sont x, y, z, a pour équations

$$\frac{\xi - x}{\frac{d\varphi}{dx}} = \frac{\eta - y}{\frac{d\varphi}{dy}} = \frac{\zeta - z}{\frac{d\varphi}{dz}},$$

que l'on peut écrire

$$\begin{aligned} (\xi - x)\frac{d\varphi}{dz} - (\zeta - z)\frac{d\varphi}{dx} &= 0, \\ (\eta - y)\frac{d\varphi}{dz} - (\zeta - z)\frac{d\varphi}{dy} &= 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Pour exprimer que la normale au point x, y, z rencontre celle qui correspond au point voisin dont les coordonnées sont $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$, il faut écrire que les équations (2) sont compatibles avec celles que l'on obtient en les différentiant par rapport à x, y, z, considérés comme variant simultanément : on a ainsi

$$\begin{aligned} (\xi - x)\,d.\left(\frac{d\varphi}{dz}\right) - \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)dx - (\zeta - z)\,d.\left(\frac{d\varphi}{dx}\right) + \frac{d\varphi}{dx}dz &= 0, \\ (\eta - y)\,d.\left(\frac{d\varphi}{dz}\right) - \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)dy - (\zeta - z)\,d.\left(\frac{d\varphi}{dy}\right) + \frac{d\varphi}{dy}dz &= 0. \end{aligned} \tag{3}$$

L'élimination de $(\xi - x)$, $(\eta - y)$, $(\zeta - z)$ entre les équations (2) et (3) donne

$$d.\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)\left(\frac{d\varphi}{dz}dy - \frac{d\varphi}{dy}dz\right) + d.\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)\left(\frac{d\varphi}{dx}dz - \frac{d\varphi}{dz}dx\right) + d.\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)\left(\frac{d\varphi}{dy}dx - \frac{d\varphi}{dx}dy\right) = 0. \tag{4}$$

On a d'ailleurs

$$\begin{aligned} d.\left(\frac{d\varphi}{dx}\right) &= \frac{d^2\varphi}{dx^2}dx + \frac{d^2\varphi}{dx\,dy}dy + \frac{d^2\varphi}{dx\,dz}dz, \\ d.\left(\frac{d\varphi}{dy}\right) &= \frac{d^2\varphi}{dx\,dy}dx + \frac{d^2\varphi}{dy^2}dy + \frac{d^2\varphi}{dy\,dz}dz, \\ d.\left(\frac{d\varphi}{dz}\right) &= \frac{d^2\varphi}{dx\,dz}dx + \frac{d^2\varphi}{dy\,dz}dy + \frac{d^2\varphi}{dz^2}dz \end{aligned} \tag{5}$$

et, par là, l'équation (4) se transforme en une équation du second degré entre dx, dy, dz, à laquelle il faut adjoindre

$$\frac{d\varphi}{dx}\,dx+\frac{d\varphi}{dy}\,dy+\frac{d\varphi}{dz}\,dz=0.$$

668. Examinons le cas où le plan tangent au point x, y, z étant parallèle au plan des XY, les tangentes aux lignes de courbure sont parallèles à l'axe des X et à l'axe des Y. On a alors, en ce point, $dz=0$, $\frac{d\varphi}{dx}=0$, $\frac{d\varphi}{dy}=0$, et l'équation (4) doit avoir pour solutions $dx=0$, $dy=0$; or ces hypothèses lui donnent l'une des formes

$$\frac{d\varphi}{dz}\cdot d\cdot\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)=0, \tag{6}$$

$$\frac{d\varphi}{dz}\cdot d\cdot\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)=0, \tag{7}$$

suivant que l'on suppose $dx=0$ ou $dy=0$. On a d'ailleurs

$$d.\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)=\frac{d^2\varphi}{dx^2}\,dx+\frac{d^2\varphi}{dx\,dy}\,dx\,dy+\frac{d^2\varphi}{dx\,dz}\,dz,$$

$$d.\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)=\frac{d^2\varphi}{dx\,dy}\,dx+\frac{d^2\varphi}{dy^2}\,dy+\frac{d^2\varphi}{dy\,dz}\,dz,$$

c'est-à-dire, puisque dans l'équation (6) on a $dx=0$, $dz=0$, et dans (7) $dy=0$, $dz=0$,

$$d.\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)=\frac{d^2\varphi}{dx\,dy}\,dy,\qquad d.\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)=\frac{d^2\varphi}{dx\,dy}\,dx,$$

et par conséquent, $\frac{d\varphi}{dz}$ n'étant pas nul, les équations (6) et (7) se réduisent l'une et l'autre à

$$\frac{d^2\varphi}{dx\,dy}=0; \tag{8}$$

c'est la condition nécessaire et suffisante pour qu'en un point où le plan tangent est parallèle au plan des XY, les lignes de courbure soient tangentes aux axes de coordonnées.

669. Considérons une ligne de courbure sur une surface quelconque, et nommons X, Y, Z les cosinus des angles formés par la normale à la surface avec les axes de coordonnées. La ligne de courbure étant tangente en chaque point à une

section principale, on a (637)

$$\frac{dX}{dx} = \frac{dY}{dy} = \frac{dZ}{dz}, \tag{1}$$

les différentielles se rapportant, bien entendu, à un déplacement infiniment petit effectué sur la ligne de courbure même. On a vu de plus (637) que la valeur commune de ces trois rapports est égale à la courbure de la section normale tangente à la ligne de courbure considérée.

Ce théorème remarquable, signalé par O. Rodrigues, équivaut à l'équation différentielle des lignes de courbure qu'il est d'ailleurs facile d'en déduire explicitement, ainsi que l'équation du second degré, qui a pour racines les deux rayons de courbure principaux de la surface. Pour le montrer, considérons les équations

$$\begin{aligned} dx - \rho\, dX &= 0, \\ dy - \rho\, dY &= 0, \\ dz - \rho\, dZ &= 0; \end{aligned} \tag{2}$$

on a

$$\begin{aligned} dX &= \frac{dX}{dx}\,dx + \frac{dX}{dy}\,dy + \frac{dX}{dz}\,dz, \\ dY &= \frac{dY}{dx}\,dx + \frac{dY}{dy}\,dy + \frac{dY}{dz}\,dz, \\ dZ &= \frac{dZ}{dx}\,dx + \frac{dZ}{dy}\,dy + \frac{dZ}{dz}\,dz, \end{aligned} \tag{3}$$

et les équations (2) deviennent

$$\begin{aligned} \left(1 - \rho\frac{dX}{dx}\right)dx - \rho\frac{dX}{dy}\,dy - \rho\frac{dX}{dz}\,dz &= 0, \\ -\rho\frac{dY}{dx}\,dx + \left(1 - \rho\frac{dY}{dy}\right)dy - \rho\frac{dY}{dz}\,dz &= 0, \\ -\rho\frac{dZ}{dx}\,dx - \rho\frac{dZ}{dy}\,dy + \left(1 - \rho\frac{dZ}{dz}\right)dz &= 0. \end{aligned} \tag{4}$$

En exprimant que ces équations sont compatibles, on obtient une équation en ρ, qui est, en apparence, du troisième degré, et dans laquelle les termes en ρ^3 disparaissent; cette équation étant supposée satisfaite, deux des équations (4) entraînent la troisième et déterminent les rapports $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dy}{dx}$ qui conviennent à un déplacement effectué sur la ligne de courbure. Si l'on veut retrouver l'équation en $\frac{dy}{dx}$

obtenue (665) par une autre méthode, on devra remplacer dz par sa valeur

$$dz = pdx + qdy.$$

Le résultat de l'élimination de ρ entre les équations ainsi obtenues sera l'équation du second degré en $\frac{dy}{dx}$.

Nous ne développerons pas ces calculs qui présenteraient peu d'intérêt, mais le principe sur lequel ils reposent est de grande importance, et nous aurons plusieurs fois occasion d'y avoir recours.

670. Nous déduirons immédiatement des considérations précédentes une conséquence intéressante relative à l'expression de la distance de deux points infiniment voisins sur une surface.

Supposons que la position d'un point sur une surface soit déterminée par les valeurs attribuées à deux variables α et β. Une valeur constante attribuée à l'une des variables détermine une courbe sur la surface, et lorsque α et β sont donnés, le point est déterminé par l'intersection des deux courbes correspondantes aux valeurs adoptées. Supposons α et β tellement choisis, que les courbes correspondantes aux valeurs constantes de l'un ou de l'autre soient précisément les lignes de courbure de la surface; soient alors x, y, z les coordonnées rectilignes d'un point quelconque de cette surface, X, Y, Z les cosinus des angles formés par la normale en ce point avec les axes de coordonnées. x, y, z, X, Y, Z, sont des fonctions déterminées de α et de β, et si l'on nomme ρ_1, ρ_2 les rayons de courbure principaux correspondant respectivement aux lignes pour lesquelles α et β sont constants, les équations obtenues (669) équivalent à

$$\rho_1 \frac{d\mathrm{X}}{d\beta} = \frac{dx}{d\beta}, \qquad \rho_2 \frac{d\mathrm{X}}{d\alpha} = \frac{dx}{d\alpha},$$
$$\rho_1 \frac{d\mathrm{Y}}{d\beta} = \frac{dy}{d\beta}, \qquad \rho_2 \frac{d\mathrm{Y}}{d\alpha} = \frac{dy}{d\alpha},$$
$$\rho_1 \frac{d\mathrm{Z}}{d\beta} = \frac{dz}{d\beta}, \qquad \rho_2 \frac{d\mathrm{Z}}{d\alpha} = \frac{dz}{d\alpha}.$$

Si l'on substitue aux variables α et β deux autres variables u et v qui en soient des fonctions connues, x, y, z deviendront des fonctions de u et de v, et leurs dérivées partielles seront données par les formules

$$\frac{dx}{du} = \frac{dx}{d\alpha}\frac{d\alpha}{du} + \frac{dx}{d\beta}\frac{d\beta}{du} = \rho_2 \frac{d\mathrm{X}}{d\alpha}\frac{d\alpha}{du} + \rho_1 \frac{d\mathrm{X}}{d\beta}\frac{d\beta}{du},$$
$$\frac{dy}{du} = \frac{dy}{d\alpha}\frac{d\alpha}{du} + \frac{dy}{d\beta}\frac{d\beta}{du} = \rho_2 \frac{d\mathrm{Y}}{d\alpha}\frac{d\alpha}{du} + \rho_1 \frac{d\mathrm{Y}}{d\beta}\frac{d\beta}{du},$$
$$\frac{dz}{du} = \frac{dz}{d\alpha}\frac{d\alpha}{du} + \frac{dz}{d\beta}\frac{d\beta}{du} = \rho_2 \frac{d\mathrm{Z}}{d\alpha}\frac{d\alpha}{du} + \rho_1 \frac{d\mathrm{Z}}{d\beta}\frac{d\beta}{du}.$$

Les dérivées relatives à la seconde variable v s'exprimeraient de la même manière. Le cas où la variable u se confond avec α mérite d'être remarqué, et conduit à un résultat qui sera utilisé : $\frac{d\alpha}{du}$ étant égal à l'unité, et les dérivées par rapport à u devenant des dérivées par rapport à α, on a

$$\frac{dx}{d\alpha} = \rho_2 \frac{dX}{d\alpha} + \rho_1 \frac{dX}{d\beta}\frac{d\beta}{d\alpha},$$

$$\frac{dy}{d\alpha} = \rho_2 \frac{dY}{d\alpha} + \rho_1 \frac{dY}{d\beta}\frac{d\beta}{d\alpha},$$

$$\frac{dz}{d\alpha} = \rho_2 \frac{dZ}{d\alpha} + \rho_1 \frac{dZ}{d\beta}\frac{d\beta}{d\alpha}.$$

Dans ces trois équations, on a pris pour variables indépendantes le paramètre α et une variable quelconque v qui reste constante dans le calcul des dérivées par rapport à α. On voit que dans les seconds membres les dérivées $\frac{dX}{d\alpha}$, $\frac{dY}{d\alpha}$, $\frac{dZ}{d\alpha}$ ont pour coefficient le rayon de courbure ρ_2 relatif à la ligne de courbure perpendiculaire à celle pour les points de laquelle α est constant.

671. Lorsque x, y, z, X, Y, Z, ont été exprimés en fonction de deux variables quelconques u et v, il existe entre les dérivées partielles de ces fonctions des relations nécessaires que nous allons faire connaître.

On a, pour un déplacement quelconque effectué sur la surface,

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = 0, \tag{1}$$

et puisque x, y, z sont fonctions de u et de v, en appliquant l'équation (1) aux deux déplacements qui résultent d'un changement infiniment petit attribué à une seule des deux variables, on a

$$\begin{aligned} X\frac{dx}{du} + Y\frac{dy}{du} + Z\frac{dz}{du} &= 0, \\ X\frac{dx}{dv} + Y\frac{dy}{dv} + Z\frac{dz}{dv} &= 0. \end{aligned} \tag{2}$$

L'équation

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$$

donne d'ailleurs

$$\begin{aligned} X\frac{dX}{du} + Y\frac{dY}{du} + Z\frac{dZ}{du} &= 0, \\ X\frac{dX}{dv} + Y\frac{dY}{dv} + Z\frac{dZ}{dv} &= 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Chacune des deux équations (3) doit être une conséquence des équations (2); car s'il en était autrement, on aurait trois équations distinctes entre X, Y, Z, dont la seule solution possible serait

$$X=0, \quad Y=0, \quad Z=0.$$

Il faut donc que les équations (2) puissent s'obtenir en ajoutant les équations (3) après les avoir multipliées par des coefficients convenablement choisis, et l'on a par conséquent, en désignant par M et N des fonctions convenables,

$$(4)\qquad \begin{aligned} \frac{dx}{du}&=M\frac{dX}{du}+N\frac{dX}{dv}, & \frac{dx}{dv}&=M'\frac{dX}{du}+N'\frac{dX}{dv},\\ \frac{dy}{du}&=M\frac{dY}{du}+N\frac{dY}{dv}, & \frac{dy}{dv}&=M'\frac{dY}{du}+N'\frac{dY}{dv},\\ \frac{dz}{du}&=M\frac{dZ}{du}+N\frac{dZ}{dv}, & \frac{dz}{dv}&=M'\frac{dZ}{du}+N'\frac{dZ}{dv}. \end{aligned}$$

La démonstration de ces équations est en défaut lorsque les deux équations (3) rentrent l'une dans l'autre, c'est-à-dire dans le cas où l'on a

$$(5)\qquad \frac{\dfrac{dX}{du}}{\dfrac{dX}{dv}}=\frac{\dfrac{dY}{du}}{\dfrac{dY}{dv}}=\frac{\dfrac{dZ}{du}}{\dfrac{dZ}{dv}}.$$

Ces relations expriment que Y et Z sont fonctions de X, ou en d'autres termes que X, Y, Z peuvent s'exprimer tous trois en fonction d'une seule variable; à chaque valeur de cette variable correspond une direction de la normale, et comme il n'est pas possible qu'une surface admette une infinité de plans tangents parallèles entre eux, le plan tangent correspondant est déterminé. L'équation du plan tangent étant déterminée par une seule variable, la surface est l'enveloppe des positions d'un plan dans l'équation duquel figure un seul paramètre, c'est-à-dire une surface développable. Les surfaces développables font donc seules exception au résultat que nous venons d'obtenir.

672. Lorsque après avoir choisi deux variables quelconques u et v, on aura formé les équations dont la possibilité vient d'être démontrée,

$$(1)\qquad \begin{aligned} \frac{dx}{du}&=M\frac{dX}{du}+N\frac{dX}{dv}, & \frac{dx}{dv}&=M'\frac{dX}{du}+N'\frac{dX}{dv},\\ \frac{dy}{du}&=M\frac{dY}{du}+N\frac{dY}{dv}, & \frac{dy}{dv}&=M'\frac{dY}{du}+N'\frac{dY}{dv},\\ \frac{dz}{du}&=M\frac{dZ}{du}+N\frac{dZ}{dv}, & \frac{dz}{dv}&=M'\frac{dZ}{du}+N'\frac{dZ}{dv}, \end{aligned}$$

on pourra en déduire, en chaque point, l'expression des deux rayons de courbure de la surface. Si l'on se déplace en effet sur une ligne de courbure, on a (669), en nommant ρ le rayon correspondant,

$$dx = \rho\, dX, \quad dy = \rho\, dY, \quad dz = \rho\, dZ, \tag{2}$$

c'est-à-dire,

$$\begin{aligned} \frac{dx}{du}\,du + \frac{dx}{dv}\,dv &= \rho\left(\frac{dX}{du}\,du + \frac{dX}{dv}\,dv\right), \\ \frac{dy}{du}\,du + \frac{dy}{dv}\,dv &= \rho\left(\frac{dY}{du}\,du + \frac{dY}{dv}\,dv\right), \\ \frac{dz}{du}\,du + \frac{dz}{dv}\,dv &= \rho\left(\frac{dZ}{du}\,du + \frac{dZ}{dv}\,dv\right). \end{aligned} \tag{3}$$

En remplaçant dans ces équations $\frac{dx}{du}, \frac{dx}{dv}, \dots$, pour les valeurs déduites du système (1), on obtiendra trois équations de chacune desquelles on pourra déduire la valeur de l'un des trois rapports

$$\frac{\dfrac{dX}{du}}{\dfrac{dX}{dv}}, \quad \frac{\dfrac{dY}{du}}{\dfrac{dY}{dv}}, \quad \frac{\dfrac{dZ}{du}}{\dfrac{dZ}{dv}}, \tag{4}$$

et ces valeurs seront précisément les mêmes. Or on sait, cependant, que ces trois fractions ne sont égales que dans le cas d'une surface développable; en excluant donc ce cas, il faut que les expressions identiques fournies pour ces rapports par nos équations se réduisent à $\frac{0}{0}$, et pour cela on doit avoir

$$\begin{aligned} (M - \rho)\,du + M'\,dv &= 0, \\ N\,du + (N' - \rho)\,dv &= 0; \end{aligned} \tag{5}$$

on en conclut

$$(M - \rho)(N' - \rho) - M'N = 0, \tag{6}$$

équation du second degré qui fera connaître les rayons de courbure. ρ étant connu, les équations (5) fourniront la valeur du rapport $\frac{du}{dv}$ qui convient à la ligne de courbure correspondante.

Si l'on suppose que l'une des lignes de courbure corresponde à une valeur constante de u, on a pour cette ligne $du = 0$; comme dv est nécessairement alors différent de zéro, les équations (5) donnent

$$M' = 0, \quad N' = \rho,$$

ce qui s'accorde avec les résultats obtenus plus directement (670).

Surface tangente aux normales d'une surface donnée.

673. Les normales d'une surface sont, en général, tangentes à deux autres surfaces que les résultats précédents permettent de définir. Si l'on considère, en effet, les lignes de courbure de l'un des systèmes, les normales menées à la surface par les points de chacune d'elles sont tangentes à une même courbe, et la surface lieu de ces courbes est évidemment tangente à toutes les normales de la proposée. Les lignes de courbure du second système peuvent servir de même à déterminer une seconde surface également touchée par toutes les normales de la première.

674. Aucune autre surface ne partage avec celles que nous venons de définir la propriété d'être touchée par toutes les normales de la proposée. Supposons, en effet, une surface Σ, touchée en chacun de ses points par une des normales de S. Nous pouvons concevoir que l'on ait tracé sur Σ des courbes tangentes en chaque point à la normale correspondante de S; les tangentes à l'une de ces courbes forment une surface développable dont les génératrices sont normales à S et coupent par conséquent celle-ci suivant une ligne de courbure. La surface Σ est par conséquent le lieu des arêtes de rebroussement des surfaces développables formées par les normales aux divers points des lignes de courbure de S, c'est-à-dire l'une des deux surfaces définies au paragraphe précédent.

675. Les deux surfaces auxquelles sont tangentes, comme on vient de le voir, les normales d'une même surface, ont entre elles une certaine dépendance. En les choisissant arbitrairement, il serait impossible, en général, de trouver une troisième surface dont les normales leur fussent tangentes à toutes deux.

Les deux surfaces Σ et Σ', auxquelles sont tangentes les normales d'une même surface S, sont telles, en effet, qu'en quelque point de l'espace qu'on suppose placé l'œil d'un observateur qui les regarde, leurs contours apparents paraissent se couper à angle droit.

Pour démontrer ce théorème, considérons un point quelconque de la surface S, et les deux lignes de courbure qui s'y croisent; les normales à la surface, menées par les points de chacune de ces lignes de courbure, forment deux surfaces développables dont chacune est tangente à l'une des surfaces Σ et Σ', et son arête de rebroussement est située sur l'autre. Il semble au premier abord que toutes les génératrices de la surface développable étant tangentes aux surfaces Σ et Σ', cette surface leur est elle-même tangente à toutes deux, mais cela n'a pas lieu cependant, comme on l'a expliqué (662) pour celle qui contient l'arête de rebroussement, parce que le plan qui contient deux tangentes infiniment voisines d'une surface cesse d'être tangent à la surface lorsque la ligne qui joint les points de contact se confond à la limite avec chacune des deux tangentes.

Les deux surfaces développables qui se coupent suivant la normale en un point donné de S sont perpendiculaires l'une à l'autre, comme les lignes de courbure suivant lesquelles elles coupent la surface S: or, en supposant l'œil d'un observateur placé en un point quelconque de la génératrice commune de ces deux surfaces, les cônes circonscrits à Σ et à Σ' ayant ce point pour sommet passeront tous deux par la génératrice des deux surfaces développables auxquelles ils seront tangents; ils se coupent par conséquent à angle droit: c'est ce qu'il fallait démontrer.

676. Quoique le théorème précédent établisse une dépendance très-intime entre les deux surfaces auxquelles sont tangentes les normales d'une surface donnée, il s'en faut de beaucoup que, l'une d'elles étant donnée, il soit possible de déterminer l'autre. Si l'on se donne en effet une seule surface à laquelle soient tangentes les normales d'une surface inconnue, on pourra déterminer celle-ci d'une infinité de manières, en traçant sur la première une série quelconque de lignes géodésiques (662) dont elle coupera les tangentes à angle droit.

Cherchons par exemple une surface dont les normales soient tangentes à une sphère. Il faut, d'après ce qu'on vient de dire, concevoir sur la sphère une série quelconque de grands cercles; la surface cherchée coupera à angle droit les tangentes à ces cercles, et sera par conséquent le lieu d'une série de développantes de cercle.

Il est aisé de voir que dans le cas dont il s'agit, la seconde surface à laquelle les normales sont tangentes est un cône ayant pour sommet le centre de la sphère. Quels que soient, en effet, les grands cercles tracés sur la sphère, leurs plans, qui passent tous par le centre, enveloppent un cône ayant ce centre pour sommet, et toutes leurs tangentes, étant situées dans les plans tangents de ce cône, touchent évidemment sa surface.

Réciproquement, si l'on se donne une sphère et un cône quelconque ayant pour sommet le centre de celle-ci, les plans tangents à ce cône coupent la sphère suivant des cercles dont les tangentes, qui touchent à la fois la sphère et le cône, sont les normales d'une même surface. Cette surface peut être engendrée, comme on le voit bien facilement, par une développante de cercle située dans un des plans tangents au cône, et qui se meut, sans changer de forme, pendant que le plan qui la contient roule sur le cône en le touchant successivement suivant toutes ses génératrices.

677. On peut indiquer plus généralement la description des surfaces dont les normales sont tangentes à une surface développable donnée. Toutes les normales à la surface inconnue, dont les points de contact sont sur une même génératrice de la surface développable, sont en effet dans un même plan; elles sont donc tangentes

à une même courbe, et percent par conséquent la surface inconnue suivant une ligne de courbure qui évidemment est plane. Choisissons pour cette ligne une courbe arbitraire située dans le plan tangent à la surface développable: si l'on suppose ensuite que ce plan roule sur la surface en la touchant successivement suivant chaque génératrice autour de laquelle il tourne, pour passer à la position infiniment voisine, la courbe arbitraire étant entraînée, sans changer de forme, dans le mouvement du plan qui la contient, engendrera la surface demandée.

Chacun de ses points se meut, en effet, à chaque instant, normalement au plan même de la courbe, et par conséquent la normale à la surface engendrée est la normale même à la courbe génératrice située dans le plan de cette courbe, et touche constamment la surface développable donnée.

Ligne de courbure commune à deux surfaces.

678. Lorsque la courbe d'intersection de deux surfaces est ligne de courbure de l'une et de l'autre, les deux surfaces se coupent sous un angle constant.

Si, en effet, on mène par chaque point de l'intersection une normale à chacune des surfaces considérées, ces deux systèmes de normales envelopperont deux courbes qui sont (610) deux développées de la courbe d'intersection. Or on a prouvé (619) que les normales issues de chaque point d'une courbe et tangentes à deux développées différentes forment un angle constant.

Réciproquement, si deux surfaces se coupent sous un angle constant, et que leur intersection soit une ligne de courbure de la première, elle est aussi ligne de courbure de la seconde.

Les normales menées à la première surface par les points de l'intersection enveloppent en effet une développée de celle-ci; or, en faisant tourner chacune d'elles d'un angle constant autour de la tangente à la courbe d'intersection, pour obtenir les normales à l'autre surface, on déterminera (619) les normales tangentes à une seconde développée de la courbe d'intersection; cette ligne est donc une ligne de courbure de la seconde surface, puisque les normales menées à cette surface par les différents points sont tangentes à une même courbe.

Lorsqu'un plan ou une sphère coupe une surface suivant une ligne de courbure, cette ligne peut toujours être considérée (619) comme étant, en même temps, ligne de courbure du plan ou de la sphère : le théorème précédent est donc applicable, et par conséquent les deux surfaces se coupent sous un angle constant. Réciproquement, si un plan ou une sphère coupe une surface quelconque sous un angle constant, l'intersection, étant nécessairement ligne de courbure du plan ou de la sphère, est aussi ligne de courbure de la seconde surface.

679. Les théorèmes précédents peuvent aisément se démontrer analytiquement.

Soient, en effet,

$$\varphi(x, y, z) = 0,$$
$$\psi(x, y, z) = 0,$$

les équations de deux surfaces qui se coupent suivant une ligne de courbure commune. Nommons x, y, z les coordonnées d'un point de l'intersection, et dx, dy, dz les variations relatives à un déplacement infiniment petit effectué sur cette ligne; les angles formés avec les axes par les normales aux deux surfaces étant α, β, γ, α', β', γ', on a

$$\begin{aligned} &\cos\alpha\, dx + \cos\beta\, dy + \cos\gamma\, dz = 0, \\ &\cos\alpha'\, dx + \cos\beta'\, dy + \cos\gamma'\, dz = 0; \end{aligned} \tag{1}$$

de plus, l'intersection étant une ligne de courbure de chacune des surfaces, on a (669)

$$\frac{dx}{d\cos\alpha} = \frac{dy}{d\cos\beta} = \frac{dz}{d\cos\gamma},$$
$$\frac{dx}{d\cos\alpha'} = \frac{dy}{d\cos\beta'} = \frac{dz}{d\cos\gamma'},$$

d'après lesquelles on déduit de (1)

$$\cos\alpha\, d\cos\alpha' + \cos\beta\, d\cos\beta' + \cos\gamma\, d\cos\gamma' = 0,$$
$$\cos\alpha'\, d\cos\alpha + \cos\beta'\, d\cos\beta + \cos\gamma'\, d\cos\gamma = 0,$$

et en ajoutant ces deux équations,

$$d(\cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma') = 0,$$

c'est-à-dire

$$\cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma' = \text{const.}$$

Cette équation exprime évidemment que les deux surfaces se coupent sous un angle constant.

680. Réciproquement, si deux surfaces se coupent sous un angle constant, et que l'intersection soit ligne de courbure de la première, elle est aussi ligne de courbure de la seconde. On a alors, en effet, en adoptant les notations du paragraphe précédent,

$$\frac{dx}{d\cos\alpha} = \frac{dy}{d\cos\beta} = \frac{dz}{d\cos\gamma}, \tag{1}$$

le signe d se rapportant toujours à un déplacement infiniment petit effectué sur la

ligne d'intersection, et pour exprimer que l'angle des deux normales est constant,

$$d(\cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma') = 0; \tag{2}$$

on a enfin les deux équations

$$\begin{aligned} \cos\alpha\, dx + \cos\beta\, dy + \cos\gamma\, dz &= 0, \\ \cos\alpha'\, dx + \cos\beta'\, dy + \cos\gamma'\, dz &= 0, \end{aligned} \tag{3}$$

qui expriment que la courbe d'intersection est perpendiculaire aux deux normales.

Des équations (1) et (3) on déduit évidemment

$$\cos\alpha'\, d\cos\alpha + \cos\beta'\, d\cos\beta + \cos\gamma'\, d\cos\gamma = 0, \tag{4}$$

qui, combinée avec l'équation (2), donne

$$\cos\alpha\, d\cos\alpha' + \cos\beta\, d\cos\beta' + \cos\gamma\, d\cos\gamma' = 0, \tag{5}$$

et on a d'ailleurs

$$\cos\alpha'\, d\cos\alpha' + \cos\beta'\, d\cos\beta' + \cos\gamma'\, d\cos\gamma' = 0, \tag{6}$$

et les équations (5) et (6), rapprochées des équations (3), donnent

$$\frac{dx}{d\cos\alpha'} = \frac{dy}{d\cos\beta'} = \frac{dz}{d\cos\gamma'}, \tag{7}$$

ce qui exprime (669) que l'intersection est une ligne de courbure de la seconde surface.

Surfaces orthogonales.

681. Nous avons déjà considéré (**123**) les systèmes de surfaces qui, se coupant orthogonalement, partagent l'espace en parallélipipèdes infiniment petits. Cette étude, qui semble appelée à prendre une grande importance, a déjà fourni de beaux résultats à la géométrie et à l'analyse. L'une des propositions les plus célèbres et les plus importantes dans cette théorie est le théorème suivant dû à M. Charles Dupin.

Lorsque trois séries de surfaces se coupent orthogonalement, l'intersection de deux quelconques d'entre elles est une ligne de courbure de l'une et de l'autre.

Considérons, en effet, un point A où se coupent trois surfaces du système considéré, et soient AX, AY, AZ les tangentes aux trois lignes d'intersection, et aussi, d'après nos hypothèses, les normales aux trois surfaces; prenons ces lignes pour axes

de coordonnées, et considérons trois points M, N, P respectivement situés sur elles à distances infiniment petites et égales entre elles du point A. On peut, en négligeant les infiniment petits du second ordre, regarder ces points comme situés sur les courbes d'intersection auxquelles les axes sont tangents. Soient α, β, γ, α', β', γ' les angles formés avec les axes par les normales en M aux deux surfaces qui se coupent suivant AM; ces deux normales étant perpendiculaires l'une à l'autre, on a

$$\cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma' = 0. \tag{1}$$

α et α' différant infiniment peu d'un angle droit, et β étant infiniment petit ainsi que γ', cette équation devient, en négligeant les infiniment petits du second ordre,

$$\cos\beta' + \cos\gamma = 0. \tag{2}$$

Soient de même α_1, β_1, γ_1, α'_1, β'_1, γ'_1, les angles formés avec les axes par les normales en N aux deux surfaces qui se coupent suivant AN, et α_2, β_2, γ_2, α'_2, β'_2, γ'_2 les angles analogues relatifs au point P: on aura de même

$$\begin{aligned} \cos\gamma'_1 + \cos\alpha_1 &= 0, \\ \cos\alpha'_1 + \cos\beta_2 &= 0; \end{aligned} \tag{3}$$

mais d'après le théorème démontré (649), on a

$$\begin{aligned} \cos\beta_2 &= \cos\gamma'_1, \\ \cos\gamma &= \cos\alpha'_1, \\ \cos\alpha_1 &= \cos\beta'. \end{aligned} \tag{4}$$

Si l'on remplace les premiers membres de ces trois équations par leurs valeurs déduites de (2) et (3), on a

$$\cos\beta' + \cos\alpha'_1 = 0, \quad \cos\gamma'_1 + \cos\beta' = 0, \quad \cos\alpha'_1 + \cos\gamma'_1 = 0. \tag{5}$$

Ajoutant les deux premières membre à membre, et retranchant la troisième, on a enfin

$$2\cos\beta' = 0; \tag{6}$$

on en déduit immédiatement

$$\cos\gamma'_1 = 0, \quad \cos\alpha'_1 = 0, \quad \cos\alpha_1 = 0, \quad \cos\gamma = 0, \quad \cos\beta_2 = 0. \tag{7}$$

L'équation (6) exprime que la normale en M à l'une des surfaces qui passent par ce point est perpendiculaire à l'axe des Y, et située par conséquent dans le plan ZAX; elle rencontre donc la normale en A qui est AZ, et AA' est la direction d'une ligne de courbure: on verra de même qu'en vertu des cinq équations (7) les lignes de courbure des trois surfaces qui se coupent en A sont tangentes aux axes

AX, AY, AZ; et comme A est un point arbitrairement choisi, on voit que chaque courbe d'intersection est tangente en chaque point à l'une des lignes de courbure des surfaces sur lesquelles elle est située, ce qui exige évidemment qu'elle soit elle-même une ligne de courbure.

682. Le théorème précédent ayant une grande importance, nous en donnerons une seconde démonstration.

Soient

$$\varphi_1(x, y, z) = \rho_1, \quad \varphi_2(x, y, z) = \rho_2, \quad \varphi_3(x, y, z) = \rho_3$$

les équations des trois systèmes de surfaces dans lesquelles ρ_1, ρ_2, ρ_3 désignent des paramètres arbitraires dont la valeur les caractérise. Supposons les axes choisis de telle manière que l'origine des coordonnées soit un point où se croisent trois de nos surfaces. Supposons de plus que la première surface soit tangente au plan des XZ, la seconde au plan des XY, et la troisième au plan des YZ; les surfaces se coupant toujours à angle droit, on a identiquement

$$(1) \qquad \frac{d\varphi_1}{dx}\frac{d\varphi_2}{dx} + \frac{d\varphi_1}{dy}\frac{d\varphi_2}{dy} + \frac{d\varphi_1}{dz}\frac{d\varphi_2}{dz} = 0,$$

$$(2) \qquad \frac{d\varphi_2}{dx}\frac{d\varphi_3}{dx} + \frac{d\varphi_2}{dy}\frac{d\varphi_3}{dy} + \frac{d\varphi_2}{dz}\frac{d\varphi_3}{dz} = 0,$$

$$(3) \qquad \frac{d\varphi_3}{dx}\frac{d\varphi_1}{dx} + \frac{d\varphi_3}{dy}\frac{d\varphi_1}{dy} + \frac{d\varphi_3}{dz}\frac{d\varphi_1}{dz} = 0.$$

Différentions l'équation (1) par rapport à x, l'équation (2) par rapport à y, et l'équation (3) par rapport à z, nous aurons

$$(4) \quad \frac{d\varphi_1}{dx}\frac{d^2\varphi_2}{dx^2} + \frac{d\varphi_2}{dx}\frac{d^2\varphi_1}{dx^2} + \frac{d^2\varphi_1}{dx\,dy}\frac{d\varphi_2}{dy} + \frac{d\varphi_1}{dy}\frac{d^2\varphi_2}{dx\,dy} + \frac{d^2\varphi_1}{dx\,dz}\frac{d\varphi_2}{dz} + \frac{d\varphi_1}{dz}\frac{d^2\varphi_2}{dx\,dz} = 0,$$

$$(5) \quad \frac{d\varphi_2}{dx}\frac{d^2\varphi_3}{dx\,dy} + \frac{d\varphi_3}{dx}\frac{d^2\varphi_2}{dx\,dy} + \frac{d\varphi_2}{dy}\frac{d^2\varphi_3}{dy^2} + \frac{d\varphi_3}{dy}\frac{d^2\varphi_2}{dy^2} + \frac{d\varphi_2}{dz}\frac{d^2\varphi_3}{dz\,dy} + \frac{d\varphi_3}{dz}\frac{d^2\varphi_2}{dz\,dy} = 0,$$

$$(6) \quad \frac{d\varphi_3}{dx}\frac{d^2\varphi_1}{dx\,dz} + \frac{d\varphi_1}{dx}\frac{d^2\varphi_3}{dx\,dz} + \frac{d\varphi_3}{dy}\frac{d^2\varphi_1}{dy\,dz} + \frac{d\varphi_1}{dy}\frac{d^2\varphi_3}{dy\,dz} + \frac{d\varphi_3}{dz}\frac{d^2\varphi_1}{dz^2} + \frac{d\varphi_1}{dz}\frac{d^2\varphi_3}{dz^2} = 0.$$

Si dans ces équations, qui sont identiques, on suppose $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, on aura, d'après les hypothèses faites sur les plans tangents à l'origine,

$$\frac{d\varphi_1}{dx} = 0, \quad \frac{d\varphi_1}{dz} = 0, \quad \frac{d\varphi_2}{dy} = 0, \quad \frac{d\varphi_2}{dx} = 0, \quad \frac{d\varphi_3}{dz} = 0, \quad \frac{d\varphi_3}{dy} = 0,$$

et les équations deviennent

$$\frac{d\varphi_1}{dy}\frac{d^2\varphi_2}{dx\,dy}+\frac{d\varphi_2}{dz}\frac{d^2\varphi_1}{dx\,dz}=0, \tag{7}$$

$$\frac{d\varphi_3}{dx}\frac{d^2\varphi_2}{dx\,dy}+\frac{d\varphi_2}{dz}\frac{d^2\varphi_3}{dz\,dy}=0, \tag{8}$$

$$\frac{d\varphi_3}{dx}\frac{d^2\varphi_1}{dx\,dz}+\frac{d\varphi_1}{dy}\frac{d^2\varphi_3}{dy\,dz}=0. \tag{9}$$

Des équations (7) et (9), on déduit

$$\frac{d^2\varphi_2}{dx\,dy}\frac{d\varphi_3}{dx}-\frac{d^2\varphi_3}{dy\,dz}\frac{d\varphi_2}{dz}=0,$$

qui, combinée à (8), donne

$$\frac{d\varphi_3}{dx}\frac{d^2\varphi_2}{dx\,dy}=0,$$

$$\frac{d\varphi_2}{dz}\frac{d^2\varphi_3}{dy\,dz}=0,$$

et comme $\frac{d\varphi_3}{dx}$, $\frac{d\varphi_2}{dz}$ ne sont pas nuls, on en conclut

$$\frac{d^2\varphi_2}{dx\,dy}=0, \qquad \frac{d^2\varphi_3}{dy\,dz}=0;$$

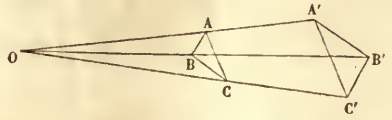
on trouverait de même

$$\frac{d^2\varphi_1}{dx\,dz}=0,$$

ce qui démontre (667) que les lignes de courbure sont, à l'origine, tangentes aux axes de coordonnées, et comme l'origine est un point arbitraire de l'espace, les lignes de courbure sont en chaque point tangentes aux intersections des surfaces deux à deux, et sont par conséquent ces intersections mêmes.

683. Les géomètres ont obtenu, par des méthodes sur lesquelles nous aurons à revenir, et qui ne peuvent être exposées en ce moment, un grand nombre de systèmes de surfaces orthogonales, dont, par cela même, le théorème précédent fait connaître les lignes de courbure. Bornons-nous à montrer ici comment, un tel système étant connu, on peut en déduire une infinité d'autres. Il suffit de faire subir aux surfaces qui composent le système donné la transformation *par rayons vecteurs réciproques*, qui consiste, comme on sait, à joindre chaque point M du système à un point fixe O, et à prolonger OM jusqu'en un point M′ tel, que le produit OM.OM′ soit

égal à un carré donné. Le point M′ ainsi défini est dit le correspondant de M. Chaque point de la figure primitive ayant son correspondant, chaque ligne et chaque surface a évidemment une ligne ou une surface correspondante. Un triangle infiniment petit quelconque ABC est transformé de cette manière en un tri-



angle semblable A′B′C′. On a, en effet, par hypothèse, en désignant par K une ligne donnée, $OA.OA' = K^2$, $OB.OB' = K^2$, $OC.OC' = K^2$. Il en résulte que les triangles OAB, OA′B′ sont semblables, et que l'on a

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{OB}{OA'},$$

et comme OB diffère infiniment peu de OA,

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{OA}{OA'}.$$

On trouvera de même, en négligeant une portion infiniment petite du rapport,

$$\frac{AC}{A'C'} = \frac{OA}{OA'}, \qquad \frac{BC}{B'C'} = \frac{OA}{OA'}.$$

Les triangles ABC, A′B′C′ ont donc leurs côtés proportionnels et sont semblables. Il résulte de là que l'angle de deux courbes quelconques est le même que celui des courbes correspondantes. Cet angle, en effet, peut toujours être considéré comme appartenant à un triangle infiniment petit, dont le troisième côté soit convenablement choisi, et qui, d'après la remarque précédente, se transformera en un triangle semblable.

Il est clair aussi que deux surfaces qui se coupent en un point auront pour transformées deux surfaces qui, au point correspondant, formeront le même angle dièdre. Si l'on considère, en effet, un tétraèdre infiniment petit, les faces du tétraèdre transformé qui, à cause de leur petitesse, peuvent être regardées comme planes, seront semblables à celles du tétraèdre primitif, et par conséquent les dièdres des deux figures seront égaux. Or un dièdre quelconque peut évidemment appartenir à un tétraèdre infiniment petit convenablement choisi.

Les angles restant invariables dans la transformation, un système de surfaces orthogonales aura pour transformé un nouveau système dont les surfaces seront également orthogonales. L'intersection de deux surfaces du premier système corres-

pondant évidemment à celle de deux surfaces du système transformé, les lignes de courbure de l'une quelconque des surfaces transformées sont les lignes correspondantes aux lignes de courbure de la surface qui lui a donné naissance.

Ce théorème s'applique, on le voit aisément, à la transformation par rayons vecteurs réciproques d'une surface quelconque, qu'elle fasse ou non partie d'un système de surfaces orthogonales. La restriction est en effet inutile, parce que la condition qu'elle exprime est remplie par une surface quelconque, sans qu'il y ait aucune exception. Si l'on trace en effet, sur une surface quelconque, les lignes de courbure de l'un et l'autre système, et que par les points de chacune d'elles on élève des normales, on formera deux séries de surfaces développables se coupant orthogonalement, et qui, avec les surfaces parallèles à la surface donnée, formeront évidemment un triple système orthogonal dont celle-ci fait partie. Le théorème précédent lui est par conséquent applicable, et lorsqu'on la transforme par rayons vecteurs réciproques, ces lignes de courbure ont pour transformées les lignes de courbure de la surface obtenue.

Détermination des lignes de courbure dans quelques cas simples.

684. La détermination des lignes de courbure d'une surface revient à trouver une courbe d'après la direction connue de sa tangente en chaque point. Ce problème conduit à une équation différentielle qui a été formée (665). La recherche de l'équation sous forme finie, quand on veut prendre pour point de départ cette équation différentielle, conduit à un problème de calcul intégral que nous n'aborderons pas dans ce chapitre, et que l'on est loin d'ailleurs de savoir résoudre d'une manière générale.

Nous nous bornerons à traiter quelques cas simples dans lesquels des considérations géométriques font connaître les lignes de courbure. Il est facile de vérifier ensuite que leur équation satisfait à l'équation différentielle connue.

685. *Surfaces de révolution.* — Les lignes de courbure d'une surface de révolution sont évidemment les méridiens et les parallèles de la surface. Les normales aux différents points d'un méridien sont en effet situées dans le plan de ce méridien, et se rencontrent par conséquent deux à deux. Les normales aux différents points d'un même parallèle forment un cône au sommet duquel chacune est rencontrée par la normale infiniment voisine. Ces lignes de courbure se coupent, comme cela doit être, à angle droit.

Les deux rayons de courbure principaux sont évidemment, en chaque point, le rayon de courbure de la ligne méridienne et la portion de normale comprise entre la surface et l'axe.

Lorsque la surface de révolution est sphérique, toutes les normales passent par le centre, et une ligne quelconque tracée sur la surface peut être considérée comme ligne de courbure.

686. Les résultats précédents peuvent aisément se déduire des formules données plus haut.

Soit

$$z = \varphi(x^2+y^2) \tag{1}$$

l'équation d'une surface de révolution autour de l'axe des z. On en déduit

$$\frac{dz}{dx} = p = 2x\varphi'(x^2+y^2),$$

$$\frac{dz}{dy} = q = 2y\varphi'(x^2+y^2),$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} = r = 2\varphi'(x^2+y^2)+4x^2\varphi''(x^2+y^2),$$

$$\frac{d^2z}{dy^2} = t = 2\varphi'(x^2+y^2)+4y^2\varphi''(x^2+y^2),$$

$$\frac{d^2z}{dx\,dy} = s = 4xy\varphi''(x^2+y^2).$$

L'équation différentielle des lignes de courbure (665) devient, par la substitution de ces valeurs,

$$[8\varphi'^3(x^2+y^2)-4\varphi''(x^2+y^2)]\left[xy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+(x^2-y^2)\,\frac{dy}{dx}-xy\right]=0. \tag{2}$$

Le second facteur égalé à zéro donne deux valeurs de $\frac{dy}{dx}$,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}, \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}. \tag{3}$$

La première de ces équations équivaut à

$$y\,dy + x\,dx = 0;$$

on en déduit

$$y^2+x^2 = c. \tag{4}$$

La seconde peut s'écrire

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x};$$

on en déduit

$$ly - lx = c, \tag{5}$$

et elle exprime par conséquent que le rapport $\frac{y}{x}$ est égal à une constante. La première de ces équations représente évidemment la projection des parallèles sur le plan des XY, et la seconde la projection des méridiens.

Si la fonction φ était telle, que l'on eût

$$2\varphi'^3(x^2+y^2) - \varphi''(x^2+y^2) = 0, \tag{6}$$

l'équation (2) serait identiquement satisfaite, et les lignes de courbure deviendraient indéterminées. Ce cas est celui où la surface est sphérique. Si nous posons en effet $x^2+y^2=u$, l'équation (6) devient

$$\frac{\varphi''(u)}{\varphi'^3(u)} = 2;$$

on en déduit

$$-\frac{1}{\varphi'^2(u)} = 4u + c,$$

et

$$\varphi'(u) = \sqrt{\frac{1}{-c-4u}}.$$

Le second membre est la dérivée de $-\frac{1}{2}\sqrt{-c-4u}$; on a donc

$$\varphi(u) = -\frac{1}{2}\sqrt{-c-4u} + c',$$

c et c' désignant deux constantes. L'équation de la surface de révolution dont les lignes de courbure sont indéterminées est par conséquent

$$z = -\frac{1}{2}\sqrt{-c-4(x^2+y^2)} + c',$$

ou

$$(2z+2c')^2 + 4(x^2+y^2) = -c',$$

équation d'une sphère dont le centre est sur l'axe des z.

687. L'analyse précédente prouve que parmi les surfaces de révolution la sphère est la seule dont les lignes de courbure soient indéterminées. On peut démontrer aisément qu'aucune autre surface ne partage avec elle cette propriété.

Pour que les lignes de courbure d'une surface soient indéterminées, il faut évidemment que chaque point soit un ombilic, et que la direction des sections princi-

pales soit arbitraire. La sphère et le plan remplissent évidemment cette condition; nous allons montrer qu'elles sont les seules. Considérons en effet une surface dont chaque point soit un ombilic; les deux rayons de courbure étant égaux en chaque point, les deux nappes de la surface, lieu des centres de courbure, se confondent. Si l'on considère sur cette surface une ligne quelconque, elle sera le lieu des centres de courbure relatifs aux points d'une certaine ligne tracée sur la surface proposée. Les normales menées par les points de cette dernière ligne sont par conséquent tangentes à la première : on en conclut que si M est un point de la surface lieu des centres de courbure, et A le point correspondant de la surface proposée, la droite AM est tangente à toute courbe tracée par le point M sur la première surface; le lieu des points M a donc, en chaque point, une tangente et non un plan tangent. Ce lieu est par conséquent une courbe et non une surface; mais alors toutes les normales à la surface proposée devraient être tangentes à une même courbe et former une seule surface développable. Cela est évidemment impossible; le lieu des points M doit donc se réduire à un point, et la surface lieu des points A est une sphère.

688. L'analyse conduit aisément à la même conséquence. Si tous les points d'une surface sont des ombilics, on a (635), pour toutes les valeurs de x et de y,

$$\frac{t}{1+q^2} = \frac{r}{1+p^2} = \frac{s}{pq},$$

d'où l'on déduit, en remarquant que

$$r = \frac{dp}{dx},$$

$$t = \frac{dq}{dy},$$

$$s = \frac{dp}{dy} = \frac{dq}{dx},$$

$$\frac{p\cdot\dfrac{dp}{dx}}{1+p^2} = \frac{1}{q}\frac{dq}{dx},$$

$$\frac{q\cdot\dfrac{dq}{dy}}{1+q^2} = \frac{1}{p}\frac{dp}{dy},$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{d}{dx}\left(l.\sqrt{1+p^2} - lq\right) = 0,$$

$$\frac{d}{dy}\left(l.\sqrt{1+q^2} - lp\right) = 0,$$

et par conséquent $\frac{\sqrt{1+p^2}}{q}$ est indépendant de x, et $\frac{\sqrt{1+q^2}}{p}$ indépendant de y. On a donc

$$1+p^2=\mathrm{Y}q^2,$$
$$1+q^2=\mathrm{X}p^2,$$

Y étant une fonction de y, et X une fonction de x. On déduit de ces deux équations

$$p=\sqrt{\frac{1+\mathrm{Y}}{\mathrm{XY}-1}},$$
$$q=\sqrt{\frac{1+\mathrm{X}}{\mathrm{XY}-1}},$$

et l'équation $\frac{dp}{dy}=\frac{dq}{dx}$ donne par suite

$$\frac{1}{(1+\mathrm{X})^{\frac{3}{2}}}\frac{d\mathrm{X}}{dx}=\frac{1}{(1+\mathrm{Y})^{\frac{3}{2}}}\frac{d\mathrm{Y}}{dy}.$$

Le premier membre de cette équation ne dépendant que de x, et le second que de y, il faut qu'ils soient tous deux constants; posons donc

$$\frac{\frac{d\mathrm{X}}{dx}}{(1+\mathrm{X}^2)^{\frac{3}{2}}}=c,$$

c'est-à-dire

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{X}}}=c,$$

ou

$$\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{X}}}=cx+c',$$

c et c' étant des constantes.

On aura de même

$$\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{Y}}}=cy+c''.$$

Si de ces équations on déduit X et Y, qu'on les substitue dans les valeurs de p et de q, puis dans l'équation

$$dz=p\,dx+q\,dy,$$

on a

$$dz=\frac{\left(\frac{c'}{c}-x\right)dx+\left(\frac{c''}{c}-y\right)dy}{\sqrt{\frac{1}{c^2}-\left(\frac{c'}{c}-x\right)^2-\left(\frac{c''}{c}-y\right)^2}}=d\sqrt{\frac{1}{c^2}-\left(\frac{c'}{c}-x\right)^2-\left(\frac{c''}{c}-y\right)^2},$$

et par conséquent,

$$z - c''' = \sqrt{\frac{1}{c^2} - \left(\frac{c'}{c} - x\right)^2 - \left(\frac{c''}{c} - y\right)^2},$$

ou

$$(z - c''')^2 + \left(\frac{c'}{c} - x\right)^2 + \left(\frac{c''}{c} - y\right)^2 = \frac{1}{c^2},$$

équations d'une sphère.

689. *Ellipsoïde.* — Soit

$$\frac{x^2}{\mu^2} + \frac{y^2}{\mu^2 - b^2} + \frac{z^2}{\mu^2 - c^2} = 1 \tag{1}$$

l'équation d'un ellipsoïde : cette surface fait partie (128) d'un triple système de surfaces orthogonales formé par toutes les surfaces du second degré, dont les sections principales sont décrites des mêmes foyers. Le théorème de M. Dupin fait par conséquent connaître les lignes de courbure qui résultent de l'intersection de l'ellipsoïde par les surfaces des deux autres systèmes, c'est-à-dire par les hyperboloïdes à deux nappes dont les équations sont

$$\frac{x^2}{\nu^2} + \frac{y^2}{\nu^2 - b^2} - \frac{z^2}{c^2 - \nu^2} = 1, \tag{2}$$

$$\frac{x^2}{\rho^2} - \frac{y^2}{b^2 - \rho^2} - \frac{z^2}{c^2 - \rho^2} = 1, \tag{3}$$

ν^2 et ρ^2 désignant deux paramètres arbitraires, le premier compris entre b^2 et c^2, et le second moindre que b^2.

Pour obtenir la projection des lignes de courbure sur le plan des XZ, c'est-à-dire sur celui des plans principaux de la surface qui contient le plus grand axe et le plus petit, il faut éliminer y entre les équations (1) et (2); on trouve ainsi

$$\frac{b^2 x^2}{\mu^2 \nu^2} + \frac{(c^2 - b^2) z^2}{(\mu^2 - c^2)(c^2 - \nu^2)} = 1. \tag{4}$$

Pour obtenir les lignes de courbure de l'autre système, il suffit de changer ν en ρ; leur équation est par conséquent

$$\frac{b^2 x^2}{\mu^2 \rho^2} + \frac{(c^2 - b^2) z^2}{(\mu^2 - c^2)(c^2 - \rho^2)} = 1. \tag{5}$$

Les équations (4) et (5) représentent des ellipses. Elles ne diffèrent que par le changement des paramètres arbitraires ν et ρ l'un dans l'autre. Mais on ne doit pas oublier que ν^2 est compris entre b^2 et c^2, tandis que ρ^2 est moindre que b^2. Si l'on

attribue à ces paramètres leur valeur limite, qui est b^2, les équations (4) et (5) deviennent

$$\frac{x^2}{\mu^2} + \frac{z^2}{\mu^2 - c^2} = 1, \tag{6}$$

et représentent toutes deux l'ellipse principale.

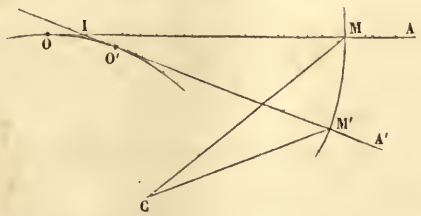
On peut aisément s'assurer que les ellipses définies par les équations (4) et (5) sont tangentes aux quatre droites représentées par l'équation

$$\pm\frac{bx}{\mu c} \pm \frac{\sqrt{c^2 - b^2}}{c\sqrt{\mu^2 - c^2}}\, z = 1. \tag{7}$$

Cette condition commune aux deux systèmes les définit complétement. L'équation (6) représente la courbe limite qui sépare les projections des lignes du premier système de celles du second.

690. *Surfaces développables.* — Les génératrices rectilignes d'une surface développable sont les lignes de courbure de l'un des systèmes; les normales menées par les points d'une même génératrice forment en effet un plan qui est la plus simple des surfaces développables. Les lignes de courbure de l'autre système coupent les génératrices à angle droit et sont par là déterminées; si l'on développait la surface, ces lignes deviendraient les développantes de la transformée de l'arête de rebroussement. En chaque point d'une surface développable un des rayons de courbure est infini. Les normales à la surface, menées par deux points infiniment voisins d'une génératrice, sont en effet parallèles, et le centre de courbure, qu'elles doivent déterminer par leur intersection, est par conséquent situé à l'infini. On voit d'ailleurs que la section normale tangente à la ligne de courbure est dans ce cas la génératrice elle-même, et que son rayon de courbure est infini.

Le second rayon de courbure varie d'une génératrice à l'autre avec la forme de la surface; elle varie aussi d'un point à l'autre d'une même génératrice. Nous allons en former l'expression générale.



Soient OA, O′A′ deux génératrices voisines d'une surface développable, dont l'arête de rebroussement est OO′; soit MM′ un arc infiniment petit de la ligne de courbure perpendiculaire à OA et O′A′: les normales à la surface aux points M et M′

se rencontrent au centre de courbure C, et MC est le rayon de courbure cherché.

On a, en nommant ε l'angle des deux normales,

$$MC = \frac{MM'}{\varepsilon}.$$

Si d'ailleurs on nomme ε' l'angle des deux génératrices OA, O'A', on sait qu'elles peuvent être considérées comme se rencontrant en un point I, situé sur l'arête de rebroussement, et l'on a

$$MI = \frac{MM'}{\varepsilon'},$$

par conséquent

$$MC = MI \cdot \frac{\varepsilon'}{\varepsilon};$$

pour tous les points d'une même génératrice, le rapport $\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}$ reste constant. MC est par conséquent proportionnel à MI, c'est-à-dire à MO qui n'en diffère pas à la limite.

Le rayon de courbure aux différents points d'une même génératrice est donc proportionnel à la distance de ce point à l'arête de rebroussement. Le rapport $\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}$ a d'ailleurs une valeur remarquable. ε' est en effet l'angle infiniment petit de deux tangentes à l'arête de rebroussement, et ε, angle de deux normales à la surface, est égal à celui des plans tangents, c'est-à-dire (571) à l'angle de deux plans osculateurs infiniment voisins de l'arête de rebroussement; $\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}$ est par conséquent le rapport des deux courbures de l'arête de rebroussement, et si l'on désigne les courbures par $\frac{1}{\rho}$ et $\frac{1}{r}$, on a enfin pour l'expression du rayon de courbure de la surface développable au point M,

$$MC = \frac{r}{\rho}(MO).$$

691. Lorsque la surface développable considérée est cylindrique, les lignes de courbure sont les sections droites du cylindre, et celui des deux rayons qui n'est pas infini reste constant sur une même génératrice.

Les lignes de courbure d'une surface conique sont les intersections du cône par des sphères ayant pour centre le sommet.

692. La propriété d'avoir en chaque point un rayon de courbure infini est caractéristique des surfaces développables. Si en effet le rayon relatif aux lignes de l'un des systèmes est infini, les normales menées à la surface par les points de cette

ligne sont parallèles; les plans tangents correspondants sont donc aussi parallèles, et se réduisent par conséquent à un seul, car une surface ne peut évidemment pas toucher une série continue de plans parallèles entre eux. La surface étant touchée par un même plan tout le long d'une ligne de courbure est l'enveloppe des positions d'un plan dans l'équation duquel ne figure qu'un paramètre variable, et est, par conséquent, une surface développable.

693. Le même théorème peut se démontrer analytiquement d'une manière fort simple. Pour que l'un des rayons de courbure de la surface soit infini, il faut que l'équation du second degré trouvée (634) ait une racine infinie, et pour cela la condition nécessaire et suffisante est

$$rt - s^2 = 0; \tag{1}$$

en posant

$$\frac{dz}{dx} = p, \qquad \frac{dz}{dy} = q,$$

on a, comme on sait,

$$r = \frac{dp}{dx}, \quad t = \frac{dq}{dy}, \quad s = \frac{dp}{dy} = \frac{dq}{dx}.$$

L'équation (1) équivaut par conséquent à

$$\frac{\frac{dp}{dx}}{\frac{dp}{dy}} = \frac{\frac{dq}{dx}}{\frac{dq}{dy}}, \tag{2}$$

et elle exprime (73) qu'il existe entre les fonctions p et q une relation

$$p = \varphi(q).$$

L'équation générale du plan tangent étant

$$\zeta - z = p(\xi - x) + q(\eta - y),$$

c'est-à-dire

$$\zeta = p\xi + q\eta + z - px - qy, \tag{3}$$

la surface cherchée est l'enveloppe des positions de ce plan. Or on peut démontrer que l'équation (3) ne contient qu'un seul paramètre variable q. On a en effet, comme on vient de le démontrer,

$$p = \varphi(q).$$

Si donc q est constant, p est constant aussi; p et q étant constants, l'expression

$$z - px - qy$$

est aussi constante: elle a en effet pour différentielle

$$dz - p\,dx - q\,dy - x\,dp - y\,dq;$$

or on a, puisque p et q sont constants,

$$dp = 0, \quad dq = 0,$$

et d'ailleurs,

$$dz = p\,dx + q\,dy.$$

Les coefficients de l'équation (3) sont donc constants pour chaque valeur donnée à q, la surface cherchée est par conséquent l'enveloppe d'un plan dont l'équation ne contient qu'un seul paramètre variable; c'est par conséquent une surface développable.

694. *Surface enveloppe d'une sphère.* — Lorsque l'équation d'une sphère mobile contient un seul paramètre variable, le centre de cette sphère parcourt une courbe déterminée, et à chacune de ses positions correspond une valeur déterminée du rayon; la surface enveloppée est le lieu des intersections de chaque sphère avec la sphère infiniment voisine; cette intersection est un cercle suivant lequel la sphère enveloppée touche la surface, et qui, évidemment, est une ligne de courbure. Les normales à la surface menées par les points de ce cercle sont en effet normales à une même sphère au centre de laquelle elles se rencontrent; le rayon de courbure correspondant est le rayon même de la sphère au centre de laquelle vont concourir deux normales infiniment voisines. La surface enveloppe d'une sphère a donc pour lignes de courbure de l'un des systèmes, des cercles, et le rayon de courbure correspondant à l'un de ces cercles est égal à celui de la sphère inscrite dont il est la ligne de contact.

695. La réciproque du théorème précédent est exacte : une surface qui admet un système de lignes de courbure circulaires est l'enveloppe d'une sphère mobile dont le centre parcourt une ligne donnée.

Une ligne de courbure circulaire étant nécessairement plane, son plan coupe en effet (678) la surface sous un angle constant. Les normales à la surface menées par les différents points de cette ligne forment donc un cône de révolution, et la sphère décrite du sommet de ce cône comme centre, avec la distance au cercle pour rayon, touche évidemment la surface en chaque point du cercle qui leur est commun. A chaque ligne de courbure correspond donc une sphère inscrite dont cette ligne est le cercle de contact, et la surface est l'enveloppe de ces sphères.

696. *Surfaces canaux.* — Lorsque le rayon de la sphère enveloppée est constant, la surface enveloppe porte le nom de surface canal. D'après ce qui précède, l'un des rayons de courbure d'une surface canal est constant.

Réciproquement, toute surface dont un rayon de courbure est constant est l'enveloppe des positions d'une sphère mobile de rayon constant.

Si, en effet, l'un des rayons de courbure est constant, pour obtenir la ligne enveloppée par les normales menées aux différents points d'une ligne de courbure, à laquelle correspond ce rayon, il faut, sur chaque normale, porter une longueur constante; la courbe ainsi obtenue appartient (101) à une surface parallèle à la surface donnée, et coupe par conséquent à angle droit les normales de celle-ci; mais d'un autre côté elle doit être l'enveloppe de ces normales, et par conséquent leur être tangente. Les deux conditions étant incompatibles, la courbe ne peut exister et doit se réduire à un point; les normales aux différents points d'une même ligne de courbure vont donc concourir en un même point dont la distance à la surface est égale au rayon de courbure constant; une sphère décrite de ce point comme centre contiendra par conséquent la ligne de courbure et touchera la surface en tous les points de cette ligne : il existe une telle sphère pour chaque ligne de courbure, elles ont toutes pour rayon le rayon de courbure constant de la surface qui est, par conséquent, l'enveloppe d'une sphère de rayon constant.

697. On peut trouver analytiquement les surfaces dont un rayon de courbure est constant.

Soient X, Y, Z les cosinus des angles formés par la normale à la surface avec les axes de coordonnées. On a, en nommant $\frac{1}{R}$ le rayon de courbure constant de la surface,

$$\frac{dX}{dx}=\frac{1}{R},\quad \frac{dY}{dy}=\frac{1}{R},\quad \frac{dZ}{dz}=\frac{1}{R}, \tag{1}$$

le signe de différentiation se rapportant, comme on sait (637), à un déplacement infiniment petit effectué sur la ligne de courbure.

On déduit de ces équations

$$\begin{aligned} x-RX&=\alpha,\\ y-RY&=\beta,\\ z-RZ&=\gamma, \end{aligned} \tag{2}$$

α, β, γ restant tous trois constants lorsqu'on reste sur une même ligne de courbure, et pouvant par conséquent s'exprimer tous trois en fonction d'un même paramètre. On en conclut qu'il existe deux équations entre ces trois quantités, et si l'on pose

$$\alpha=\varphi(\gamma),\quad \beta=\psi(\gamma),$$

on aura

$$x - RX = \varphi(z - RZ), \quad y - RY = \psi(z - RZ).$$

L'équation

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 1,$$

combinée avec les équations (2), donne

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = R^2, \tag{3}$$

et, pour chaque valeur de γ, cette équation représente une sphère du rayon R, sur laquelle se trouve la ligne de courbure correspondante; de plus, les équations (2) pouvant s'écrire

$$X = \frac{x-\alpha}{R}, \quad Y = \frac{y-\beta}{R}, \quad Z = \frac{z-\gamma}{R}, \tag{4}$$

elles prouvent que la normale à la surface en chaque point de cette ligne de courbure coïncide avec le rayon de la sphère qui forme évidemment avec les axes des angles dont les cosinus sont représentés par les seconds membres des équations (4). La sphère (3) touche par conséquent, tout le long de la ligne de courbure, la surface cherchée, qui est par suite l'enveloppe des positions d'une sphère de rayon constant dont le centre parcourt une courbe arbitraire.

698. *Surface dont toutes les lignes de courbure sont circulaires.* — Pour que les lignes de courbure de l'un des systèmes soient des cercles, il faut (695) que la surface soit l'enveloppe d'une sphère mobile dont l'équation ne contienne qu'un seul paramètre arbitraire. Il en résulte évidemment qu'une surface dont *toutes* les lignes de courbure sont des cercles peut être considérée de deux manières différentes comme l'enveloppe des positions d'une sphère mobile, les sphères du premier système touchant la surface suivant une série de cercles, et celles du second système suivant d'autres cercles perpendiculaires aux premiers. Or, il est clair que chaque sphère appartenant à l'un des modes de génération est tangente à toutes celles de l'autre système; considérons en effet deux sphères quelconques correspondant à des cercles de systèmes différents qui se coupent à angle droit; les deux sphères passent par le point commun aux deux cercles et ont en ce point même plan tangent, puisque toutes deux touchent la même surface. Si par conséquent on considère trois sphères du premier système, toutes les sphères du second système les touchent toutes trois, et comme la condition d'être tangente à trois sphères fixes détermine complétement les positions successives d'une sphère mobile, s'il existe une surface dont

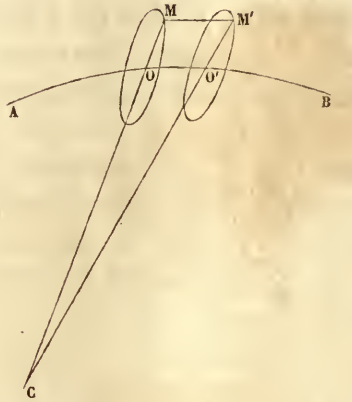
toutes les lignes de courbure soient circulaires, elle est l'enveloppe des positions d'une sphère tangente à trois autres.

Réciproquement : la surface enveloppe des sphères tangentes à trois sphères données a toutes ses lignes de courbure circulaires. La surface ainsi définie étant l'enveloppe d'une sphère dont l'équation ne contient évidemment qu'un seul paramètre, les lignes de courbure de l'un des systèmes sont (694) des cercles; pour prouver que les lignes de courbure du second système sont également circulaires, M. Dupin a fait voir que la surface peut, d'une autre manière, être considérée comme l'enveloppe d'une sphère mobile. Nous ne reproduirons pas ici cette élégante démonstration, et nous nous bornerons à montrer, d'après M. Mannheim, que la surface en question, nommée surface cyclique, peut toujours être considérée comme la transformée par rayons vecteurs réciproques d'un tore. Les lignes de courbure du tore étant circulaires, et celles de la surface transformée pouvant s'en déduire (683) à l'aide de la transformation qui transforme toujours les cercles en d'autres cercles, seront elles-mêmes circulaires.

Quel que soit le pôle de transformation, la transformée d'une sphère est une sphère. Si donc on considère trois sphères fixes, et une série d'autres sphères qui les touchent toutes trois, la figure transformée se composera de trois sphères transformées des trois sphères fixes et d'une série de sphères les touchant toutes trois. Or on peut toujours choisir le pôle de transformation de telle sorte que les sphères transformées des trois sphères fixes aient leurs centres en ligne droite; il suffit pour cela de prendre pour pôle un point situé dans le plan qui contient les centres des trois sphères et sur la circonférence du cercle qui, dans ce plan, coupe orthogonalement les trois grands cercles. Cette circonférence passant par le pôle sera transformée en une ligne droite, et comme la transformation n'altère pas les angles, les trois sphères transformées seront coupées orthogonalement par une même ligne droite qui doit pour cela passer par leurs trois centres.

Il est bien évident d'ailleurs que trois cercles étant donnés dans un plan, il en existe toujours un quatrième qui les coupe tous trois à angles droits, et qui a pour centre le point duquel on peut leur mener trois tangentes égales. La surface cyclique que nous étudions peut, d'après ce qui précède, avoir pour transformée la surface enveloppe des sphères tangentes à trois sphères fixes dont les centres sont en ligne droite. Or, en coupant les trois sphères fixes par un plan passant par leur ligne des centres, on obtiendra trois cercles; l'un quelconque des cercles qui les touchent tous trois est le grand cercle d'une sphère tangente aux trois proposées. Celle-ci obtenue, on peut évidemment la faire tourner autour de la ligne des centres des trois sphères fixes, qu'elle touchera constamment dans toutes ses positions. La surface enveloppe de cette sphère mobile est évidemment un tore, et toute surface à lignes de courbures circulaires est par conséquent la transformée par rayons vecteurs réciproques d'un tore.

699. *Surface dont les deux rayons de courbure sont constants.* — Lorsque l'un des rayons de courbure est constant, la surface est (696) une surface canal, enveloppe d'une sphère de rayon égal à ce rayon constant; les surfaces dont les deux rayons de courbure sont constants sont par conséquent des surfaces canaux dont le second rayon de courbure est constant.



Soit AOO'B la courbe lieu des centres des sphères inscrites dans une surface canal, et OM, O'M' deux cercles infiniment voisins qui sont des lignes de courbure du premier système. Soit MM' un arc de la ligne de courbure du second système; les normales en M et M' à la surface sont évidemment MO, M'O, et vont se rencontrer en un point C situé sur la droite d'intersection des plans des deux cercles; or lorsque le point M parcourt le cercle sur lequel il est situé, le point C décrivant une ligne droite, il est impossible que OC, et par suite MC, soit constant: le rayon de courbure du second système varie donc successivement d'un point à l'autre, et il ne peut y avoir d'exception que si la courbe AOO'B se réduit à un point, auquel cas la surface canal est une sphère.

700. *Surfaces dont les lignes de courbure se confondent avec les sections normales principales.* — Lorsqu'une ligne de courbure est plane, son plan (678) coupe la surface sous un angle constant. Nous voulons ici examiner particulièrement le cas où toutes les lignes de courbure de l'un des systèmes étant planes, leurs plans coupent la surface sous un angle droit. Les lignes de courbure du second système sont évidemment, dans ce cas, normales aux plans qui contiennent les lignes du premier système, et par conséquent la surface peut être engendrée de la manière suivante : donnons-nous la surface développable enveloppée par les plans des lignes de courbure du premier système, et dans l'un de ces plans choisissons arbitrairement la ligne de courbure qui s'y trouve située. La surface sera entièrement déterminée, car les lignes de courbure du second système coupant à angles droits la série con-

tinue des plans tangents à la surface développable, chacune d'elles est déterminée par un de ses points; il en partira une de chaque point de la ligne de courbure du premier système que l'on s'est donné, et leur ensemble formera la surface.

La surface développable enveloppée par les plans des lignes de courbure, et la forme de cette ligne dans un des plans, sont d'ailleurs entièrement arbitraires. Il est évident en effet que la surface engendrée par une série de lignes normales aux plans que l'on s'est données, est elle-même coupée normalement par tous ces plans qui, par conséquent (678), par leur intersection avec la surface, déterminent des lignes de courbure.

Pour réaliser la génération de la surface, il suffit évidemment de faire rouler le plan tangent qui contient la ligne de courbure que l'on s'est donnée, sur la surface développable donnée, de manière à le faire tourner à chaque instant autour de la génératrice de contact. Le mouvement de chacun de ses points est alors dirigé à chaque instant suivant la normale au plan mobile, et les différents points de la ligne de courbure du premier système que l'on s'est donnée engendrent les lignes du second système dont l'ensemble forme la surface demandée. On voit que les lignes de courbure du premier système sont les positions successives d'une seule et même ligne qui se meut avec le plan dans lequel elle est située, et ces lignes sont par conséquent superposables.

701. Toutes les normales de la surface que nous venons de définir sont évidemment tangentes à la surface développable enveloppe des plans des lignes de courbure. Réciproquement, toute surface dont les normales sont tangentes à une surface développable admet un système de lignes de courbure planes, dont les plans la coupent normalement et sont tangents à la surface développable. Supposons, en effet, que toutes les normales d'une surface soient tangentes à une même surface développable : toutes celles dont le point de contact appartient à une même génératrice de la surface développable sont évidemment situées dans le plan tangent le long de cette génératrice, elles se rencontrent donc deux à deux et correspondent par conséquent à une ligne de courbure évidemment située dans ce plan, qui coupe la surface normalement, puisqu'il contient la normale en chaque point de la courbe d'intersection.

702. Examinons en particulier les surfaces dont les normales sont tangentes à un cylindre. Une telle surface est engendrée, d'après ce qui précède, par une courbe plane de forme invariable, dont le plan roule sans glisser sur la surface du cylindre, en restant par conséquent parallèle à la direction de ses génératrices. Les positions successives de cette courbe plane sont les lignes de courbure du premier système; quant aux lignes de courbure du second système, elles coupent norma-

lement les plans tangents du cylindre; leur tangente reste par conséquent parallèle au plan de la section droite du cylindre, et il en résulte que ces lignes sont planes et situées dans des plans parallèles.

703. La réciproque du théorème précédent est exacte; lorsque les lignes de courbure de l'un des systèmes sont planes et situées dans des plans parallèles, les normales à la surface sont tangentes à un même cylindre, et les lignes de courbure du second système sont situées dans des plans tangents à ce cylindre.

Soient en effet A, A′, A″, les lignes de courbure d'une surface, qui, par hypothèse, sont planes et situées dans des plans parallèles. Soit B une ligne de courbure du second système rencontrant les premières en a, a', a'',...; ses plans tangents menés à la surface par les différents points d'une ligne de courbure enveloppant une surface développable dont les génératrices, qui sont les intersections de deux plans voisins, sont les tangentes conjuguées (644) de celles de la ligne de courbure auxquelles elles sont par conséquent perpendiculaires; les tangentes aux lignes A, A′, A″, menées par les points a, a', a'', forment donc une surface développable dont les génératrices sont situées dans les plans de ces lignes qui, par hypothèse, sont parallèles, et comme deux génératrices consécutives doivent être dans un même plan, elles sont nécessairement parallèles, et la surface développable qu'elles forment est un cylindre. La courbe B, suivant laquelle ce cylindre touche la surface donnée, étant ligne de courbure de la surface, est aussi ligne de courbure du cylindre, et par conséquent une de ses sections droites, dont le plan est évidemment normal en chaque point à la surface cherchée à laquelle le cylindre est circonscrit. Les lignes de courbure B sont donc planes, et leurs plans coupent la surface à angle droit.

704. Le même théorème peut aisément se démontrer analytiquement. Prenons pour axe des Z une parallèle aux plans des lignes de courbure du premier système; en nommant x, y, z les coordonnées d'un point de l'une de ces lignes, et X, Y, Z les cosinus des angles formés par la normale avec les trois axes, on a (637)

$$\frac{dx}{d\mathrm{X}} = \frac{dy}{d\mathrm{Y}} = \frac{dz}{d\mathrm{Z}} = \mathrm{R}, \tag{1}$$

R étant le rayon de courbure correspondant à la ligne considérée, et les différentielles se rapportant à un déplacement effectué sur cette ligne. Le plan de la ligne de courbure étant parallèle à l'axe des Z, on a, entre x et y, une relation de la forme

$$y = \alpha x + \beta, \tag{2}$$

α et β étant deux constantes.

On déduit de (2)

$$dy = \alpha\, dx,$$

et par suite

$$d\mathrm{Y} = \alpha\, d\mathrm{X};$$

on en conclut que pour tous les points d'une même ligne de courbure, la différence $\mathrm{Y} - \alpha\mathrm{X}$ est constante; cette constante pouvant d'ailleurs varier d'une ligne de courbure à l'autre, désignons-la par $\varphi(\beta)$; nous aurons

$$\mathrm{Y} - \alpha\mathrm{X} = \varphi(\beta); \tag{3}$$

en indiquant par δ les variations correspondantes aux lignes de courbure du second système, on a (636)

$$dy\,\delta q + dx\,\delta p = 0, \tag{4}$$

et par suite, à cause de

$$\frac{dy}{dx} = \alpha,$$

on a

$$\frac{\delta p}{\delta q} = -\alpha,$$

on en conclut

$$p + \alpha q = \gamma, \tag{5}$$

γ restant constant pour une même ligne de courbure du second système; mais on a

$$\mathrm{X} = \frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad \mathrm{Y} = \frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad \mathrm{Z} = \frac{-1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \tag{6}$$

et l'équation (5) peut s'écrire

$$\mathrm{X} + \alpha\mathrm{Y} + \gamma\mathrm{Z} = 0; \tag{7}$$

on en déduit

$$\delta\mathrm{X} + \alpha\delta\mathrm{Y} + \gamma\delta\mathrm{Z} = 0, \tag{8}$$

et comme δx, δy, δz sont proportionnels à $\delta\mathrm{X}$, $\delta\mathrm{Y}$, $\delta\mathrm{Z}$,

$$\delta x + \alpha\delta y + \gamma\delta z = 0, \tag{9}$$

et par conséquent

$$x + \alpha y + \gamma z = h; \tag{10}$$

h restant constant ainsi que α et γ pour tous les points d'une même ligne de courbure du second système; l'équation (10) représente un plan. Quelles que soient les valeurs de γ et de h, le plan est perpendiculaire à ceux des lignes de courbure du premier système dont l'équation est

$$y = \alpha x + \beta.$$

705. *Surfaces dont toutes les lignes de courbure sont planes.* — Plusieurs géomètres ont

étudié les surfaces dont les lignes de courbure sont planes; nous nous bornerons à démontrer ici les résultats les plus simples auxquels ils sont parvenus.

Lorsqu'une ligne de courbure est plane (678), les normales à la surface menées par les différents points forment avec son plan un angle constant. Si donc par le centre d'une sphère on mène des parallèles à ces normales, elles formeront un cône de révolution et couperont la sphère suivant un cercle dont le plan est parallèle à celui de la ligne de courbure.

Si toutes les lignes de courbure d'une surface sont planes, celles qui leur correspondent sur la sphère dont nous avons parlé, formeront deux séries de cercles, et ces cercles se couperont à angles droits. Soit en effet M un point de la surface où se croisent deux lignes de courbure MA et MB; considérons la normale MN en M, et les normales infiniment voisines AO et BO′, menées par les points A et B situés sur les deux lignes de courbure, à distance infiniment petite de M; les deux plans OAM, O′B′M, sont perpendiculaires l'un à l'autre: or, en menant par le centre d'une sphère trois rayons CM_1, CA_1, CB_1, parallèles à OM, OA, O′B, les plans CMA, CMB sont parallèles à OAM, O′BM, et par conséquent perpendiculaires entre eux, en sorte que les lignes M_1A_1, M_1B_1, qui, sur la sphère, correspondent à deux lignes de courbure de la surface, sont perpendiculaires l'une à l'autre.

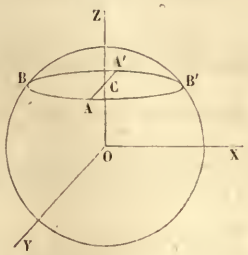
Pour savoir comment sont situés dans l'espace les plans des lignes de courbure de la surface cherchée, il suffit de chercher comment peuvent être situées sur une sphère deux séries de cercles tels, que chacun coupe à angle droit tous ceux qui appartiennent à une série différente. Nous allons prouver que les plans de tous les cercles d'un même système doivent, pour cela, avoir une droite commune.

On sait en effet qu'un cercle étant tracé sur une sphère, toute tangente à la sphère menée par un de ses points, et coupant le cercle à angle droit, est une génératrice du cône circonscrit à la sphère le long du cercle donné. Si donc un cercle C coupe à angles droits deux cercles différents C_1 et C'_1, deux tangentes de ce cercle C sont des génératrices de cônes circonscrits à la sphère suivant C_1 et C'_1. Le plan du cercle C passe donc par la droite qui joint les sommets des cônes circonscrits à la sphère suivant deux cercles quelconques de l'autre système, et ces cercles sont par conséquent les cercles de contact des cônes circonscrits ayant leurs sommets sur une même droite; on sait que leurs plans passent par une même droite perpendiculaire à la première.

Lorsque toutes les lignes de courbure d'une surface sont planes, leurs plans sont parallèles à ceux de deux systèmes de cercles se coupant perpendiculairement sur la sphère; ils sont donc parallèles respectivement à deux lignes droites perpendiculaires l'une à l'autre.

706. On peut obtenir facilement l'équation différentielle des surfaces dont toutes les lignes de courbure sont planes.

Soit AA′ la droite à laquelle sont parallèles les plans des lignes de courbure de l'un des systèmes, et par laquelle passent tous les plans des cercles qui leur corres-



pondent sur une sphère dont le centre est en O; choisissons trois axes de coordonnées OX, OY, OZ, dont l'un, OY, soit parallèle à AA′, et dont l'autre, OZ, perce cette ligne en son milieu C : en nommant m la distance OC, l'un des cercles qui passent par AA′ a pour équations

$$\begin{aligned} &x^2+y^2+z^2=1,\\ &z=\alpha x+m, \end{aligned} \tag{1}$$

α étant un paramètre variable : on déduit de ces équations

$$x+y\frac{dy}{dx}+z\frac{dz}{dx}=0,$$

$$\frac{dz}{dx}=\alpha=\frac{z-m}{x},$$

d'où, en éliminant $\frac{dz}{dx}$,

$$x^2+xy\frac{dy}{dx}+z(z-m)=0. \tag{2}$$

En supposant le rayon de la sphère égal à l'unité, x, y, z étant les coordonnées de l'extrémité d'un rayon parallèle à la normale de la surface, on a

$$\begin{aligned} x&=\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}},\\ y&=\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \\ z&=\frac{-1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}; \end{aligned} \tag{3}$$

l'équation (2) devient par conséquent

$$p^2+pq\frac{dy}{dx}+1+m\sqrt{1+p^2+q^2}=0:$$

on en conclut

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-m\sqrt{1+p^2+q^2}-1-p^2}{pq}.$$

La tangente de la ligne de courbure est parallèle, en chaque point, à celle du cercle qui la représente sur la sphère; on peut donc porter cette valeur de $\frac{dy}{dx}$ dans l'équation différentielle des lignes de courbure

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2[(1+q^2)s-pqt)] + \frac{dy}{dx}[(1+q^2)r-(1+p^2)t] - [(1+p^2)s-pqr] = 0,$$

et l'on trouve ainsi l'équation différentielle

$$\mathrm{R}r + \mathrm{S}s + \mathrm{T}t = 0,$$

en faisant, pour abréger,

$$\mathrm{R} = pq\left[m(1+q^2) - \sqrt{1+p^2+q^2}\right],$$

$$\mathrm{S} = m^2(1+q^2)\sqrt{1+p^2+q^2} - 2m(1+p^2)(1+q^2) + (1+p^2)\sqrt{1+p^2+q^2},$$

$$\mathrm{T} = pqm\left[1+p^2 - m\sqrt{1+p^2+q^2}\right].$$

CHAPITRE VIII.

ÉTUDE DES LIGNES TRACÉES SUR UNE SURFACE.

Lignes géodésiques.

707. La ligne la plus courte que l'on puisse tracer entre deux points d'une surface se nomme *ligne géodésique;* ces lignes jouent le même rôle dans l'étude des courbes tracées sur une surface que la ligne droite dans l'étude des courbes planes ou le grand cercle dans celle des courbes sphériques.

On a vu (631) que le plan osculateur d'une ligne géodésique est, en chaque point, normal à la surface sur laquelle elle est tracée. Réciproquement, si une courbe tracée sur une surface a, en chaque point, son plan osculateur normal à la surface, un arc infiniment petit de cette courbe est, comme on l'a vu (631), le plus court que l'on puisse tracer sur la surface entre ses deux extrémités. La ligne reçoit alors par extension le nom de *ligne géodésique*, quoiqu'elle puisse ne pas être la plus courte entre deux points suffisamment éloignés. C'est ainsi par exemple que, sur une sphère, un arc de grand cercle plus grand qu'une demi-circonférence se nomme *ligne géodésique*, quoiqu'il ne soit pas la plus courte distance entre ses deux extrémités.

Par deux points donnés sur une surface on peut toujours faire passer une ligne géodésique au moins, mais d'après ce que nous venons de dire on conçoit qu'il en puisse exister plusieurs; ainsi, par exemple, deux points de la surface d'un cylindre peuvent être réunis par un nombre infini d'hélices formant entre eux un nombre quelconque de spires.

708. La propriété caractéristique des lignes géodésiques peut être énoncée sous une forme qui nous sera très-utile : la projection d'une ligne géodésique sur le plan tangent à la surface en un quelconque de ses points a, en ce point, un rayon de courbure infini.

Soit, en effet, MM′ un arc infiniment petit de ligne géodésique tracé sur une surface S, et MM″ la projection de cet arc sur le plan qui touche la surface en M, ce plan tangent est perpendiculaire au plan osculateur de l'arc MM′, et coupé par lui suivant la tangente commune des arcs MM′, MM″; il en résulte que la distance du point M″ à la tangente en M de l'arc MM″ est rigoureusement égale à la perpendiculaire abaissée du point M′ de l'arc MM′ sur le plan osculateur de cet arc en M;

elle est donc du troisième ordre, et le rayon de courbure de MM″ est par conséquent infini.

709. Lorsque deux lignes géodésiques se coupent sous un angle infiniment petit $d\omega$, la loi de leur écartement, à distance infiniment petite du point d'intersection, est la même que pour deux lignes droites sur un plan; en d'autres termes, si l'on porte sur chacune d'elles, à partir de leur point d'intersection O, des longueurs infiniment petites égales, OP et OQ, que nous représenterons par dl, on a, en négligeant les infiniment petits du troisième ordre,

$$PQ = dl.d\omega.$$

Projetons en effet le triangle infinitésimal OPQ sur le plan qui touche la surface

en O; les projections de OP et de OQ ont des rayons de courbure infinis: nous pouvons donc, en négligeant les infiniment petits du troisième ordre, les remplacer par leurs tangentes; toutes les lignes de la figure formant d'ailleurs des angles infiniment petits avec le plan sur lequel on projette, chacune d'elles peut être considérée comme égale à sa projection; on peut donc considérer la distance PQ, en ne négligeant qu'une portion infiniment petite de sa propre valeur, comme la distance de deux points situés chacun à distance dl du sommet, sur les côtés d'un angle rectiligne $d\omega$; cette distance est évidemment $dl.d\omega$.

Il faut bien remarquer que ce résultat cesserait d'être exact si les lignes géodésiques qui forment les côtés de l'angle étaient remplacées par deux courbes quelconques; il est aisé de voir que, même sur un plan, le théorème, appliqué à deux courbes qui se coupent sous un angle infiniment petit, serait inexact; l'expression trouvée est en effet celle que l'on obtiendrait en remplaçant chaque courbe par sa tangente; or une telle substitution introduit une erreur du second ordre, comparable par conséquent à la distance que l'on veut évaluer.

710. Lorsque trois lignes géodésiques d'une surface forment un triangle infiniment petit, l'excès de la somme des angles de ce triangle sur deux angles droits est un infiniment petit de même ordre que la surface du triangle, c'est-à-dire un infiniment petit du second ordre, si l'on regarde les côtés comme du premier ordre.

Soit en effet ABC un triangle infiniment petit formé par trois lignes géodésiques

d'une surface; projetons la figure sur le plan tangent en A; les trois lignes AB,

AC, BC seront représentées en projection par trois lignes planes AB′, AC′, B′C′; les courbes issues du point A sont tangentes à leurs projections, et par conséquent les angles en A dans les deux triangles sont rigoureusement égaux; la différence entre l'un des deux autres angles B et C, et la projection, est infiniment petite du second ordre; il est facile de voir, en effet, qu'un angle situé sur un plan diffère d'un infiniment petit du second ordre de sa projection sur un plan formant avec le premier un angle infiniment petit du premier ordre. La somme des angles du triangle ABC ne diffère donc que d'un infiniment petit du second ordre de celle des angles du triangle AB′C′; or les trois côtés de ce dernier triangle ont des rayons de courbure infinis. La démonstration a été faite (708) pour AB′, AC′; quant à l'arc B′C′, projection de BC, nous savons, d'après ce qui a été dit (708) que la projection de BC sur le plan tangent en B a un rayon de courbure infini, et comme les plans tangents aux points A et B diffèrent infiniment peu, il en est évidemment de même de la projection sur le plan tangent en A. Les trois côtés du triangle AB′C′ ayant des rayons de courbure infinis, les angles formés par les cordes rectilignes de ces arcs avec les tangentes à leurs extrémités sont infiniment petits du second ordre, et la somme des angles de ce triangle ne diffère que d'un infiniment petit du second ordre de la somme des angles du triangle rectiligne qui a les mêmes sommets, c'est-à-dire de deux angles droits. La différence entre cette même somme et la somme des angles de ABC est d'ailleurs, comme on l'a vu, infiniment petite du second ordre: il est donc prouvé que la somme des angles du triangle donné ABC est égale à deux angles droits, si l'on néglige les infiniment petits du second ordre.

711. Si par un point pris sur une surface on mène des lignes géodésiques dans toutes les directions, et que sur chacune d'elles on porte, à partir de ce point, une longueur constante quelconque, le lieu des extrémités des arcs ainsi définis coupe perpendiculairement toutes les lignes géodésiques considérées. Soient en effet OM, OM′ deux lignes géodésiques voisines de même longueur, il faut prouver que

l'angle OMM′ est droit. Supposons, en effet, qu'il n'en soit pas ainsi; l'un des angles OMM′, OM′M sera alors aigu et l'autre obtus. Admettons que l'angle en M soit obtus; menons par le point M sur la surface une ligne infiniment petite MK, telle que l'angle KMM′ soit plus grand que KM′M: le triangle KMM′ étant infiniment petit, on peut le regarder comme rectiligne, et l'on a, à cause de l'inégalité supposée des angles,

$$KM < KM';$$

on en conclut

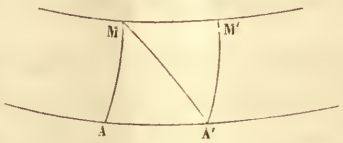
$$OK + KM < OK + KM',$$

mais la somme $OK + KM'$ est la distance OM', égale par hypothèse à OM, et par conséquent il résulterait des suppositions qui ont été faites, que

$$OK + KM < OM,$$

résultat absurde, puisque OM est, par hypothèse, la ligne la plus courte que l'on puisse tracer sur la surface entre les points O et M.

712. La démonstration précédente suppose que les lignes géodésiques considérées soient les plus courtes que l'on puisse tracer entre leurs points extrêmes; elle ne s'étend pas par conséquent à toutes les lignes dont le plan osculateur est en chaque point normal à la surface. Le théorème est cependant exact pour de telles lignes. Nous le démontrerons en établissant d'abord un théorème plus général : si par les points d'une courbe quelconque tracée sur une surface, on élève des lignes géodésiques perpendiculaires à cette courbe, et que sur chacune d'elles on porte une longueur fixe quelconque, le lieu des extrémités de ces longueurs coupe perpendiculairement toutes les lignes géodésiques. Soient AM, A′M′ deux lignes géodésiques égales, qui soient l'une et l'autre les plus courtes que l'on puisse mener entre leurs extrémités. Supposons que les angles en A et en A′ soient droits, il faut prouver qu'il en est de même des angles en M et en M′.



Joignons le point M au point A′ par une ligne géodésique : l'angle MAA′ étant droit, la ligne AA′ est tangente à la courbe lieu des extrémités des longueurs égales à MA, portées sur les lignes géodésiques issues du point M; si donc AA′ est infiniment petit du premier ordre, la différence $MA' - MA$ est du second ordre, et à cause de l'égalité supposée entre AM et A′M′, A′M et A′M′ ont la même différence infiniment petite du second ordre; si donc on porte sur les lignes géodésiques issues de A′ des longueurs égales à A′M′, le lieu de leurs extrémités qui, d'après le théorème précédent, est normal à A′M′, sera tangent à M′M, qui par conséquent coupe A′M′ sous un angle droit.

Cette démonstration suppose, comme la précédente, que les lignes géodésiques considérées soient les plus courtes entre leurs deux extrémités; mais en réunissant les deux théorèmes on démontre aisément qu'il est permis de supprimer cette condition. Si en effet on porte normalement à une courbe une longueur constante sur

des lignes géodésiques issues de ses différents points, le théorème leur est applicable pourvu que leur longueur soit suffisamment petite, et l'on obtiendra une nouvelle courbe coupée orthogonalement par les lignes géodésiques normales à la première; à partir des points de cette nouvelle courbe, on pourra encore porter sur les mêmes lignes géodésiques prolongées une longueur constante assez petite pour que le lieu des extrémités forme une troisième courbe coupant les mêmes lignes à angle droit; en continuant ainsi, on finira par porter sur chaque ligne une longueur aussi grande que l'on voudra, en démontrant que le lieu des extrémités coupe toujours à angle droit les lignes géodésiques sur lesquelles la longueur portée à partir de l'origine peut croître sans limite.

Les lignes géodésiques normales à une même courbe peuvent évidemment être remplacées par des lignes issues d'un même point, et la démonstration se fera absolument de la même manière.

Si l'on considère sur une surface une série de lignes géodésiques, et une seconde série de courbes coupant celles-ci à angle droit, les portions de deux lignes géodésiques quelconques comprises entre deux trajectoires orthogonales sont égales entre elles. Ce théorème est une conséquence évidente du précédent, dont il peut être considéré comme la réciproque.

713. On peut déduire du théorème précédent une conséquence importante relative à la forme de l'expression du carré de la distance de deux points infiniment voisins. Si les points d'une surface sont définis par deux coordonnées u et v, telles que les courbes qui correspondent à des valeurs constantes de v soient des lignes géodésiques, et que celles qui correspondent aux valeurs constantes de u coupent les premières à angle droit, le carré de la distance de deux points infiniment voisins aura (124) une expression de la forme

$$ds^2 = A\,du^2 + B\,dv^2; \tag{1}$$

mais d'après le théorème précédent, deux trajectoires des lignes géodésiques interceptent sur ces diverses lignes des arcs de même longueur. Si donc on suppose $dv = 0$, c'est-à-dire si l'arc ds appartient à une des lignes géodésiques, la valeur de ds^2 ne dépendra que de u et de du, et A est par conséquent fonction de la seule variable u. Soit u' une fonction de u telle que

$$du' = du\sqrt{A}; \tag{2}$$

si l'on substitue la variable u' à la variable u, ce qui ne change évidemment pas les deux systèmes de lignes correspondant aux valeurs constantes des coordonnées, l'expression (1) devient

$$ds^2 = du'^2 + G\,dv^2, \tag{3}$$

G représentant ce que devient B lorsqu'on l'exprime en fonction de u' et de v. Si l'on suppose $dv = 0$, on a

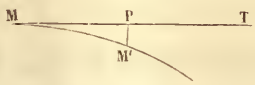
$$ds = du',$$

et l'on en conclut que u' est la longueur portée sur une ligne géodésique, à partir d'une trajectoire orthogonale déterminée que l'équation (2) laisse arbitraire, puisqu'elle permet d'ajouter une constante à cette coordonnée.

Courbure géodésique.

714. La courbure d'une ligne plane fait connaître la plus ou moins grande rapidité de l'écart entre cette courbe et sa tangente. Si en un point M la tangente est MT, et que M′ soit un point infiniment voisin de M pris sur la courbe considérée, et M′P la distance de ce point M′ à la tangente, la courbure $\frac{1}{\rho}$ est donnée par la formule

$$\frac{1}{\rho} = \frac{2\,\overline{M'P}}{\overline{MM'}^2};$$



de sorte que, pour une même longueur infiniment petite MM′, la courbure est proportionnelle à la distance M′P de la courbe à la tangente. Euler a considéré la courbure d'une ligne tracée sur une sphère, et nous avons montré (550) qu'elle est proportionnelle à la distance de la courbe à l'arc de grand cercle qui la touche. On peut de même considérer pour une courbe tracée sur une surface quelconque un élément analogue, auquel M. Liouville a donné le nom très-expressif de courbure géodésique.

Soit AMB une courbe tracée sur une surface donnée, MT la ligne géodésique qui la touche au point M, M′ un point infiniment voisin de M pris sur la ligne AM, et M′P la distance de ce point à MT; le rapport

$$\frac{2\,\overline{M'P}}{\overline{MM'}^2}$$

est, *par définition*, la courbure géodésique de la courbe AMB au point M. L'ana-

logie avec la courbure d'une ligne plane est évidente et justifie suffisamment la

similitude des dénominations. Nous verrons d'ailleurs que l'analogie s'étend beaucoup plus loin encore, et qu'on peut la suivre dans l'étude de toutes les questions relatives aux courbes tracées sur les surfaces.

715. La courbure géodésique peut être représentée par plusieurs expressions utiles à connaître, et qui pourraient chacune être prises comme définition. La courbure géodésique d'un arc infiniment petit est égale à l'angle formé par les deux lignes géodésiques tangentes aux extrémités de cet arc, divisé par la longueur de l'arc.

Soit MM′ l'arc considéré; MI, M′I les lignes géodésiques tangentes à ses extrémités; MM′ la ligne géodésique qui réunit le point M au point M′, et que l'on peut nommer *corde géodésique*.

Cette corde ne diffère de l'arc MM′ que d'un infiniment petit du troisième ordre; elles ont en effet la même corde rectiligne dont la différence avec chacun des deux arcs est (19) infiniment petite du troisième ordre. On peut donc substituer l'un de ces arcs à l'autre sans altérer la limite du rapport dans lequel ils figurent; d'un autre côté, le triangle IMM′ étant formé par trois lignes géodésiques, la somme de ses angles est égale à deux angles droits (710), et l'angle extérieur I peut être considéré comme égal à la somme des angles en M et en M′; on a donc

$$\frac{\mathrm{I}}{\mathrm{MM'}} = \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{MM'}} + \frac{\mathrm{M'}}{\mathrm{MM'}}; \tag{1}$$

mais les lignes géodésiques MP, MM′ se coupant sous l'angle infiniment petit M, on a (709)

$$\mathrm{M'P} = \mathrm{M}.\mathrm{MM'},$$

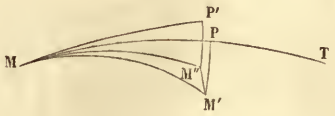
et par conséquent

$$\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{MM'}} = \frac{\mathrm{M'P}}{\overline{\mathrm{MM'}}^2}.$$

$\frac{\mathrm{M'P}}{\overline{\mathrm{MM'}}^2}$ est, par définition, la moitié de la courbure géodésique en M; on verra de même que $\frac{\mathrm{M'}}{\mathrm{MM'}}$ est la moitié de la courbure géodésique en M′ qui, évidemment, diffère infiniment peu de la première, et l'équation (1) montre par conséquent que $\frac{1}{\mathrm{MM'}}$ représente, comme nous l'avions annoncé, la courbure géodésique.

716. La courbure géodésique d'une courbe en un point est égale à la courbure

de la projection de la courbe sur le plan tangent de la surface au point considéré. Considérons l'arc infiniment petit MM′ tracé sur la surface donnée, et la ligne géodésique MT qui la touche en M; soit M′P la distance du point M′ à la ligne MT.



Projetons le triangle MM′P sur le plan tangent à la surface en M; les projections de MM′ et de MP sont deux courbes tangentes l'une à l'autre; celle de MP, ayant (708) un rayon de courbure infini, peut être considérée comme une ligne droite. Soit MM″P′ la projection de MM′P; les côtés de l'angle MPM′ formant des angles infiniment petits avec le plan sur lequel on les projette, cet angle diffère infiniment peu de sa projection; l'angle MP′M″ peut donc être regardé comme droit, et la courbure de la ligne MM″ est par conséquent

$$\frac{M''P'}{\overline{2MM''}^2}. \tag{1}$$

Mais les lignes M′P, MM′, infiniment peu inclinées sur le plan tangent en M, peuvent être considérées comme égales à leurs projections sur ce plan; l'expression (1) qui représente la courbure de la ligne plane MM″ est donc égale à

$$\frac{M'P}{\overline{2MM'}^2},$$

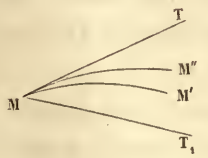
c'est-à-dire (714) à la courbure géodésique de MM′.

717. Soit $\frac{1}{\rho}$ la courbure absolue de la ligne MM′ considérée comme courbe donnée dans l'espace, et indépendamment de la surface qui la contient; nommons θ l'angle formé par le plan osculateur de cette ligne avec le plan tangent de la surface en M, la courbure géodésique a pour expression

$$\frac{\cos\theta}{\rho}.$$

Si l'on nomme, en effet, ε l'angle de contingence formé par les tangentes aux points M et M′, la courbure $\frac{1}{\rho}$ est égale à $\frac{\varepsilon}{MM'}$; si l'on projette MM′ sur le plan tangent en M, on obtient l'arc MM″ que l'on peut regarder comme égal à MM′, et en nommant ε' l'angle de contingence de MM″, la courbure de MM″ égale (716) à la courbure géodésique de MM′ a pour mesure $\frac{\varepsilon'}{MM''}$, ou, ce qui revient au même, $\frac{\varepsilon'}{MM'}$.

Le rapport de la courbure $\frac{1}{\rho}$ à la courbure géodésique de MM′ est donc représenté



par $\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}$; pour l'évaluer, menons par le point M une parallèle MT, à la tangente en M′: elle formera avec la tangente MT l'angle de contingence ε; le plan T,MT est (563) le plan osculateur de MM′ et forme l'angle θ avec le plan tangent en M qu'il coupe suivant MT, ε' est évidemment la projection de ε sur le plan tangent, et ces deux angles appartiennent à un trièdre rectangle dans lequel ε est opposé à l'angle droit; on a donc

$$\frac{\operatorname{tang}\varepsilon}{\operatorname{tang}\varepsilon'} = \frac{1}{\cos\theta},$$

et, comme ε et ε' sont infiniment petits,

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon'} = \frac{1}{\cos\theta}.$$

Le rapport $\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}$ est, nous l'avons dit, le rapport de la courbure $\frac{1}{\rho}$ à la courbure géodésique, qui par conséquent est égale, ainsi qu'on l'a annoncé, à $\frac{\cos\theta}{\rho}$.

Il n'est pas inutile de faire remarquer qu'une même courbe, étant située sur une infinité de surfaces différentes dont elle est l'intersection commune, a sur chacune d'elles une courbure géodésique spéciale qui peut varier depuis zéro jusqu'à la courbure absolue $\frac{1}{\rho}$ qui est sa valeur maxima. Cette limite est atteinte lorsque le plan osculateur de la courbe est tangent à la surface sur laquelle on la considère comme tracée.

718. La courbure géodésique peut encore être considérée sous un autre point de vue auquel se plaçaient plusieurs géomètres allemands qui l'ont nommée *courbure de développement*.

Remarquons d'abord que la courbure géodésique d'une ligne tracée sur une surface développable est égale à la courbure de la ligne plane dans laquelle elle se transforme quand on développe la surface sur un plan. Le développement de la surface n'altérant pas en effet les longueurs des lignes tracées sur elle, les lignes géodésiques d'une telle surface ont pour transformées des lignes droites, et la ligne géodé-

sique tangente en un point de la courbe considérée se transforme dans le développement en une droite tangente au point correspondant de la courbe transformée; l'écartement entre la courbe et la ligne géodésique qui la touche est donc le même qu'entre la transformée et sa tangente, et l'on en conclut (714) l'égalité des deux courbures que nous comparons.

Cela posé, circonscrivons à la surface sur laquelle est tracée une ligne donnée, une surface développable qui la touche suivant cette ligne, et qui est évidemment l'enveloppe des plans tangents menés en ses différents points; la courbure géodésique de la ligne est la même, soit qu'on la considère comme tracée sur la surface donnée ou sur la surface développable, parce que le plan tangent étant le même pour les deux surfaces, la courbure dont l'expression a été trouvée au paragraphe précédent a la même valeur dans les deux cas. Si donc on développe la surface développable sur un plan, la ligne considérée aura une transformée plane dont la courbure sera précisément égale à la courbure géodésique, dont le nom de courbure de développement se trouve ainsi justifié.

719. La considération de courbure géodésique intervient utilement dans l'étude des lignes tracées sur une surface: la suite de ce chapitre en montrera toute l'importance. Nous nous bornerons à démontrer immédiatement un théorème qu'il faut regarder comme fondamental dans cette théorie, et qui complète une proposition déjà obtenue (712).

Lorsqu'on considère sur une surface une série de lignes se succédant suivant une loi continue quelconque, deux arcs infiniment petits AB, A′B′, interceptés entre

deux trajectoires orthogonales de ces courbes, ont une différence proportionnelle à la courbure géodésique de AB, et en supposant AB et AA′ infiniment petits du premier ordre, on a, en négligeant les infiniment petits du troisième ordre,

$$A'B' - AB = AB \cdot \frac{AA'}{\rho},$$

$\frac{1}{\rho}$ étant la courbure géodésique, considérée comme positive, lorsque l'arc géodésique qui touche AB en A est situé du côté de A′B′.

Réunissons, en effet, les deux points A et B par une ligne géodésique que l'on peut nommer la corde de l'arc AB, et par les deux extrémités élevons normalement à cette corde les perpendiculaires infiniment petites AA_1, BB_1; d'après ce qui a été dit (712), dans le cas où AB a une longueur finie, la différence $A_1B_1 - AB$

est infiniment petite du second ordre, et contient en facteur le carré de AA_1; cette différence doit s'annuler avec AB. Si donc on la représente par $G\overline{AA_1}^2$, G est infiniment petit en même temps que AB, et la différence entre la corde A_1B_1 et la corde AB est de troisième ordre, les différences entre chacune de ces cordes et l'arc qu'elle sous-tend sont d'ailleurs du troisième ordre aussi; on peut donc regarder, en négligeant les infiniment petits du troisième ordre seulement, A_1B_1 comme égal à AB, et la différence $A'B' - AB$ que nous voulons évaluer comme égale à la somme $A_1A' + B_1B'$; or on a (709)

$$A_1A' = AA'.(A'AA_1),$$
$$B_1B' = BB_1.(B'BB_1);$$

on peut regarder AA′ et BB_1 comme égaux, les angles $A'AA_1$, $B'BB_1$ sont égaux aux angles formés par la corde AB avec les tangentes aux deux extrémités de l'arc, leur somme est (715) l'angle de contingence de AB que nous désignerons par ε, on a donc

$$A_1A' + B_1B' = \varepsilon.AA',$$

et, en nommant $\frac{1}{\rho}$ la courbure géodésique $\frac{\varepsilon}{AB}$, on en déduit enfin

$$A'B' - AB = A_1A' + B_1B' = \overline{AA'}.\frac{AB}{\rho},$$

comme on l'avait annoncé.

Courbure totale d'une portion de surface.

720. L'idée de courbure appliquée aux surfaces est extrêmement complexe; on peut en effet concevoir en chaque point une infinité de courbes tracées sur la surface, et la courbure de chacune d'elles est un des éléments qui figurent dans l'idée vague que nous exprimons par le mot *courbure* appliqué à la surface. Gauss a, le premier, défini celle-ci avec précision; l'illustre géomètre compare pour cela les points de la surface qu'il étudie à ceux d'une sphère ayant pour rayon l'unité de longueur, et il regarde comme correspondants dans les deux surfaces ceux pour lesquels les normales sont parallèles; d'après cette définition, à une portion quelconque de la surface donnée correspondra une portion de la surface sphérique dont l'aire est la *courbure totale* de la portion considérée.

La courbure moyenne d'une portion de surface est le rapport de la courbure totale à l'aire de la portion considérée.

La courbure d'une surface en un point est la courbure moyenne d'une portion infiniment petite de cette surface comprenant dans son intérieur le point considéré.

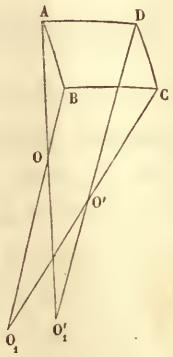
721. Remarquons, avant d'aller plus loin, l'analogie complète des définitions précédentes avec celles qui se rapportent aux courbes planes.

La courbure d'un arc de courbe plane est, en effet, l'angle des tangentes extrêmes ou, ce qui revient au même, l'angle des normales à ses extrémités, c'est-à-dire l'arc de cercle de rayon unité compris entre deux rayons parallèles à ces normales; la courbure moyenne est le rapport de cet arc de cercle à l'arc de courbe considéré, et la courbure en un point est la courbure moyenne d'un arc infiniment petit auquel ce point appartient; il est inutile d'insister sur l'analogie, qui est évidente.

Mesure de la courbure.

722. La courbure d'une surface en un point est égale à l'inverse du produit des rayons de courbure principaux.

Pour évaluer la courbure d'une surface en un point il faut, d'après la définition, chercher la courbure totale d'une surface infiniment petite qui contienne ce point : choisissons un rectangle infiniment petit formé par quatre lignes de courbure; soient $d\alpha$, $d\beta$ les côtés de ce rectangle, et R_1, R_2 les rayons de courbure correspondants; les normales menées par les points du contour ABCD forment quatre éléments de surface développable qui peuvent être considérés comme quatre facettes planes se coupant deux à deux à angle droit. Les parallèles à ces normales menées par le centre de la sphère de rayon unité formeront un angle tétraèdre à dièdres droits et détermineront sur la sphère un rectangle dont la surface est, par définition, la courbure totale de ABCD; les côtés de ce rectangle, égaux aux angles sous



lesquels ils sont vus du centre de la sphère, sont mesurés par $\frac{d\alpha}{R_1}$, $\frac{d\beta}{R_2}$, R_1 et R_2 étant les deux rayons de courbure; la surface du rectangle est donc $\frac{d\alpha\, d\beta}{R_1 R_2}$, et le rapport de cette surface à la surface de ABCD, égale à $d\alpha\, d\beta$, est $\frac{1}{R_1 R_2}$, comme nous l'avions annoncé.

Si l'élément considéré sur la surface avait une autre forme, le résultat serait évidemment le même. Quelle que soit en effet la forme d'un élément infiniment petit, on peut le décomposer par des lignes de courbure en rectangles infiniment plus petits

que lui. La courbure moyenne de chaque rectangle étant, à la limite, l'inverse du produit des rayons de courbure, il en est de même de la courbure moyenne de leur ensemble.

723. L'un des rayons de courbure d'une surface développable étant infini, la courbure est, en chaque point, égale à zéro. Cela résulte d'ailleurs directement de la définition. Les normales menées par les différents points d'une génératrice étant en effet parallèles, les points de la sphère correspondant à tous ceux de la surface développable forment une ligne courbe, dont chaque point correspond à une génératrice tout entière, et la portion de sphère correspondant à un contour fermé grand ou petit a toujours une surface nulle.

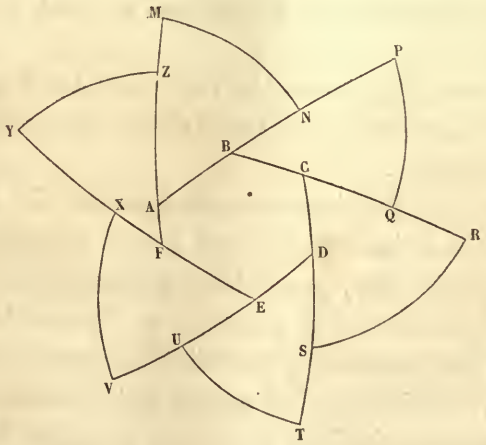
Théorie du développement des surfaces.

724. Gauss a démontré plusieurs théorèmes relatifs à la courbure totale, que l'on doit compter parmi les plus élégants et les plus remarquables de la Géométrie. Sans aborder les méthodes employées par l'illustre auteur, nous donnerons la démonstration géométrique de ses résultats les plus importants.

Nous établirons d'abord un lemme dû à M. O. Bonnet, et sur lequel ces démonstrations sont fondées.

Si l'on trace sur une sphère un contour fermé quelconque, et que par chacun de ses points on mène un arc de grand cercle tangent sur lequel on porte, toujours dans le même sens, une longueur d'un quadrant, le lieu des points ainsi obtenus divise la sphère en deux parties équivalentes.

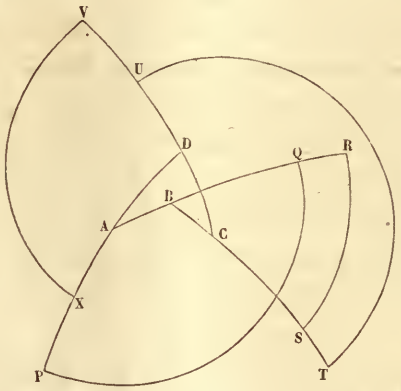
Pour le démontrer, considérons d'abord un polygone ABCDEF formé par des arcs de grand cercle. Prolongeons les divers côtés, toujours dans le même sens, et de



chaque sommet comme pôle, avec un rayon sphérique égal à un quadrant, décrivons un arc de cercle : nous formons ainsi des triangles sphériques isocèles dont

chacun a pour mesure l'angle extérieur correspondant du polygone. La Géométrie élémentaire permet d'en conclure immédiatement que ces triangles ajoutés à la surface du polygone donnent une somme mesurée par quatre angles droits et égale par conséquent à la moitié de la sphère, en sorte que le trait continu PQRSTUVXYZMNP partage la sphère en deux parties équivalentes.

Si le polygone avait des angles rentrants, il faudrait, pour l'exactitude du théorème, retrancher les triangles qui correspondent à ces angles; mais la construction n'en donnerait pas moins un trait continu partageant la sphère en deux parties équivalentes : si, par exemple, le polygone est ABCD, et que des sommets A, B, C, D



comme pôles on décrive des arcs de grand cercle, PQ, RS, TU, VX, la ligne continue PQRSTUVX partage la sphère en deux parties équivalentes.

Si l'on fait augmenter indéfiniment le nombre des côtés du polygone, on le remplacera par une courbe fermée quelconque et l'on obtiendra le théorème énoncé.

725. Ce théorème remarquable ne diffère pas, au fond, d'une autre proposition énoncée par Jacobi.

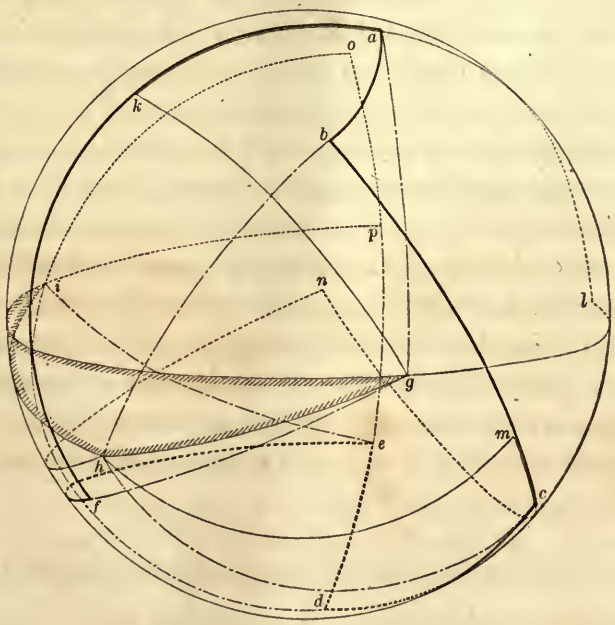
Si par le centre d'une sphère on mène des parallèles aux normales principales d'une courbe fermée quelconque S, le lieu de leurs extrémités partagera la sphère en deux parties équivalentes.

Si l'on considère en effet l'indicatrice sphérique lieu des extrémités des rayons parallèles aux tangentes de la courbe S, les arcs de grand cercle tangents à cette indicatrice ont leurs plans (566) parallèles aux plans osculateurs de S, et le point situé sur l'un d'eux, à distance d'un quadrant de l'indicatrice, est l'extrémité d'un rayon mené dans le plan osculateur perpendiculairement à celui qui correspond au point de l'indicatrice, c'est-à-dire à la tangente de la courbe S; ce rayon est évidemment parallèle à la normale principale de S, et le théorème de M. Bonnet rentre par conséquent dans celui de Jacobi.

726. Considérons sur une surface quelconque un triangle formé par trois lignes

géodésiques, et sur une sphère de rayon unité les trois arcs de grand cercle qui sont les indicatrices sphériques des côtés du triangle. Soient *ab*, *cd*, *ef*, ces trois arcs; joignons par des arcs de grand cercle les extrémités correspondant à un même sommet du triangle primitif, et nous formerons un hexagone *abcdef* dont trois côtés sont des arcs de grand cercle, tandis que la nature des trois autres dépend de la forme des lignes géodésiques considérées; les six angles de cet hexagone sont droits; chacun d'eux est formé en effet par l'indicatrice sphérique de l'un des côtés du triangle géodésique donné et par l'arc de grand cercle qui réunit son extrémité à celle de l'indicatrice du côté suivant; or, le plan de l'arc de grand cercle tangent à l'indicatrice sphérique d'une courbe est (566) parallèle au plan osculateur de celle-ci, et les points des deux indicatrices qui correspondent à l'un des sommets du triangle sur la surface donnée, sont les extrémités de deux rayons parallèles aux tangentes des côtés qui s'y croisent; le plan de l'arc de grand cercle qui les réunit est évidemment parallèle au plan tangent de la surface, en sorte que les deux lignes dont nous parlons sont perpendiculaires l'une à l'autre.

Appliquons à la ligne *abcdef* le théorème de M. Bonnet, nous formerons un trait continu représenté sur la figure et composé de douze lignes parmi lesquelles neuf arcs de grand cercle formant trois triangles sphériques et trois courbes de nature variable avec celle des lignes géodésiques auxquelles on applique la démonstration. Il est clair, en effet, que lorsqu'on applique le théorème de M. Bonnet à un



polygone quelconque, à chacun des côtés du polygone correspond un des côtés de la figure qui partage la sphère en deux parties équivalentes, et à chaque sommet

correspond aussi un côté de la même figure qui est toujours un arc de grand cercle; chaque sommet peut en effet être considéré comme un arc infiniment petit qui raccorde les deux côtés qui s'y réunissent, et les arcs de grand cercle d'un quadrant menés tangentiellement à ce côté infiniment petit étant tous issus d'un même point, leurs extrémités forment un arc de grand cercle ayant ce point pour pôle. La figure dérivée d'un hexagone a donc douze côtés parmi lesquels, en général, six arcs de grand cercle. Dans le cas actuel elle a neuf arcs de grand cercle, parce que trois sont dérivés des côtés *bc*, *de*, *fa* de l'hexagone, qui sont eux-mêmes des arcs de grand cercle; les arcs de grand cercle qui leur sont tangents sont en effet ces côtés eux-mêmes sur lesquels, à partir de chaque point, il faut porter un arc d'un quadrant. On déduira ainsi de chacun d'eux un arc de même longueur situé sur le même grand cercle; la figure dérivée aura enfin trois côtés curvilignes de forme variable suivant les cas, *gh*, *he*, *eg*, et déduits des trois côtés *ab*, *cd*, *ef* de l'hexagone. Ces trois lignes forment un triangle, ainsi que l'indique la figure; pour le prouver, il suffit de montrer que l'arc de grand cercle d'un quadrant, *bh*, mené tangentiellement à *ab*, a même extrémité que l'arc de grand cercle d'un quadrant *ch*, mené par le point *c* tangentiellement à *cd*. Les extrémités de ces arcs sont en effet situés sur des rayons parallèles aux normales principales des lignes géodésiques dont *ab* et *cd* sont les indicatrices sphériques; or, au sommet du triangle qui correspond aux points *b* et *c*, ces normales sont les mêmes puisqu'elles coïncident toutes deux avec la normale à la surface sur laquelle le triangle géodésique est supposé tracé.

Il est donc prouvé que le trait continu qui divise la sphère en deux parties équivalentes est formé de douze lignes qui comprennent trois triangles sphériques et un triangle *ghi*; la somme de ces quatre triangles équivaut à la moitié de la sphère; or je dis que le triangle *ghi* est précisément la courbure totale que nous voulons évaluer et dont ce théorème fournira ainsi la mesure. Les points du contour de ce triangle sont en effet les extrémités des rayons parallèles aux normales principales des trois côtés du triangle géodésique considéré, et par suite parallèles aux normales à la surface sur laquelle ce triangle est tracé : ce triangle *ghi* est donc la courbure totale que nous cherchons. Les trois triangles sphériques qui, réunis à *ghi*, forment une somme égale à la moitié de la sphère, sont isocèles et birectangles, et chacun a pour mesure sa base : or les bases sont égales aux côtés *bc*, *de*, *fa*, c'est-à-dire aux suppléments des angles A, B, C du triangle géodésique; la somme

$$\pi - A + \pi - B + \pi - C + ghi$$

est donc égale à la demi-sphère représentée comme on sait par 4π, et l'on a

$$\pi - A + \pi - B + \pi - C + ghi = 4\pi,$$

d'où l'on conclut

$$ghi = A + B + C - \pi;$$

c'est précisément le théorème de Gauss : la courbure totale du triangle géodésique ABC est mesurée par l'excès de la somme des angles de ce triangle sur deux angles droits.

727. Le théorème précédent, remarquable par sa grande élégance et par sa généralité, se distingue des autres propriétés générales des surfaces en ce qu'il s'applique à une portion finie de surface quelconque. Les théorèmes d'Euler et de Monge, aussi généraux que celui de Gauss, sont relatifs aux portions infiniment petites d'une surface; on comprend à priori que les propriétés dans l'étude desquelles on peut négliger les infiniment petits d'un certain ordre, peuvent s'étudier simultanément pour toutes les surfaces continues; dans l'étude des tangentes, par exemple, les infiniment petits du second ordre peuvent être négligés : toute surface peut donc, dans le voisinage d'un point, être considérée comme plane, et c'est pour cela que les tangentes à toutes les courbes qui passent par ce point sont dans un même plan. Dans l'étude des rayons de courbure, on peut négliger les infiniment petits de troisième ordre, et toute surface peut être, sous ce point de vue, réduite par conséquent à une surface de second degré; il est donc tout naturel que les lois de la distribution des courbures autour d'un point soient les mêmes pour toutes les surfaces. Le théorème de Gauss se distingue de tous les autres parce que, son énoncé se rapportant à une portion finie de la surface, des points situés à une distance finie se trouvent ainsi rattachés les uns aux autres, quoique la loi de continuité ne semble au premier abord leur imposer aucune condition.

Si l'on y regarde de plus près, cependant, cette circonstance, tout en restant fort remarquable, peut s'expliquer à priori. On peut voir, en effet, que le théorème de Gauss, s'il est vrai pour un triangle infiniment petit, est vrai, par cela même, pour un triangle fini quelconque. Si l'on décompose en effet un triangle en d'autres plus petits ayant pour côtés des lignes géodésiques, la courbure totale du grand triangle sera égale à la somme des courbures de ceux qui le composent, c'est-à-dire, en admettant le théorème démontré pour ceux-ci, à l'excès de la somme totale de leurs angles sur autant de fois deux droits qu'il y a de triangles.

Or il est clair que les angles de la figure qui ont leurs sommets aux sommets A, B, C du triangle proposé ont pour somme la somme $A+B+C$ de ces trois angles, et quant aux autres angles, ceux qui ont un sommet commun ont pour somme quatre droits ou deux droits, selon que ce sommet est situé dans l'intérieur ou sur le contour de ABC; l'excès de la somme totale des angles, sur autant de fois deux droits qu'il y a de triangles, est donc $A+B+C$ plus ou moins un multiple de deux angles droits; mais si la figure était plane et que les lignes géodésiques fussent droites, la somme serait nulle et égale à $A+B+C-\pi$, et comme le nombre des triangles et le nombre des sommets de chaque espèce restent les mêmes dans tous les cas, cette expression

$$A+B+C-\pi$$

est générale. Le théorème de Gauss, relatif à un triangle quelconque, est donc une conséquence nécessaire du théorème relatif à un triangle infiniment petit; mais ici une observation est nécessaire : si, pour démontrer le théorème relatif à un triangle quelconque, on devait l'établir d'abord pour un triangle infiniment petit, en prouvant que, dans ce cas, il est rigoureusement exact, il n'y aurait aucun avantage, ou, pour parler plus exactement, l'énoncé ne serait modifié en rien. Lorsqu'on dit en effet qu'un triangle infiniment petit possède une certaine propriété, cela signifie que l'énoncé s'applique à un petit triangle avec une erreur qui diminue avec les dimensions et devient négligeable à la limite. Quand on dit, par exemple : la courbure totale d'un triangle infiniment petit est égale à l'excès de la somme de ses angles sur deux angles droits, cela veut dire que la différence entre la courbure totale, qui est du second ordre, et l'excès de la somme des angles sur deux droits, est un infiniment petit du troisième ordre. Si l'on voulait dire que la différence est rigoureusement nulle, les dimensions infiniment petites du triangle ne joueraient aucun rôle dans l'énoncé, et il serait inutile de les mentionner.

Il est clair d'ailleurs qu'en admettant l'énoncé entendu de cette manière, on en pourrait conclure ensuite que l'égalité est rigoureuse pour un triangle quelconque, et par conséquent pour un triangle infiniment petit. Lorsqu'en effet on décompose un triangle fini en triangles infiniment petits, la somme des courbures de ces triangles étant finie, celle des infiniment petits du troisième ordre que l'on néglige dans l'évaluation de chacune d'elles a une limite nulle, et ne peut exercer d'influence sur le résultat.

728. Connaissant l'expression de la courbure totale d'un triangle formé par trois lignes géodésiques, on en déduit celle d'un polygone quelconque formé par de telles lignes : elle est égale à l'excès de la somme des angles sur autant de fois deux angles droits qu'il y a de côtés moins deux.

729. Lorsque deux surfaces sont applicables l'une sur l'autre, leur courbure est la même aux points qui se correspondent. En d'autres termes, lorsqu'on déforme une surface sans altérer les longueurs des lignes qui y sont tracées, le produit des rayons de courbure en chaque point reste invariable.

Considérons, en effet, un triangle infiniment petit ABC formé par trois lignes géodésiques : R et R′ étant les deux rayons de courbure de la surface, la courbure totale de ABC est égale (722) à $\frac{ABC}{RR'}$; elle est aussi (726), en désignant les trois angles par A, B, C, égale à $A+B+C-\pi$: on a donc

$$\frac{ABC}{RR'} = A+B+C-\pi. \tag{1}$$

Si l'on déforme la surface sans altérer les longueurs des lignes qui y sont tracées,

le triangle ABC ne cessera pas, après la déformation, d'être formé par trois lignes géodésiques de la surface déformée; les angles A, B, C, ne changeront pas, non plus que l'aire ABC, et l'équation (1) doit par conséquent s'appliquer au nouveau système, ce qui exige que le produit RR′ n'ait pas changé de valeur.

On peut démontrer cette proposition importante sans la rattacher à la précédente.

Supposons qu'un fil de longueur infiniment petite σ ait l'une de ses extrémités fixée au point considéré M, et tourne en restant tendu sur la surface; l'autre extrémité de ce fil décrira une courbe dont la longueur ne variera pas lorsqu'on viendra à déformer la surface, et qui, de plus, pourra être considérée comme décrite sur la surface transformée, de la même manière qu'elle l'avait été sur la surface primitive, et à l'aide d'un fil de même longueur. Or nous allons calculer le périmètre total de cette courbe, et l'on verra qu'il ne peut rester constant que si le produit RR′ des rayons de courbure est lui-même invariable.

Soient x, y, z les coordonnées du point M; faisons, suivant l'usage,

$$dz = p\,dx + q\,dy, \quad dp = r\,dx + s\,dy, \quad dq = s\,dx + t\,dy, \tag{2}$$

d'où l'on conclut

$$d^2z = p\,d^2x + q\,d^2y + r\,dx^2 + 2\,s\,dx\,dy + t\,dy^2. \tag{3}$$

Appelons s l'arc d'une ligne géodésique passant au point (x, y, z) : on sait que la normale principale de cette ligne coïncide avec la normale à la surface; il en résulte, en prenant s pour variable indépendante,

$$d^2x + p\,d^2z = 0, \quad d^2y + q\,d^2z = 0. \tag{4}$$

La direction de la normale à la surface forme en effet avec les axes des angles dont les cosinus sont proportionnels à p, q et -1, et celle de la normale principale de la courbe forme des angles dont les cosinus sont proportionnels (587) à $\frac{d^2x}{ds^2}$, $\frac{d^2y}{ds^2}$, $\frac{d^2z}{ds^2}$; les équations (4) expriment que les deux directions coïncident.

En différentiant les équations (4), on a

$$d^3x + p\,d^3z + (r\,dx + s\,dy)\,d^2z = 0,$$
$$d^3y + q\,d^3z + (s\,dx + t\,dy)\,d^2z = 0.$$

De plus, si nous nommons ξ, η, ζ les coordonnées de l'extrémité d'un arc égal à σ, porté sur cette ligne à partir du point (x, y, z), nous aurons

$$\xi = x + \frac{dx}{ds}\sigma + \frac{d^2x}{ds^2}\frac{\sigma^2}{2} + \frac{d^3x}{ds^3}\frac{\sigma^3}{6} + \cdots,$$
$$\eta = y + \frac{dy}{ds}\sigma + \frac{d^2y}{ds^2}\frac{\sigma^2}{2} + \frac{d^3y}{ds^3}\frac{\sigma^3}{6} + \cdots,$$
$$\zeta = z + \frac{dz}{ds}\sigma + \frac{d^2z}{ds^2}\frac{\sigma^2}{2} + \frac{d^3z}{ds^3}\frac{\sigma^3}{6} + \cdots$$

Supposons maintenant que le point (x, y, z) soit le point désigné ci-dessus par M ; prenons ce point pour origine des coordonnées, l'axe des z étant dirigé suivant la normale à la surface : nous aurons

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad p = 0, \quad q = 0.$$

On peut d'ailleurs disposer l'axe des X de façon que l'on ait $s = 0$. Il suit de ces hypothèses et des équations écrites plus haut

$$dz = 0, \quad d^2z = rdx^2 + tdy^2, \quad d^2x = 0, \quad d^2y = 0,$$
$$d^3x + r^2dx^3 + rtdxdy^2 = 0, \quad d^3y + rtdx^2dy + t^2dy^3 = 0.$$

Nommons α l'angle que fait avec l'axe des X la tangente à l'arc σ mené par l'origine, de sorte qu'on ait

$$\frac{dx}{ds} = \cos\alpha, \quad \frac{dy}{ds} = \sin\alpha,$$

nous en conclurons

$$\frac{d^2z}{ds^2} = r\cos^2\alpha + t\sin^2\alpha,$$

$$\frac{d^3x}{ds^3} = -r^2\cos^3\alpha - rt\cos\alpha\sin^2\alpha,$$

$$\frac{d^3y}{ds^3} = -rt\cos^2\alpha\sin\alpha - t^2\sin^3\alpha,$$

et par conséquent,

$$\xi = \sigma\cos\alpha - \frac{\sigma^3}{6}(r^2\cos^3\alpha + rt\cos\alpha\sin\alpha),$$

$$\eta = \sigma\sin\alpha - \frac{\sigma^3}{6}(rt\cos^2\alpha\sin\alpha + t^2\sin^3\alpha),$$

$$\zeta = \frac{\sigma^2}{2}(r\cos^2\alpha + t\sin^2\alpha).$$

En donnant à α toutes les valeurs de zéro à 2π, on aura successivement, par ces formules, tous les points de la courbe fermée définie plus haut. Si maintenant nous désignons par λ l'arc de cette courbe, lequel est une fonction de α, on aura

$$d\sigma = \sqrt{d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2},$$

ou bien, en ayant égard aux valeurs précédentes de ξ, η, ζ, et observant que α seul est variable,

$$d\lambda = d\alpha\sqrt{\sigma^2 - \frac{rt\sigma^4}{3}} = d\alpha\left(\sigma - \frac{rt\sigma^3}{6} + \cdots\right),$$

on en conclut

$$\lambda = \alpha\left(\sigma - \frac{rt\sigma^3}{6} + \cdots\right) + \text{const.},$$

et si l'on suppose que l'arc commence au point pour lequel α est nul et finisse à celui où α est égal à 2π, on a enfin pour la longueur totale l de la courbe

$$l = 2\pi\sigma - \frac{\pi r l \sigma^3}{3},$$

ou bien, en nommant R, R′ les deux rayons de courbure,

$$l = 2\pi\sigma - \frac{\pi\sigma^3}{RR'}.$$

Cette valeur de l ne devant pas changer lorsque l'on déforme la surface, il en est de même évidemment du produit RR′.

Condition pour que deux surfaces soient applicables l'une sur l'autre.

730. Deux surfaces étant données, le théorème de Gauss ne suffit pas pour décider s'il est possible on non de les appliquer l'une sur l'autre; on peut, en effet, quelles que soient les deux surfaces, établir entre leurs points une loi de correspondance telle, que les courbures soient les mêmes aux points qui se correspondent; il suffit pour cela de regarder comme *lignes correspondantes* celles qui correspondent sur les deux surfaces à une même valeur du produit des rayons principaux, et d'établir ensuite entre les points de ces deux lignes une loi de correspondance arbitraire telle, que chaque point de l'une ait son correspondant sur l'autre. La courbure sera la même aux points correspondants ainsi définis, mais les deux surfaces ne seront pas pour cela applicables l'une sur l'autre; Gauss nous a appris, en effet, que si une surface est applicable sur une autre, la courbure est la même aux points correspondants; mais la réciproque n'a pas été démontrée et n'est pas exacte.

Plusieurs méthodes ont été données pour décider si deux surfaces sont ou non applicables l'une sur l'autre. Celle que nous allons exposer est due à M. O. Bonnet.

Soient u et v deux variables en fonction desquelles soient définis les points de la première surface, u' et v' celles qui définissent les points de la seconde. Supposons que les expressions des distances de deux points infiniment voisins soient, sur l'une et sur l'autre surface

$$(1)\qquad \begin{aligned} ds^2 &= A\,du^2 + 2B\,du\,dv + C\,dv^2, \\ ds'^2 &= A'\,du'^2 + 2B'\,du'\,dv' + C'\,dv'^2. \end{aligned}$$

Cherchons à établir, s'il est possible, entre u, v, u', v' deux relations telles, qu'il en résulte identiquement

$$ds^2 = ds'^2.$$

Si l'on exprime pour chaque surface la courbure $\frac{1}{RR'}$ en fonction des variables qui

servent à définir ses différents points, en nommant k et k' les expressions de ces courbures en fonction de u et v pour la première surface, de u' et v' pour la seconde, on doit, d'après le théorème de Gauss, avoir aux points correspondants la relation

$$k = k'. \tag{2}$$

Pour obtenir une seconde équation, supposons que l'on ait tracé sur les deux surfaces les courbes lieux des points pour lesquels le produit RR′ est constant : celles qui correspondent à une même valeur de ce produit sur les deux surfaces renferment les points homologues. Soit A un point de l'une d'elles, et A′ le point correspondant de l'autre ; il faut évidemment qu'en élevant sur chaque surface des lignes infiniment petites égales, perpendiculaires aux deux courbes, l'une en A, l'autre en A′, leurs extrémités M, M′ se correspondent, et que les courbures des deux surfaces y soient par conséquent les mêmes.

Pour exprimer cette condition par une équation, nommons u, v les coordonnées du point A, u', v' celles du point A′, $u+du$, $v+dv$, $u'+du'$, $v'+dv'$ celles des points infiniment voisins dont nous avons parlé ; on a, puisque les longueurs AM, A′M′ sont égales,

$$\mathrm{A}\,du^2 + 2\mathrm{B}\,du\,dv + \mathrm{C}\,dv^2 = \mathrm{A}'\,du'^2 + 2\mathrm{B}'\,du'\,dv' + \mathrm{C}'\,dv'^2. \tag{3}$$

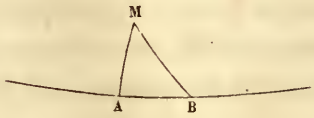
D'ailleurs, pour que le point M, corresponde à M′, l'égalité $k = k'$ doit être satisfaite par les coordonnées de ces deux points, et l'on a par conséquent

$$\frac{dk}{du}\,du + \frac{dk}{dv}\,dv = \frac{dk'}{du'}\,du' + \frac{dk'}{dv'}\,dv'.$$

Enfin, puisque AM est perpendiculaire à la ligne dont l'équation est

$$k = \text{const.},$$

si l'on prend sur cette ligne une longueur infiniment petite AB à partir du point A,



le triangle MAB étant rectangle, on aura

$$\overline{\mathrm{MB}}^2 = \overline{\mathrm{MA}}^2 + \overline{\mathrm{AB}}^2. \tag{4}$$

Les coordonnées du point A sont u et v, celles de M, $u+dv$, $v+dv$. Soient $u+\delta u$, $v+\delta v$ celles du point B ; en exprimant à l'aide de l'équation (1) les trois termes de l'équation (4), celle-ci devient

$$\begin{aligned}\mathrm{A}(du-\delta u)^2 + 2\mathrm{B}(du-\delta u)(dv-\delta v) + \mathrm{C}(dv-\delta v)^2 = \mathrm{A}\,du^2 + 2\mathrm{B}\,du\,dv + \mathrm{C}\,dv^2 \\ + \mathrm{A}\,\delta u^2 + 2\mathrm{B}\,\delta u\,\delta v + \mathrm{C}\,\delta v^2,\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\text{(5)}\qquad A\,du\,\delta u + B\,(du\,\delta v + dv\,\delta u) + C\,dv\,\delta v = 0.$$

D'ailleurs la variation de k étant nulle lorsque l'on passe du point A au point B, on a

$$\text{(6)}\qquad \frac{dk}{du}\,\delta u + \frac{dk}{dv}\,\delta v = 0,$$

et l'élimination de δu et de δv entre les équations (5) et (6) donne

$$\text{(7)}\qquad \left(A\frac{dk}{dv} - B\frac{dk}{du}\right)du + \left(B\frac{dk}{dv} - C\frac{dk}{du}\right)dv = 0.$$

Posons

$$\frac{dk}{du}\,du + \frac{dk}{dv}\,dv = dk.$$

Élevons cette équation au carré et ajoutons-la membre à membre avec la première des équations (1) préalablement multipliée par un facteur λ, nous aurons

$$\text{(8)}\qquad \left(\frac{dk}{du}\,du + \frac{dk}{dv}\,dv\right)^2 + \lambda(A\,du^2 + 2B\,du\,dv + C\,dv^2) = dk^2 + \lambda\,ds^2.$$

Déterminons λ, qui est arbitraire, par la condition que le premier membre soit le carré d'un binôme de la forme $P\,du + Q\,dv$: on voit aisément qu'il faut prendre

$$\lambda = \frac{A\left(\frac{dk}{dv}\right)^2 - 2B\,\frac{dk}{du}\,\frac{dk}{dv} + C\left(\frac{dk}{du}\right)^2}{B^2 - AC};$$

l'équation (8) devient alors

$$\text{(9)}\qquad \frac{\left[\left(A\frac{dk}{dv} - B\frac{dk}{du}\right)du + \left(B\frac{dk}{dv} - C\frac{dk}{du}\right)dv\right]^2}{B^2 - AC} = dk^2 + \lambda\,ds^2,$$

et par conséquent, à cause de l'équation (7),

$$dk^2 + \lambda\,ds^2 = 0,$$

c'est-à-dire

$$\text{(10)}\qquad \frac{dk}{ds} = \sqrt{-\lambda} = \sqrt{\frac{A\left(\frac{dk}{dv}\right)^2 - 2B\,\frac{dk}{du}\,\frac{dk}{dv} + C\left(\frac{dk}{du}\right)^2}{AC - B^2}}.$$

On trouverait par un calcul tout semblable relatif à l'autre surface :

$$\text{(11)}\qquad \frac{dk'}{s'} = \sqrt{\frac{A'\left(\frac{dk'}{dv'}\right)^2 - 2B'\,\frac{dk'}{du'}\,\frac{dk'}{dv'} + C'\left(\frac{dk'}{du'}\right)^2}{A'C' - B'^2}}.$$

D'après ce qui a été dit, $\frac{dk}{ds}$ et $\frac{dk'}{ds'}$ doivent être égaux; en égalant donc les seconds membres des égalités (10) et (11), on formera une équation qui, jointe à l'équation (2), permettra de déterminer u' et v' en fonction de u et de v.

731. Le calcul précédent peut se faire pour deux surfaces quelconques, mais il n'en résulte pas qu'elles soient applicables l'une sur l'autre; les équations trouvées entre u et v, u' et v', établissent en effet entre les points des deux surfaces une loi de correspondance telle, que les lignes déterminées par une même valeur du produit RR′ se correspondent, et sur ces lignes les points correspondants sont ceux pour lesquels la distance à la ligne voisine est la même; or, il faut évidemment en outre, pour que les deux surfaces soient applicables l'une sur l'autre, que les arcs correspondants des deux lignes soient égaux entre eux. On pourrait exprimer cette condition en égalant les différentielles des deux arcs, mais nous nous bornerons à avoir fait remarquer qu'une nouvelle équation au moins est nécessaire; on pourra toujours vérifier dans chaque cas si les relations trouvées entre u, v, u', v' rendent les arcs correspondants égaux en donnant identiquement

$$\mathrm{A}\,du^2 + 2\,\mathrm{B}\,du\,dv + \mathrm{C}\,dv^2 = \mathrm{A}'du'^2 + 2\,\mathrm{B}'\,du'\,dv' + \mathrm{C}'dv'^2.$$

732. Quel que soit le système de coordonnées adopté pour représenter les points d'une surface, la distance de deux points infiniment voisins ayant pour coordonnées u, v, $u + du$, $v + dv$, est de la forme

$$\mathrm{A}\,du^2 + 2\,\mathrm{B}\,du\,dv + \mathrm{C}\,dv^2,$$

A, B, C étant des fonctions de u et de v dont la forme varie avec la surface et le choix des coordonnées; la condition nécessaire et suffisante pour que deux surfaces soient applicables l'une sur l'autre est que, par un choix convenable de coordonnées, on puisse rendre identiques les valeurs de ds^2, de telle sorte que les variables u et v qui définissent les points de la première surface déterminent aussi ceux de la seconde.

Cette égalité des éléments, une fois établie, est évidemment indépendante du choix des coordonnées, sous la condition, bien entendu, que les points des deux surfaces restent associés de la même manière.

733. Nous indiquerons ici quelques résultats facilement déduits de ce qui précède et relatifs à la forme de l'expression de la distance de deux points infiniment voisins dans divers cas particuliers remarquables.

Lorsque les courbes qui correspondent aux valeurs constantes des coordonnées u et v se coupent à angle droit sur la surface, l'expression de ds^2 est de la forme

$$ds^2 = \mathrm{A}\,du^2 + \mathrm{B}\,dv^2.$$

La démonstration, toute semblable à celle qui a été donnée (124), résulte de ce que les courbes qui correspondent aux valeurs u, $u+du$, v, $v+dv$ des coordonnées, forment dans ce cas un rectangle dans lequel le carré de la diagonale doit être égal à la somme des carrés des côtés.

734. Lorsque les lignes qui correspondent à une valeur constante de la variable sont géodésiques, les lignes de l'autre système les coupant à angle droit, le coefficient B devient indépendant de u, et l'on a

$$ds^2 = A\,du^2 + \varphi(v)\,dv^2. \tag{1}$$

On sait en effet que les lignes qui correspondent aux valeurs constantes de u étant géodésiques, et celles qui correspondent aux valeurs constantes de v les coupant à angle droit, deux lignes quelconques du second système interceptent des arcs égaux sur toutes celles du premier système; or, en supposant

$$ds^2 = A\,du^2 + B\,dv^2, \tag{2}$$

si l'on considère les deux lignes correspondant aux valeurs v et $v+dv$ du paramètre v, leur distance, comptée sur une des lignes géodésiques correspondant à une valeur quelconque de u, s'obtiendra en faisant $du=0$, dans la formule (2) qui devient

$$ds^2 = B\,dv^2,$$

et comme cette distance doit être indépendante de u, B est, comme on l'a annoncé, fonction de la seule variable v; on peut changer de variables sans altérer le système de lignes qui répondent aux valeurs constantes des coordonnées, et poser

$$B\,dv = dv',$$

v' étant une fonction de la seule variable v; on a alors

$$ds^2 = dv'^2 + A\,du^2,$$

la variable v' représentant évidemment la longueur comptée sur la ligne géodésique à partir de l'une de ces trajectoires orthogonales arbitrairement choisie : le coefficient A est une fonction de u et de v' dont la forme varie avec la nature de la surface.

735. La réciproque du résultat que nous venons d'obtenir est exacte; lorsque le carré ds^2 de la distance de deux points voisins a une expression de la forme

$$ds^2 = A\,du^2 + \varphi(v)\,dv^2, \tag{1}$$

les lignes qui correspondent aux valeurs constantes de u sont géodésiques. Il résulte

en effet de la formule (1) que la distance des deux courbes correspondant aux valeurs v et $v + dv$ de la variable est indépendante de u et que par conséquent les courbes correspondantes aux valeurs constantes de u sont telles, que leurs trajectoires orthogonales interceptent sur elles des arcs égaux; on en conclut (719) qu'elles sont des lignes géodésiques.

736. Nous signalerons particulièrement le cas où la surface considérée étant de révolution, les coordonnées adoptées pour représenter un point sont, d'une part, l'angle ω formé par le méridien correspondant avec un méridien fixe, et, d'autre part, la longueur σ de l'arc de méridien compris entre le point considéré et un parallèle fixe. On a vu (130) que le carré de la distance ds^2 a, dans ce cas, une expression de la forme

$$ds^2 = \overline{d\sigma}^2 + \varphi(\sigma)\, d\omega^2. \tag{1}$$

Réciproquement, si l'expression du carré ds^2 est de la forme

$$ds^2 = dv^2 + \varphi(v)\, du^2,$$

la surface est applicable sur une surface de révolution convenablement choisie. La détermination du méridien auquel convient une forme donnée de la fonction φ est un problème de calcul intégral sur lequel nous ne donnerons ici aucun développement.

737. Nous citerons cependant deux exemples remarquables de surfaces applicables sur des surfaces de révolution.

L'hélicoïde gauche à plan directeur est applicable sur la surface de révolution dont le méridien est une chaînette.

Prenons pour axe des z l'axe du cylindre et pour axe des x et des y deux diamètres rectangulaires de la base : l'hélicoïde gauche à plan directeur sera représenté par les équations

$$\begin{aligned} z &= m\omega, \\ x &= r\cos\omega, \\ y &= r\sin\omega, \end{aligned} \tag{1}$$

r et ω étant deux variables qu'il serait facile d'éliminer pour former l'équation de la surface, mais cette équation ne nous serait pas utile. Nous regarderons ω et r comme les deux variables qui servent à définir les points de l'hélicoïde ; à une valeur constante de r correspond une hélice, et à une valeur constante de ω, une génératrice rectiligne qui coupe toutes les hélices à angle droit.

En désignant comme d'habitude par ds la distance de deux points infiniment

voisins, on a

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

et l'on en conclut, à cause des équations (1),

$$ds^2 = (m^2 + r^2)\,d\omega^2 + dr^2. \tag{2}$$

On reconnaît, dans cette expression, la forme qui convient à une surface de révolution. On a vu en effet (736) que, σ désignant l'arc de méridien et ω l'angle qu'il forme avec un méridien fixe, on a, sur une surface de révolution,

$$ds^2 = d\sigma^2 + \varphi(\sigma)\,d\omega^2. \tag{3}$$

En posant $\sigma = r$, les deux formules (2) et (3) deviennent identiques si l'on a

$$\varphi(\sigma) = m^2 + \sigma^2.$$

Or $\varphi(\sigma)$ est le carré du rayon du parallèle, c'est-à-dire de l'abscisse du point qui correspond à l'arc σ : si nous désignons cette abscisse par x, il suffit de trouver une courbe telle que

$$x = \sqrt{m^2 + \sigma^2}, \tag{4}$$

c'est-à-dire

$$\sigma = \sqrt{x^2 - m^2};$$

on en déduit

$$d\sigma = \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2 - m^2}}. \tag{5}$$

Or, en nommant y la seconde coordonnée rectangulaire, on a

$$d\sigma^2 = dx^2 + dy^2,$$

et l'équation (5) devient

$$dx^2 + dy^2 = \frac{x^2\,dx^2}{x^2 - m^2},$$

ou

$$dy^2 = \frac{m^2\,dx^2}{x^2 - m^2},$$

$$dy = \frac{m\,dx}{\sqrt{x^2 - m^2}}.$$

On en déduit

$$y = ml\left(x + \sqrt{x^2 - m^2}\right) + \mathrm{C}.$$

Si l'on prend la constante C, qui est arbitraire, égale à $-\,lm$, on déduit de cette équation

$$x + \sqrt{x^2 - m^2} = m e^{\frac{y}{m}},$$

et; par suite,

$$x-\sqrt{x^2-m^2}=me^{-\frac{y}{m}},$$

$$x=\frac{m}{2}\left(e^{\frac{y}{m}}+e^{-\frac{y}{m}}\right),$$

équation d'une chaînette qui, par sa révolution autour de l'axe des y, engendrera la surface applicable sur l'hélicoïde gauche à plan directeur.

738. M. Bour a généralisé le théorème précédent en démontrant que toute surface *hélicoïdale* est applicable sur une surface de révolution.

On nomme *surface hélicoïdale* la surface engendrée par un profil de forme quelconque situé dans un plan normal à un cylindre de révolution mené par une génératrice et se mouvant sans changer de forme, de telle sorte que tous les points décrivent simultanément des hélices de même pas situées sur des cylindres de même axe.

En prenant pour axe des z l'axe du cylindre et pour axes des x et des y deux diamètres rectangulaires de la base, on peut évidemment représenter une surface hélicoïdale par les équations

$$x=\rho\cos\omega,$$

$$y=\rho\sin\omega,$$

$$z=m\omega+\varphi(\rho),$$

la forme de la fonction $\varphi(\rho)$ déterminant la courbe qui sert de profil. Les variables ρ et ω définissent ici sur la surface deux systèmes de courbes : les unes, qui correspondant aux valeurs constantes de ρ, sont des hélices; les autres, correspondant aux valeurs constantes de ω, sont les courbes, toutes superposables, suivant lesquelles la surface est coupée par les plans méridiens du cylindre. Ces deux systèmes ne sont pas orthogonaux, et pour cette raison nous introduirons une nouvelle variable u, paramètre des courbes qui coupent les hélices à angle droit. En considérant ω comme une fonction de ρ et de u, on aura

$$dx=\cos\omega\,d\rho-\rho\sin\omega\frac{d\omega}{d\rho}d\rho-\rho\sin\omega\frac{d\omega}{du}du,$$

$$dy=\sin\omega\,d\rho+\rho\cos\omega\frac{d\omega}{d\rho}d\rho+\rho\cos\omega\frac{d\omega}{du}du,$$

$$dz=\varphi'(\rho)\,d\rho+m\frac{d\omega}{du}du+m\frac{d\omega}{d\rho}d\rho;$$

on en déduit l'expression du carré ds^2 de la distance de deux points infiniment

voisins de la surface,

$$ds^2 = d\rho^2\left[1+\rho^2\left(\frac{d\omega}{d\rho}\right)^2+\varphi'(\rho)^2+m^2\left(\frac{d\omega}{d\rho}\right)^2+2m\varphi'(\rho)\frac{d\omega}{d\rho}\right]+du^2\left[\rho^2\left(\frac{d\omega}{du}\right)^2+m^2\left(\frac{d\omega}{du}\right)^2\right]$$
$$+2d\rho\,du\left[\rho^2\frac{d\omega}{d\rho}\frac{d\omega}{du}+m\frac{d\omega}{du}\varphi'(\rho)+m^2\frac{d\omega}{d\rho}\frac{d\omega}{du}\right].$$

Pour que les courbes qui correspondent aux valeurs constantes de u coupent orthogonalement les hélices qui correspondent aux valeurs constantes de ρ, il faut que le terme en $du\,d\rho$ disparaisse. Posons donc

$$\frac{d\omega}{du}\left[\rho^2\frac{d\omega}{d\rho}+m\varphi'(\rho)+m^2\frac{d\omega}{d\rho}\right]=0:$$

$\frac{d\omega}{du}$ ne peut pas être nul, car il est impossible que ω dépende de la seule variable ρ: il faut donc égaler à zéro le second facteur; on en déduira une valeur de ω en fonction de ρ, et comme ω ne figure que par sa dérivée $\frac{d\omega}{d\rho}$, on peut lui ajouter une fonction arbitraire de u. Prenons cette fonction égale à ku, k étant constant; $\frac{d\omega}{du}$ sera alors égal à k, et l'expression de ds^2 prendra la forme

$$ds^2 = G\,d\rho^2+k^2du^2(\rho^2+m^2),$$

le coefficient G ne contenant que ρ : désignons-le par $[\psi(\rho)]^2$, nous aurons

$$ds^2=[\psi(\rho)\,d\rho]^2+k^2du^2(\rho^2+m^2).$$

Si l'on pose $\psi(\rho)\,d\rho = dv$, ρ sera une fonction de v et l'expression de ds^2 prend la forme

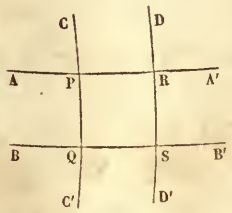
$$ds^2 = dv^2+F(v)\,du^2,$$

qui convient (**130**) à une surface de révolution.

Courbure des trajectoires orthogonales sur une surface quelconque.

739. Lorsque sur une surface quelconque on considère deux systèmes de lignes se coupant orthogonalement et décomposant la surface en rectangles infiniment petits, il existe entre les courbures géodésiques des lignes des deux systèmes, ou, ce qui revient au même, entre les côtés infiniment petits des rectangles successifs, des relations analogues à celles qui ont déjà été trouvées (**507**) et (**556**) pour les systèmes plans ou sphériques.

Soient AA′, BB′ deux courbes infiniment voisines du premier système correspondant aux valeurs α_2, $\alpha_2 + d\alpha_2$ du paramètre α_2, qui figure dans leur équation générale, et CC′, DD′ deux courbes infiniment voisines du second système correspondant aux valeurs α_1, $\alpha_1 + d\alpha_1$ de leur paramètre, et formant avec les deux premières un rectangle infiniment petit PQRS; le côté PR, distance de deux points infiniment voisins qui correspondent à une même valeur de α_2, est évidemment proportionnel à $d\alpha_1$, et le côté PQ à $d\alpha_2$; posons donc, en désignant par E et G deux fonctions de α_1 et de α_2 que nous regardons comme connues,



$$PQ = d\alpha_2 \sqrt{G},$$

$$PR = d\alpha_1 \sqrt{E};$$

le carré de la distance de deux points infiniment voisins, tels que P et S, sera alors exprimé par

$$ds^2 = E d\alpha_1^2 + G d\alpha_2^2,$$

et il suffira de calculer cette distance pour connaître les fonctions E et G. Les courbures géodésiques des lignes PQ et PR peuvent se calculer au moyen du théorème démontré (719).

On a en effet

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{RS - PQ}{PR.PQ},$$

$$\frac{1}{\rho_2} = \frac{QS - PR}{PR.PQ};$$

remplaçons PR et PQ par leurs valeurs, et remarquons que RS — PQ, différentielle de PQ par rapport à α_1, est donnée par la formule

$$\frac{d.PQ}{d\alpha_1} d\alpha_1 = d\alpha_1 \frac{d}{d\alpha_1} (d\alpha_2 \sqrt{G}) = d\alpha_1 d\alpha_2 \frac{d\sqrt{G}}{d\alpha_1}.$$

On verra de même que QS — PR, la différentielle de PR, est égale à

$$d\alpha_1 d\alpha_2 \frac{d\sqrt{E}}{d\alpha_2};$$

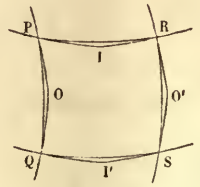
on a par conséquent

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{\frac{d\sqrt{G}}{d\alpha_1}}{\sqrt{E}\sqrt{G}},$$

$$\frac{1}{\rho_2} = \frac{\frac{d\sqrt{E}}{d\alpha_2}}{\sqrt{E}\sqrt{G}}.$$

740. Cherchons ce que deviennent, dans le cas d'un système quelconque de courbes orthogonales, les relations trouvées (558) pour un système de courbes sphériques.

Soit PQRS le rectangle infiniment petit formé par les courbes des deux systèmes correspondant aux valeurs α_1, $\alpha_1 + d\alpha_1$ du premier paramètre, et α_2, $\alpha_2 + d\alpha_2$ du second. Menons les sommets P, Q, R, S des lignes géodésiques tangentes aux côtés de ce rectangle : nous formerons un octogone QOPIRO'SI', dont la courbure totale



est mesurée (728) par l'excès de la somme de ses angles sur douze angles droits; or, en nommant ε_1, $\varepsilon_1 + d\varepsilon_1$ les angles de contingence des arcs PR, QS, et ε_2, $\varepsilon_2 + d\varepsilon_2$ ceux des arcs PQ, RS, on a, en désignant chaque angle de l'octogone par la lettre placée à son sommet,

$$\text{(1)} \qquad \begin{aligned} O &= \pi + \varepsilon_2, & I &= \pi + \varepsilon_1, \\ O' &= \pi - \varepsilon_2 - d\varepsilon_2, & I' &= \pi - \varepsilon_1 - d\varepsilon_1, \end{aligned}$$

et la courbure de l'octogone est par conséquent mesurée par

$$-d\varepsilon_1 - d\varepsilon_2.$$

Cette courbure est égale d'ailleurs (722) à la surface PQ.PR divisée par le produit des rayons de courbure, et l'on a par conséquent

$$\text{(2)} \qquad d\varepsilon_1 + d\varepsilon_2 = -\frac{PQ.PR}{R_1 R_2}.$$

Mais on a, en nommant $\frac{1}{\rho_1}$ et $\frac{1}{\rho_2}$ les courbures géodésiques des deux côtés,

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{\varepsilon_2}{PQ},$$

$$\frac{1}{\rho_2} = \frac{\varepsilon_1}{RS},$$

et par conséquent l'équation (2) peut s'écrire

$$\frac{d\left(\frac{PQ}{\rho_1}\right)}{d\alpha_1}d\alpha_1+\frac{d\left(\frac{PR}{\rho_2}\right)}{d\alpha_2}d\alpha_2=-\frac{PQ.PR}{R_1R_2}, \tag{3}$$

c'est-à-dire

$$PQ.\frac{d\frac{1}{\rho_1}}{d\alpha_1}d\alpha_1+\frac{1}{\rho_1}\frac{d\,PQ}{d\alpha_1}d\alpha_1+PR\,\frac{d\frac{1}{\rho_2}}{d\alpha_2}d\alpha_2+\frac{1}{\rho_2}\frac{d\,PR}{d\alpha_2}d\alpha_2=-\frac{PQ.PR}{R_1R_2}; \tag{4}$$

or on a

$$PR=d\alpha_1\sqrt{E},\quad PQ=d\alpha_2\sqrt{G},$$

et par conséquent

$$\frac{d.PR}{d\alpha_2}=d\alpha_1\frac{d\sqrt{E}}{d\alpha_2},$$
$$\frac{d.PQ}{d\alpha_1}=d\alpha_2\frac{d\sqrt{G}}{d\alpha_1},$$

c'est-à-dire, d'après les valeurs trouvées pour $\frac{1}{\rho_1}$ et $\frac{1}{\rho_2}$,

$$\frac{d\,PR}{d\alpha_2}=d\alpha_1\cdot\sqrt{E}\cdot\sqrt{G}\cdot\frac{1}{\rho_2},$$
$$\frac{d\,PQ}{d\alpha_1}=d\alpha_2\cdot\sqrt{E}\cdot\sqrt{G}\cdot\frac{1}{\rho_1},$$

et l'équation (4) devient, en supprimant le facteur $d\alpha_1\,d\alpha_2$,

$$\sqrt{G}\,\frac{d\frac{1}{\rho_1}}{d\alpha_1}+\frac{1}{\rho_1^2}\sqrt{E}\,\sqrt{G}+\sqrt{E}\,\frac{d\frac{1}{\rho_2}}{d\alpha_2}+\frac{1}{\rho_2^2}\sqrt{E}\,\sqrt{G}=-\frac{\sqrt{E}\cdot\sqrt{G}}{R_1R_2}, \tag{5}$$

et en divisant par $\sqrt{E}\,\sqrt{G}$, et à cause de

$$PR=ds_2=d\alpha_1\sqrt{E},$$
$$PQ=ds_1=d\alpha_2\sqrt{G},$$

$$\frac{d\frac{1}{\rho_1}}{ds_2}+\frac{d\frac{1}{\rho_2}}{ds_1}+\frac{1}{\rho_1^2}+\frac{1}{\rho_2^2}=-\frac{1}{R_1R_2}. \tag{6}$$

Cette formule peut être transformée absolument comme la formule analogue trouvée (558); elle fournira, entre les côtés successifs des rectangles qui peuvent décomposer une surface quelconque, une relation toute semblable à celle qui a été

trouvée (559) dans le cas de la sphère, et dans laquelle seulement le carré du rayon de la sphère sera remplacé par le produit des rayons de courbure.

741. On peut facilement déduire des formules précédentes l'expression de la courbure $\frac{1}{R_1 R_2}$ en fonction des coefficients E et G et de leurs dérivées : l'équation (3) peut s'écrire, en effet,

$$\frac{d\alpha_1\, d\alpha_2 \sqrt{EG}}{R_1 R_2} = -\frac{d}{d\alpha_1}\frac{\left(d\alpha_2 \dfrac{d\sqrt{G}}{d\alpha_1}\right)}{\sqrt{E}}\, d\alpha_1 - \frac{d}{d\alpha_2}\frac{\left(d\alpha_1 \dfrac{d\sqrt{E}}{d\alpha_2}\right)}{\sqrt{G}}\, d\alpha_2,$$

ou enfin, en supprimant le facteur $d\alpha_1\, d\alpha_2$,

$$\frac{\sqrt{EG}}{R_1 R_2} = -\frac{d}{d\alpha_1}\left(\frac{\dfrac{d\sqrt{G}}{d\alpha_1}}{\sqrt{E}}\right) - \frac{d}{d\alpha_2}\left(\frac{\dfrac{d\sqrt{E}}{d\alpha_2}}{\sqrt{G}}\right).$$

Cette formule a une grande importance.

Si les lignes qui correspondent à une valeur constante de α_2 sont géodésiques, on a (734), en choisissant convenablement α_1,

$$ds^2 = d\alpha_1^2 + G\, d\alpha_2^2;$$

E est alors égal à l'unité, et la formule devient

$$\frac{\sqrt{G}}{R_1 R_2} = -\frac{d^2\sqrt{G}}{d\alpha_1^2}.$$

FIN DU CALCUL DIFFÉRENTIEL.

TABLE ANALYTIQUE.

A

Nos des §§

ABEL. — Théorème relatif à la convergence des séries..... 233
— Théorème relatif à la continuité des séries ordonnées suivant les puissances d'une variable..... 265
— Démonstration de la formule $\varphi(x+a)=\varphi(x)+a\varphi'(x+b)+\frac{a.a-2b}{1.2}\varphi''(x+2b)+\ldots$ 323

AIRE PLANE. — Différentielle d'une aire plane en coordonnées rectilignes..... 114
— En coordonnées polaires..... 116
— Expression en coordonnées rectilignes de la différentielle précédente..... 117

ARC DE COURBE. — Définition de la longueur d'un arc de courbe..... 18
— La différence entre un arc et sa corde est un infiniment petit du troisième ordre. 19

Nos des §§

ARC DE COURBE. — Longueur d'un arc de cycloïde..... 20
— Longueur d'un arc de développée..... 22
— Différentielle d'un arc de courbe..... 118
— Différentielle d'un arc de cycloïde..... 119
— Différentielle d'un arc de courbe en coordonnées polaires..... 120
— Différentielle d'un arc de courbe non plane rapporté à des coordonnées polaires. 121
— Différentielle d'un arc de courbe dans un système de coordonnées curvilignes.... 123
— Différence entre un arc infiniment petit et sa corde..... 517 et 551
— Différence des tangentes menées aux extrémités d'un arc infiniment petit et terminées à leur point de rencontre..... 519
— Différence entre un arc et la somme des tangentes à ses extrémités..... 552

B

BERNOULLI (NOMBRES DE). — Leur définition. 305
— Leur introduction dans le développement de $\frac{x}{e^x+1}$..... 305
— Expressions du $n^{ième}$ nombre de Bernoulli donnée par Herschel..... 345
— Valeur numérique des neuf premiers nombres de Bernoulli..... 347
— Ils s'introduisent dans l'expression de la somme des puissances semblables des nombres entiers..... 348
— Étude de la somme

$$1+2^p+\ldots+n^p=\varphi_p(n),$$

considérée comme fonction continue de n..... 349 et 353
— Expression du nombre B_n sous la forme

$$B_n=\frac{1.2.3\ldots 2n}{2^{2n-1}\pi^{2n}}\left(1+\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+\cdots\right) \quad 411$$

BERNOULLI (Jacques). — Sa démonstration du développement $\frac{1}{(1-x)^n}$, lorsque n est entier..... 225
— Exemple donné par lui du danger des séries divergentes..... 228
— Série de Bernoulli..... 309
— Application à la détermination numérique de $\sqrt{2}$ et de $\sqrt[3]{3}$..... 310

BINET. — Application élégante de la théorie des fonctions génératrices..... 342

BINOME (PUISSANCE D'UN). — Étude de $(1+z)^m$ lorsque z est imaginaire..... 376
— Développement de $(1+z)^m$, lorsque z est imaginaire..... 384
— Séries remarquables qui s'en déduisent.. 384

BOOLE. — Expression remarquable de la différence $\varphi(x+h)-\varphi(x)$..... 334

Nos des §§

BONNET (O.). — Théorème relatif à la dérivée d'une fonction infiniment petite..... 45
— Réciproque de ce théorème..... 549
— Applications à l'étude des lignes courbes..... 549 et 552
— Théorèmes relatifs à quelques grandeurs infiniment petites..... 609
— Méthode pour la détermination des développées..... 623
— Produit des rayons de courbure d'une surface gauche..... 656

Nos des §§

BORCHARDT. — Introduction remarquable d'une équation différentielle dans un problème d'arithmétique..... 214

BOUQUET. — Remarque importante relative à la distance de deux tangentes infiniment voisines..... 573

BURMANN. — Série de Burmann..... 321
— Application au développement de e^{az} en série ordonnée suivant les puissances de $2e^{bz}$..... 322

C

CARTES GÉOGRAPHIQUES. — Indication des conditions nécessaires pour qu'une carte soit parfaite..... 131

CAUCHY. — Formation d'une série convergente ou divergente en même temps qu'une série donnée à termes positifs..... 234
— Applications de ce théorème. 235, 236 et 237
— A donné le reste de la série de Taylor... 274
— A créé la théorie des résidus..... 434

CAYLEY. — Application de la formule de Lagrange au développement de $\frac{1}{\varphi(z)}$, lorsque l'on sait développer les puissances entières de $\varphi(z)$..... 320

COEFFICIENTS INDÉTERMINÉS. — Application au développement des fonctions en série. 324
— On en déduit la formule de Taylor 325
— Développement de $x \cot x$..... 326
— Développement du produit $(1+xz)(1+x^2z)(1+x^3z)$..... 327
— Développement de $(1+xz)(1+x^3z)(1+x^5z)$..... 328
— Développement de $(1+x)(1+x^2)(1+x^4)$..... 329

CONCAVITÉ ET CONVEXITÉ D'UNE COURBE PLANE. 492

CONSTANTES ARBITRAIRES. — Élimination d'une constante arbitraire..... 188
— Élimination d'un nombre quelconque de constantes..... 189
— Élimination de deux constantes pour former une équation aux différentielles partielles..... 191
— Élimination de n constantes dans une équation qui contient un nombre égal de variables indépendantes..... 196

CONTACT. — Définition de l'ordre du contact..... 533 et 534

CONTINGENCE (ANGLE DE). — Différence entre l'angle d'une corde avec la tangente et la moitié de l'angle de contingence.... 518

CONTINUITÉ. — Condition de continuité des séries..... 263

CONTINUITÉ. — Démonstration d'un théorème d'Abel..... 265
— Si une série ordonnée suivant les puissances de x est convergente pour certaines valeurs de x, il en est de même de sa dérivée..... 267

CONVERGENCE. — Lorsque les termes sont positifs, la condition nécessaire et suffisante de convergence est que la somme n'augmente pas indéfiniment... 229
— Condition de convergence déduite du rapport d'un terme au précédent..... 230
— La convergence de la série à termes positifs, dont le terme général est u_n, dépend de la limite de $(u_n)^{\frac{1}{n}}$..... 231
— Convergence des séries à termes positifs. — u_n étant le terme général d'une série à termes positifs, il est nécessaire pour la convergence que nu_n tende vers zéro. 232
— La réciproque de ce théorème n'est pas exacte; remarque curieuse d'Abel à ce sujet..... 233
— Formation d'une série qui est convergente ou divergente en même temps qu'une série donnée à termes positifs. 234
— Application aux conditions de convergence d'une série..... 235 et 236
— Formation de certaines fonctions du terme général, dont la limite, si elle diffère de l'unité, permet de prononcer sur la convergence ou la divergence d'une série..... 238 et 241
— Règles de Gauss..... 242
— Méthode de M. Kummer..... 243 et 244
— Convergence (Cercle de). — Ce que l'on nomme cercle de convergence d'une série. 261
— Convergence des produits infinis de la forme $(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\dots(1+\alpha_n)$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_n$ étant réels et de même signe. 400
— Cas où les seconds termes, toujours réels, ne sont pas de même signe..... 401
— Convergence d'un produit infini dont les facteurs sont imaginaires..... 403

Nos des §§

CONVERGENCE. — La série qui donne $\frac{x}{e^x - 1}$ cesse d'être convergente lorsque x surpasse 2π, et peut néanmoins servir au calcul numérique..... 413

COORDONNÉES CURVILIGNES. — Différentielle d'un arc de courbe en coordonnées curvilignes..... 123 et 126

— Distance de deux points infiniment voisins dans un système de coordonnées curvilignes..... 123

— Cas où le système est orthogonal..... 124

— Distance de deux points situés sur une surface donnée..... 125

— Application des formules précédentes aux coordonnées polaires..... 127

— Application au système formé par les surfaces homofocales du second degré.... 129

— Distance de deux points infiniment voisins situés sur une surface de révolution... 130

COORDONNÉES CURVILIGNES ORTHOGONALES. — Définition des paramètres h_1, h_2, h_3, introduits par M. Lamé, qui ne changent pas avec la direction des axes..... 183

— x, y, z étant les coordonnées rectilignes d'un point, et ρ, ρ_1, ρ_2 les coordonnées curvilignes, on a

$$\frac{dx}{d\rho} = \frac{1}{h^2}\frac{d\rho}{dx}. \quad \ldots\ldots 183$$

— Expression de la somme

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} + \frac{d^2v}{dz^2},$$

dans un système de coordonnées curvilignes orthogonales..... 184 et 185

COURBES A DOUBLE COURBURE. — Tangente aux courbes à double courbure..... 91

— Plan normal à une courbe à double courbure. (Voy. Courbure, développées, etc.). 92

COURBES ENVELOPPES. — L'enveloppe est le lieu des intersections successives de l'enveloppée..... 104

— Équation de l'enveloppe d'un système de courbes..... 105

— Quelques applications..... 109 et 110

COURBES PLANES. — Distinction entre la portion du plan intérieure à la courbe, et la portion extérieure..... 82

COURBES SPHÉRIQUES. — Détermination du grand cercle tangent en un point donné. 93

COURBURE. — Sens de la courbure..... 492

— Définition de la courbure..... 493

— Centre de courbure..... 494

— Rayon de courbure, son expression.... 495

— Expressions diverses du même rayon pour une courbe plane..... 497

Nos des §§

COURBURE. — Courbure d'une courbe plane en un point de rebroussement..... 501

— Rayon de courbure de l'ellipse, de la cycloïde, de la spirale logarithmique. 504 et 505

— Rayon de courbure d'une roulette..... 506

— Courbure des lignes orthogonales..... 508

— Définition de la courbure d'une courbe à double courbure..... 578

— Rayon de courbure d'une courbe à double courbure..... 584

— Propriété des courbes dont la courbure est constante..... 607

— Courbure d'une section normale dans une surface..... 624 et 633

— Courbure d'une section oblique..... 629

— Courbure d'une ligne quelconque tracée sur une surface..... 630 et 632

COURBURE (CERCLE DE). — Sa définition.. 493

— Il traverse la courbe..... 496, 525 et 541

— Distance d'une courbe à son cercle de courbure..... 521

— Cercle de courbure d'une ligne sphérique. 544

— Pôle du cercle de courbure..... 545

— Définition du cercle de courbure d'une courbe à double courbure..... 582

— Formules élégantes dues à M. Serret.... 590

COURBURE GÉODÉSIQUE. — Définition de la courbure géodésique d'une ligne sphérique..... 542

— Courbure géodésique d'un petit cercle... 543

— Diverses expressions de la courbure géodésique d'une ligne sphérique..... 546

— La courbure géodésique est proportionnelle à la distance de la courbe au grand cercle qui la touche..... 550

— Définition de la courbure géodésique sur une surface quelconque..... 714

— Différentes expressions de la courbe géodésique..... 714 et 719

COURBURE (LIGNE DE). — Définition des lignes de courbure..... 663

— Leur équation différentielle..... 665

— Quand une ligne de courbure est commune à deux surfaces, les surfaces se coupent sous un angle constant..... 678

— Les lignes de courbure correspondent aux lignes de courbure dans la transformation par rayons vecteurs réciproques. 683

— Détermination des lignes de courbure des surfaces de révolution..... 685

— Surface dont les lignes de courbure sont des sections principales..... 700

— Surface dont les lignes de courbure sont indéterminées..... 687

— Lignes de courbure de l'ellipsoïde..... 689

Nos des §§

COURBURE (LIGNE DE). — Des surfaces développables..... 690
— Lignes de courbure de la surface enveloppe d'une sphère..... 694
— Le rayon de courbure d'une surface-canal est constant..... 696
— Surface dont toutes les lignes de courbure sont des cercles..... 698
— Surfaces dont les lignes de courbure sont planes et situées dans des plans parallèles. 703
— Surface dont toutes les lignes de courbure sont planes..... 705 et 706
COURBURE (RAYONS PRINCIPAUX DE). — Leur définition en un point d'une surface..... 627
— Moyen de les déterminer..... 634
— Expression remarquable du rayon de courbure principal..... 637
— Méthode élégante pour déterminer le produit des rayons principaux..... 654

Nos des §§

COURBURE (RAYONS PRINCIPAUX DE). — Application aux surfaces gauches..... 656
— Théorème de Sturm sur les normales d'une surface..... 658
— Rayon de courbure d'une surface développable..... 690
— Une surface dont les deux rayons de courbure principaux sont constants est une sphère.. 699
COURBURE (SECONDE). — Définition de la seconde courbure..... 580
— Rapport des deux courbures..... 581
— Expression de la seconde courbure..... 589
CYCLOÏDE. — Tangente à la cycloïde..... 14
— Arc de cycloïde..... 20
— Longueur d'un arc de cycloïde..... 20
— Différentielle d'un arc de cycloïde..... 119
— Son rayon de courbure..... 504
— Sa développée..... 529

D

DÉRIVÉES. — Définition de la dérivée..... 3
— Dérivée; définition..... 23
— La dérivée de l'ordonnée est le coefficient angulaire de la tangente..... 24
— Dérivée de x^m..... 26
— Dérivée de a^z..... 27
— Dérivée de $\log x$..... 28
— Dérivée de $\sin x$..... 29
— Dérivée de $\cos x$..... 30
— Dérivée de $\operatorname{tang} x$..... 31
— Dérivée de $\operatorname{arc\,sin} x$..... 34
— Dérivée de $\operatorname{arc\,cos} x$..... 34
— Dérivée de $\operatorname{arc\,tang} x$..... 34
— Dérivée d'une fonction de fonction..... 36
— Dérivée d'une fonction liée à la variable par plusieurs fonctions intermédiaires.. 38
— Dérivée d'un produit..... 39
— Dérivée d'un quotient..... 40
— Dérivée d'une puissance..... 41
— Dérivée d'une expression de la forme u^v. 42
— Dérivée des fonctions simples.... 25 et 31
— Des fonctions inverses..... 32 et 35
— Des fonctions de fonctions..... 36 et 37
— Emploi des dérivées pour l'étude des fonctions..... 44
— Ordre de grandeur d'une dérivée infiniment petite..... 45
— Dérivées partielles; leur définition..... 50
— Importance des variables qui sont considérées comme constantes..... 51
— Dérivée d'une fonction composée..... 58

DÉRIVÉES. — Dérivée d'une fonction implicite. 60
— Cas de deux équations à deux inconnues. 62
— Cas d'un nombre quelconque d'équations. 63
— Cas de plusieurs variables indépendantes. ..... 64, 65 et 66
— Il existe toujours une fonction dont la dérivée soit égale à une fonction donnée..... 115
— Définition des dérivées d'ordre supérieur au premier..... 132
— Dérivées successives d'un produit..... 139
— Dérivées successives d'une fonction de fonction..... 140
— Dérivées successives de $\varphi(x^2)$..... 141
— Calcul de $\dfrac{d^{n-1}(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}}{dx^{n-1}}$ 143
— Dérivées de $\operatorname{arc\,tang} x$..... 144
— Dérivées de $\operatorname{arc\,sin} x$..... 145
— Dérivées d'ordre supérieur au premier pour les fonctions de plusieurs variables.. 159
— L'ordre dans lequel on prend deux dérivées successives est indifférent..... 160
— Dérivées d'ordre supérieur des fonctions implicites..... 165 et 166
— Expression élégante de $\dfrac{d^n x^n (1x)^n}{dx^n}$..... 307
— Dérivée d'ordre quelconque d'une fonction de fonction..... 308
— Valeurs numériques de quelques dérivées lorsque l'on suppose la variable nulle.. ..... 146 à 158

Nos des §§

DÉRIVÉES PARTIELLES. — Définition des dérivées partielles du premier ordre..... 50

— La dérivée partielle d'une fonction donnée, prise par rapport à une variable donnée, n'est déterminée que lorsqu'on se donne les autres variables supposées constantes dans le calcul de la dérivée..... 51 et 52

DÉTERMINANTS. — Définition des déterminants..... 68

— Condition pour qu'un déterminant soit nul..... 69

— Produit de deux déterminants..... 70

— Définition du déterminant d'un système de fonctions..... 71

— Définition analogue à celle de la dérivée. 72

— Condition nécessaire et suffisante pour que le déterminant d'un système soit nul..... 73 et 74

— Déterminant d'un système de fonctions de fonctions..... 75

— Déterminant d'un système de fonctions inverses..... 76

— Réduction du déterminant d'un système de fonctions à un monôme..... 77

— Lorsque l'on développe le déterminant du système de deux fonctions de variables x et y, la série qui le représente ne contient pas de termes en $\frac{1}{xy}$..... 398

DÉVELOPPABLES (SURFACES). — La propriété d'avoir un rayon de courbure infini est caractéristique des surfaces développables 693

DÉVELOPPÉE. — Arc de développée..... 22

— Leur définition..... 522

— Leurs propriétés..... 523 et 524

— Développée de l'ellipse..... 527

— De la cycloïde..... 529

— Développée d'une épicycloïde.... 528 et 531

— De la spirale logarithmique..... 532

— Développées sphériques..... 553

— Définition de la développée d'une courbe à double courbure..... 610

— Longueur d'un arc de développée..... 611

— Normale principale de la développée.... 613

DÉVELOPPÉES. — Surface lieu des développées. 615

— Les développées deviennent rectilignes par le développement de la surface qui les contient..... 616

— Équation des développées..... 622

Nos des §§

DIFFÉRENTIELLE. — Définition de la différentielle d'une fonction d'une seule variable..... 41

— Interprétation géométrique de la différentielle..... 42

— Différentielle d'une fonction de plusieurs variables..... 47

— Avantage que l'emploi des différentielles peut présenter sur celui des dérivées.. 48

— Cet avantage se montre surtout lorsque l'on considère plus de deux variables.. 49

— Définition de la différentielle d'une fonction de plusieurs variables..... 53

— La différentielle peut remplacer l'accroissement de la fonction.... 53, 54, 55 et 56

— Les variations infiniment petites de plusieurs variables liées par une équation sont toujours liées par une équation du premier degré..... 57

— Différentielle d'une aire plane..... 114

— En coordonnées polaires..... 116

— Différentielle d'un arc de courbe..... 118

— En coordonnées polaires..... 120

— Différentielle d'un arc de courbe non plane rapportée à trois coordonnées polaires..... 121

— Différentielle d'un arc de courbe dans un système de coordonnées curvilignes... 123

— Différentielle d'un arc de courbe tracé sur une surface..... 126

— Définition des différentielles d'ordre supérieur au premier..... 133

— Influence de la variable indépendante sur les différentielles d'ordre supérieur au premier..... 138

DIFFÉRENTIELLES D'ORDRE SUPÉRIEUR AU PREMIER. — $\Delta^n y$ et $d^n y$ sont deux infiniment petits d'ordre n dont le rapport a pour limite l'unité..... 137

— Différentielles d'ordre supérieur pour les fonctions d'une seule variable... 133 et 139

— D'ordre n d'une fonction de deux variables; représentation symbolique..... 162

— Définition des différentielles de divers ordres pour les fonctions de plusieurs variables..... 162

— Extension de la formule..... 163

— Représentation de la différentielle par une formule symbolique..... 162 et 163

Nos des §§

DIFFÉRENTIELLE D'ORDRE SUPÉRIEUR AU PREMIER. — Cas où les variables ne sont pas indépendantes..... 164
— Différentielles d'une fonction de plusieurs variables non indépendantes..... 164
— Influence de la variable indépendante sur les différentielles d'ordre supérieur au premier 167
DUHAMEL. — Remarque relative à la continuité des séries..... 264

Nos des §§

DUPIN (CHARLES). — Ce qu'il nomme indicatrice..... 638
— Tangentes conjuguées..... 645
— Théorème important relatif aux lignes de courbure des surfaces orthogonales.... 681
— A trouvé la surface dont toutes les lignes de courbure sont des cercles..... 698

E

EISENSTEIN. — Auteur d'un théorème relatif au développement des puissances quelconques d'une série..... 332
ÉPICYCLOÏDE. — Tangente à l'épicycloïde... 83
ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES. — Élimination d'une fonction arbitraire.... 157
— Formation d'une équation aux différentielles partielles par l'élimination de deux constantes..... 191
— L'équation obtenue est plus générale que celle dont elle provient..... 192
— Formation d'un nombre infini de solutions distinctes de celle que l'on s'est donnée..... 193
— Extension aux fonctions d'un nombre quelconque de variables..... 196
— Élimination de k fonctions arbitraires figurant dans $k+1$ équations simultanées..... 199
— Examen d'un cas exceptionnel qui se présente chaque fois que l'équation aux différentielles partielles obtenue est du premier ordre, sans être du premier degré, par rapport aux dérivées..... 201
— Des surfaces cylindriques..... 202
— Des surfaces coniques..... 203
— Des surfaces de révolution..... 204
— Des surfaces conoïdes..... 205
— Des surfaces engendrées par une droite qui rencontre une droite fixe..... 207
— Des surfaces gauches à plan directeur.. 208
— Des surfaces développables..... 209
— Des surfaces réglées..... 212
— Des surfaces-canaux..... 213

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES. — Des surfaces dont les lignes de courbure sont planes..... 706
ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES. — Définition d'une équation différentielle..... 186
— Formation des équations différentielles par l'élimination d'une constante..... 188
— Élimination d'un nombre quelconque de constantes..... 189
— Introduction remarquable d'une équation différentielle dans un problème d'arithmétique..... 214
ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES TOTALES. — Leur définition..... 215
— Manière de les former par l'élimination d'une constante..... 216
— Une équation différentielle totale de la forme
$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0$$
ne correspond pas toujours à une relation entre x, y et z..... 217
— Généralisation des résultats précédents.. 218
EULER. — Transformation d'une classe de séries..... 250
— A donné le premier les développements de $\sin mx$ et de $\cos mx$ en série ordonnée suivant les puissances de $\sin x$ et de $\cos x$..... 404
— A donné le développement
$$(1-x)(1-x^2)(1-x^4)$$
en série ordonnée suivant les puissances de x..... 330
— A donné la formule
$(2\cos x)^m = \cos mx + m\cos(m-2)x + \ldots$
..... 385

F

FONCTIONS. — Définition des fonctions inverses. 32
— Définition des fonctions de fonctions.... 36
— Conditions pour qu'une fonction soit croissante ou décroissante..... 44
— Étude de la fonction $\frac{\sin x}{x}$ 44
— Étude de la fonction $l(1+x) - x$..... 44

FONCTIONS. — Formation d'une équation aux différentielles partielles par l'élimination d'une fonction arbitraire.. ..... 197 et 198
— Élimination de k fonctions arbitraires figurant dans $k+1$ équations simultanées..... 199

Nos des §§

FONCTIONS. — Fonctions que Legendre a désignées par X_n 354
— Expression X_n déduite du théorème de Lagrange 315
— Même expression obtenue directement.. 355
— L'équation $X_n = 0$ a n racines réelles comprises entre -1 et $+1$ 356
— Équation différentielle du second ordre à laquelle satisfait X_n 357
— Relation simple entre X_n, X_{n+1} et X_{n-1}.. 358
— Expression de la dérivée $\frac{dX_{n+1}}{dx}$ 358
— Définition d'une fonction imaginaire.... 359
— Conditions pour qu'une expression de la forme $P+Q\sqrt{-1}$ soit fonction de $x+y\sqrt{-1}$ 360
— Équation aux dérivées partielles à laquelle doivent satisfaire P et Q 361
— Deux fonctions imaginaires qui ont même dérivée ont une différence constante... 364
— Définition de quelques fonctions. 365 et 372
— Distinction entre les fonctions bien et mal déterminées 373
— Comment on désigne une valeur spéciale pour une fonction mal déterminée..... 373
— Si la courbe qui sert à définir cette valeur se déforme, il y a changement brusque lorsqu'elle traverse certains points du plan 374
— Étude de $\sqrt{x+y\sqrt{-1}}$ 375
— Étude de $(1+z)^m$ 376
— Recherche de la fonction de forme donnée qui s'écarte le moins possible d'une fonction donnée 488
— Application à la recherche du polynôme de degré n qui s'écarte le moins possible de zéro 491

FONCTIONS DE FONCTIONS. — Déterminant d'un système de fonctions de fonctions..... 75
— Dérivées successives d'une fonction de fonction ..... 140 et 141
— Dérivées de la fonction $\varphi(x^2)$ 142
— Dérivée d'ordre quelconque d'une fonction de fonction 308

FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES. — Expression de son accroissement infiniment petit sous forme de série 393
— Développement en série ordonnée suivant les puissances et les produits des variables ..... 394 et 395
— Extension de la formule de Lagrange aux fonctions de deux variables 397
— Démonstration de Jacobi 398
— Maximum et minimum des fonctions de deux variables 480

Nos des §§

FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES. — Extension aux fonctions de plusieurs variables. 482
FONCTIONS GÉNÉRATRICES. — Leur définition. 337
— Principes de leur théorie..... 337 et 340
— Quelques applications 341
FONCTIONS IMPLICITES. — Dérivées d'ordre supérieur des fonctions implicites. 165 et 166
— Maximum et minimum des fonctions implicites 484
FONCTIONS INVERSES. — Déterminant d'un système de fonctions inverses 76
FONCTIONS SYMÉTRIQUES. — Application du calcul des résidus au calcul des fonctions symétriques des racines d'une équation 448
— Application à deux équations à deux inconnues 450
FRACTION. — Véritable valeur d'une fraction qui se présente sous la forme $\frac{0}{0}$ 451
— Cas où la fraction contient deux variables. 452
— Fraction qui se présente sous la forme $\frac{\infty}{\infty}$ ..... 453 et 454
FRACTIONS CONTINUES. — Leur définition.... 419
— Transformation de la série
$$\frac{1}{A_1}-\frac{1}{A_2}+\frac{1}{A_3}-\dots$$
en fraction continue 420
— Application à 12 et à $\frac{\pi}{4}$ 421
— Transformation d'une série de la forme
$$B_1-B_2+B_3\dots$$ 422
— Application à $1+qz+q^4z^2+\dots q^{n^2}z^n$. 423
— Transformation de
$$\frac{1}{A}-\frac{1}{AB}+\frac{1}{ABC}\dots$$ 424
— Développement de $1-\frac{1}{e}$ en fraction continue 425
— Développement d'une fonction sous forme de fraction continue, méthode générale. 426
— Développement de $(1+x)^m$ sous forme de fraction continue 427
— Développement de arc tang x 428
— Transformation de la série
$$1+\frac{a}{z}+\frac{1}{2}\frac{a^2}{z(z+1)}+\dots$$ 429
— On en déduit le développement de $\frac{e-1}{e}$ en fraction continue 429
— Transformation en fraction continue de la série
$$1+\frac{\alpha.\beta}{1.\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1).\beta.(\beta+1)}{1.2.\gamma.(\gamma+1)}x^2+\dots$$ 430
— Application à $(1+x)^n$ 431
— Application à $l(1+x)$ 432
— Application à e^x 433

G

Nos des §§

GAUSS. — Règles de convergence d'une classe de séries 242

— Développement en fraction continue de la série

$$1+\frac{\alpha.\beta}{1.\gamma}x+\frac{\alpha.(\alpha+1).\beta(\beta+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)}x^2+\ldots \quad 430$$

Nos des §§

GAUSS. — Définition de la courbe d'une surface..... 720

— Lorsqu'on développe une surface la courbure est invariable..... 724

— Expression du produit des rayons de courbure..... 741

H

HERSCHEL. — Théorème d'Herschel, relatif au développement de $\varphi(e^x)$..... 345

I

IMAGINAIRES. — Représentation géométrique des quantités imaginaires..... 260

— Le module d'une somme est moindre que la somme des modules..... 260

— Définition d'une fonction imaginaire..... 359

— Condition pour que $P+Q\sqrt{-1}$ soit fonction de $x+y\sqrt{-1}$..... 360

— Définition de z^m lorsque z est imaginaire. 365

— Définition de e^z..... 366

— Dérivée de e^z..... 367

— Définition de sin z et de cos z..... 368

— Définition de tang z..... 369

— Définition de lz..... 370

— Dérivée de lz..... 371

— Définition de z^m pour une valeur quelconque de m..... 372

— Application des fonctions imaginaires au développement de cot x..... 387

— Application des fonctions imaginaires au développement de $(2\cos x)^m$..... 385

INDÉTERMINÉES (FORMES). — Fractions qui se présentent sous la forme $\frac{0}{0}$.... 451 et 452

— Fractions qui se présentent sous la forme $\frac{\infty}{\infty}$..... 453 et 454

— Autres formes indéterminées..... 456

— Emploi des séries pour trouver la véritable valeur d'une forme indéterminée. ..... 458 et 461

INDICATRICE. — Définition de la courbe nommée indicatrice par M. Dupin..... 638

— Son emploi pour la démonstration de quelques théorèmes..... 638 et 645

INDICATRICE SPHÉRIQUE. — Sa définition.... 566

INFINIMENT PETIT. — Définition d'un infiniment petit..... 1

— Des infiniment petits de différents ordres. 1

INFINIMENT PETIT. — L'accroissement infiniment petit d'une fonction est de même ordre que celui de la variable..... 2

— Si les coordonnées des points d'une courbe s'expriment en fonction d'une variable α, la distance de deux points infiniment voisins de la courbe est de même ordre que la différence des valeurs de α auxquelles ils correspondent..... 4

— Si les points d'une courbe correspondent un à un à ceux d'une autre courbe, la distance de deux points voisins est de même ordre que celle de leurs correspondants..... 5

— Si une ligne droite se déplace suivant une loi continue, l'angle de deux positions infiniment voisines est de même ordre que la variation correspondante du paramètre..... 6

— Si les points d'une surface correspondent un à un à ceux d'une autre surface, la distance de deux points voisins de l'une est de même ordre que celle de leurs correspondants sur l'autre..... 7

— La distance d'une courbe à sa tangente, à distance infiniment petite du point de contact, est infiniment petite du second ordre..... 8

— Il existe en chaque point d'une courbe plane un cercle qui la touche, et qui s'en approche infiniment plus que la tangente..... 10

— Condition nécessaire et suffisante pour que deux infiniment petits puissent être substitués l'un à l'autre dans la recherche de la limite d'un rapport ou d'une somme..... 11 et 12

Nos des §§

INFINIMENT PETIT. — Condition pour que deux points voisins puissent être substitués l'un à l'autre dans la recherche d'une tangente..... 13
— Le plan tangent d'une surface est à distance infiniment petite du second ordre de tout point de la surface infiniment voisin du point de contact..... 16
— Condition pour qu'un point puisse être substitué à un autre dans la détermination d'un plan tangent..... 17
— La différence entre un arc et sa corde est infiniment petite du troisième ordre... 19

Nos des §§

INFINIMENT PETIT. — Accroissement infiniment petit d'une fonction exprimé sous forme de série..... 276
— Accroissement infiniment petit d'une fonction de deux variables..... 393
— Ce que l'on nomme valeur principale... 548
— La dérivée d'un infiniment petit a pour valeur principale la dérivée de la valeur principale..... 549
— Distance d'une courbe à son plan osculateur 608
— Distance de deux tangentes infiniment voisines..... 609

J

JACOBI. — Définition du déterminant d'un système de fonctions..... 71
— A donné l'expression simple de

$$\frac{d^{n-1}(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}}{dx^{n-1}}$$ 143

JACOBI. — Démonstration de la formule de Lagrange..... 314
— Démonstration de la formule de Lagrange dans le cas de deux variables..... 398
— Théorème relatif à une courbe fermée quelconque..... 725

K

KUMMER. — Méthode pour décider de la convergence d'une série..... 243 et 244

KUMMER. — Méthode de sommation pour les séries..... 255, 256 et 257

L

LAGRANGE. — Reste de la série de Taylor..... 273
— Formule de Lagrange pour développer la fonction définie par l'équation

$$z = a + x\varphi(z)$$ 311
— Généralisation due à Laplace..... 312
— Quelle est la racine développée par la formule de Lagrange..... 313
— Seconde démonstration due à Jacobi.... 314
— Application de la formule au développement de $(1-2ax+x^2)^{-\frac{1}{2}}$..... 316
— Application de la formule au développement de $\left(\frac{2}{1+\sqrt{1+x}}\right)^n$ 316
— Développement de la racine d'une équation du second degré..... 317
— Développement de la racine de l'équation $x^{n+1}+ax-b=0$..... 318
— Développement de la racine de l'équation $a_0 = a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$..... 319
— Développement de $\frac{1}{\varphi(z)}$ lorsque l'on sait développer les puissances entières de $\varphi(z)$. 320
— Expression symbolique de la série de Taylor..... 343
— Extension de la formule aux fonctions de deux variables..... 397

LAMÉ. — Formule remarquable relative aux courbures de deux séries de lignes orthogonales..... 511
— Formule analogue pour les courbes tracées sur la sphère..... 558
— Formules analogues relatives à une surface quelconque..... 739
LAPLACE. — Démonstration qu'il a donnée de la formule de Lagrange..... 311
— Généralisation de la formule..... 312
— Auteur de la théorie des fonctions génératrices..... 337
— A donné l'expression symbolique du développement de $\varphi(x+h, y+k)$, a étendu la formule de Lagrange aux fonctions de deux variables..... 398
LEGENDRE. — A étudié le premier certaines fonctions qui naissent du développement de $(1-2xz+z^2)^{-\frac{1}{2}}$..... 354
LEIBNITZ. — A déduit le développement de $\frac{1}{(1-x)^n}$ de la théorie des intérêts composés..... 225
LIOUVILLE. — Ce qu'il nomme courbure géodésique..... 542

Nos des §§

LOGARITHMES. — Étude de la fonction $l(1+z)$, lorsque z est imaginaire..... 377
— Développement de $l(1+z)$, lorsque z est imaginaire..... 381

LOGARITHMIQUE (SPIRALE). — Son rayon de courbure..... 504
— Sa développée..... 532

M

MACLAURIN. — Série que l'on désigne habituellement sous le nom de théorème de Maclaurin..... 278
— Démonstration du théorème de Maclaurin, déduite de la méthode des coefficients indéterminés..... 279

MANNHEIM. — Démonstration du théorème de M. Dupin sur la surface dont les lignes de courbure sont circulaires..... 698

MAXIMA ET MINIMA. — Définition du maximum d'une fonction d'une seule variable..... 472
— Condition du maximum et du minimum. 473
— Plus courte distance d'un point à une courbe..... 474 et 479

MAXIMA ET MINIMA. — Conditions de maximum ou de minimum pour les fonctions de deux variables..... 480
— Extension aux fonctions d'un nombre quelconque de variables..... 482
— Maxima et minima des fonctions implicites. 484

MINIMA (LIGNE). Voy. *Géodésique* (*Ligne*). — Le plan osculateur de la ligne minima sur une surface est normal à la surface. 631
— Les tangentes à une série lignes géodésiques sont normales à une même surface. 661

MONGE. — Propriété caractéristique des droites normales à une même surface..... 649

MURPHY. — Application élégante du théorème de Taylor..... 307

N

NORMAL (PLAN). — Plan normal à une courbe à double courbure..... 92
— Équation du plan normal à une courbe à double courbure..... 92

NORMALE. — Équation de la normale à une courbe plane..... 78 et 79
— Angles formés par la normale à une courbe plane avec les axes de coordonnées..... 81
— Distinction entre la normale intérieure et la normale extérieure..... 82
— Normale à une surface courbe..... 95
— Angles de la normale avec les axes..... 96
— Distinction entre la normale intérieure et la normale extérieure..... 96
— Équation de la normale à une courbe plane..... 78 et 79
— Il n'existe pas en général de surface normale à un faisceau donné de droites.... 647
— Condition nécessaire pour que la surface existe..... 648
— Propriété caractéristique des normales à une surface..... 650
— Expression des angles qui caractérisent la direction de la normale dans le voisinage d'un point donné..... 651
— Lorsque des rayons normaux à une surface sont réfractés, quelle que soit la surface de séparation des milieux, ils restent normaux à une surface..... 659

NORMALE. — Surface tangente aux normales d'une surface donnée..... 673
— Cette surface a deux nappes qui, vues d'un point quelconque, paraissent se couper à angle droit..... 675
— Lorsque les normales d'une surface sont tangentes à une sphère, elles sont aussi tangentes à un cône..... 676

NORMALE (PRINCIPALE). — Sa définition.... 587
— Calcul des angles qu'elle forme avec les axes..... 587
— Surface lieu des normales principales... 596
— Les normales principales ne sont pas tangentes à une même courbe..... 597
— Plus courte distance de deux normales principales infiniment voisines..... 600
— Normale principale de la développée d'une courbe..... 613

NORMALE (SOUS-). — Expression de la sous-normale..... 680
— Expression de la sous-normale en coordonnées rectilignes..... 80
— Expression de la ligne que l'on nomme sous-normale en coordonnées polaires.. 87

NOTATION SYMBOLIQUE. — Représentation symbolique de la série de Taylor..... 343
— Application de la notation symbolique au développement de $\varphi(x+h)-\varphi(x)$... 344
— Démonstration du théorème d'Herschel. 345

O

Nos des §§

Ombilics. — Leur définition 635
— Il faut deux équations pour les déterminer..... 635
Orthogonales (Courbes). — Distance de deux courbes infiniment voisines..... 507
— Expression du rayon de courbure en fonction des coefficients de la distance de deux points voisins..... 508
— Théorème de M. Lamé sur la variation des courbures de deux systèmes de courbes planes orthogonales..... 511
— Loi de variation des côtés des rectangles qui décomposent un plan..... 514
— Courbes orthogonales sur la sphère, théorèmes analogues à ceux qui se rapportent aux lignes planes..... 556 à 561
— Théorème analogue relatif aux lignes tracées sur quelques surfaces..... 739
— Théorème de M. Dupin..... 681
Osculateur (Cercle). — Définition du cercle osculateur..... 10
— Se présente à l'occasion de la plus courte distance d'un point à une courbe..... 474

Nos des §§

Osculateur (Cercle). — Il ne diffère pas du cercle de courbure..... 540
— Le cercle osculateur d'une courbe à double courbure ne diffère pas du cercle de courbure..... 583
Osculateur (Plan). — Sa définition. 562 à 566
— L'angle du plan osculateur avec la tangente voisine est infiniment petit du second ordre..... 567
— Intersection du plan osculateur avec la tangente voisine..... 568
— Intersection de deux plans osculateurs infiniment voisins..... 569
— Intersection de trois plans osculateurs infiniment voisins..... 570
— Surface-enveloppe des plans osculateurs.. 571
— Équation du plan osculateur..... 574
— Plan osculateur de l'hélice..... 577
— L'axe du plan osculateur est l'intersection de deux plans normaux voisins..... 593
— Distance d'une courbe au plan osculateur. 608
Osculatrice (Sphère). — Sa définition.... 601
— Détermination de son centre et de son rayon..... 603 à 606
Osculatrices (Courbes). — Leur définition. 539

P

Padula. — Remarque relative aux points singuliers..... 467
Plan tangent. — Démonstration géométrique de l'existence du plan tangent en un point d'une surface..... 15
— Le plan tangent d'une surface est à distance infiniment petite du second ordre de tout point de la surface infiniment voisin du point de contact..... 16
— Condition pour qu'un point puisse être substitué à un autre dans la détermination d'un plan tangent..... 17
— Détermination géométrique de quelques plans tangents..... 17
— Équation du plan tangent à une surface. 94
— Détermination de quelques plans tangents..... 98 et 99
— Remarque relative aux problèmes précédents..... 100
— Plan tangent d'une surface réglée..... 102
— Cas où la surface réglée est développable. 103

Poinsot. — A levé le premier les difficultés relatives aux développements de $\sin mx$ et de $\cos mx$ en séries ordonnées suivant les puissances de $\sin x$ et de $\cos x$. 298
— A le premier précisé le sens des formules sur le développement des fonctions angulaires..... 385
Poisson. — Objection à la formule $(2\cos x)^m = \cos mx + m\cos(m-2)x + \ldots$ donnée par Euler..... 384
Produits infinis. — Expression remarquable de π sous forme de produits infinis. 416
— Développement en série du produit $(1+xz)(1+x^2z)(1+x^3z)\ldots$ 327
— Développement de $(1+xz)(1+x^3z)(1+x^5z)\ldots$ 328
— Développement de $(1+x(1+x^2)(1+x^4)\ldots$ 329
— Développement de $(1-x)(1+x^2)(1+x^3)\ldots$ 330
— Développement de e^{-a} en produit..... 335

Nos des §§

PRODUITS INFINIS. — Condition de convergence de $1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\ldots(1+\alpha_n),\ldots$ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ étant réels et de même signe 400

— Quels que soient les signes de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$, le produit est convergent lorsque les deux séries

$$\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n\ldots$$
$$\alpha_1^2+\alpha_2^2+\ldots+\alpha_n^2\ldots$$

sont toutes deux convergentes 401

— Produits dont les facteurs sont imaginaires 403

— Expression de $\sin x$ sous forme de produit infini 404

Nos des §§

PRODUITS INFINIS. — Expression de $\cos x$ .. 405

— Expression de $\dfrac{\cos x-\cos a}{1-\cos a}$ 406

— Expression de $\dfrac{\cos x+\cos a}{1+\cos a}$ 406

— Expression de $\cos x+\operatorname{tang}\frac{1}{2}a\sin x$ 407

— Expression de $\cos x-\operatorname{tang}\frac{1}{2}a\sin x$ 407

— Expression de $\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$, $\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ 408

R

REBROUSSEMENT (POINT DE). Voy. *Singulier*.

— Le rayon de courbure est nul en un point de rebroussement de première espèce ..... 501 et 502

RÉSIDU. — Définition du résidu d'une fonction 434

— Toute fonction qui devient infinie n'a pas un résidu correspondant 435

— Trouver le résidu d'une fonction donnée pour une valeur de la variable qui la rend infinie 436

— Notations employées pour représenter les résidus 438

— Si $\varphi(x)$ devient infinie pour $x=a$, la différence

$$\varphi(x)-\mathcal{L}\frac{\varphi(z)(z-a)}{(x-z)[(z-a)]}$$

conserve une valeur finie 439

— Application du théorème précédent à la décomposition des fractions rationnelles 441

— Somme des résidus d'une fraction rationnelle ..... 442 et 443

RÉSIDU. — Changement de la variable indépendante dans un résidu 444

— Application de la théorie des résidus à la démonstration de quelques séries 447

— Application de la théorie des résidus au calcul des fonctions symétriques des racines d'une équation 448

— Extension au cas de deux équations à deux inconnues 450

ROBERTS (WILLIAM). — Remarque sur un mode de transformation des courbes qui n'altère pas l'angle sous lequel elles se coupent 90

ROCHE. — A donné une expression du reste de la série de Taylor 275

RODRIGUES. — A donné le premier une expression remarquable de la fonction désignée par X_n 355

— Propriété caractéristique des lignes de courbure 669

ROULETTE. — Rayon de courbure d'une roulette 506

S

SCHLOMILCH. — A donné une expression du reste de la série de Taylor 275

SECTIONS PRINCIPALES. — Leur définition... 627

— Moyen de les déterminer 633

— Relation remarquable entre des variations relatives à deux déplacements effectués suivant les sections principales 636

— Surface dont les lignes de courbure sont des sections principales 700

SÉRIES. — Définition d'une série convergente et divergente 220

SÉRIES. — Sommation immédiate de quelques séries ..... 221, 222, 223 et 224

— Sommation de quelques séries par la décomposition en séries plus simples ..... 225 et 226

— Transformation d'Euler pour les séries ordonnées suivant les puissances de x.. 250

— Nécessité de n'employer dans la transformation que des séries convergentes... 251

— Remarque curieuse à ce sujet 251

— Seconde démonstration qui donne une limite de l'erreur commise 252

Nos des §§

SÉRIES. — Sommation par la méthode de Stirling..... 253 et 254
— Méthode de M. Kummer... 255, 256 et 257
— Multiplication de deux séries à termes réels et positifs..... 269
— Multiplication de deux séries telles, que les modules des termes forment une série convergente..... 270
— Développement de a^x..... 280
— Développement de $l(1+x)$..... 281
— Singularité que présente cette série pour $x=1$, lorsque l'on groupe convenablement les termes..... 282
— Développement de $(1+x)^m$..... 283
— Condition de convergence de la série précédente, pour $x=1$..... 284
— On peut, du développement de $(1+x)^m$, déduire celui de $l(1+x)$..... 285
— On peut également en déduire le développement de arc sin x..... 286
— Et celui de $(1-2\alpha x+x^2)^{-\frac{1}{2}}$..... 288
— Définition et expression de la fonction nommée X_n..... 288
— Développement de sin x..... 289
— Développement de cos x..... 290
— Développement de cos mx en série ordonnée suivant les puissances de sin x. 291
— Développement de sin mx en série ordonnée suivant les puissances de sin x. 292
— On en déduit le développement de x en série ordonnée suivant les puissances de sin x..... 294
— On en déduit aussi les développements de sin x et de cos x en séries ordonnées suivant les puissances de x..... 295
— Développement de $\frac{\sin mx}{\cos^m x}$ en série ordonnée suivant les puissances de tang x. 299
— Développement de arc tang x..... 300
— Développement de arc tang $(x+h)$.... 301
— Diverses conséquences de cette formule. 301
— Développement de arc sin x..... 302
— Développement de $(\text{arc sin})^2$..... 303
— Développement de $x \cot x$..... 304
— Développement de $\frac{x}{e^x-1}$ et de $\frac{x}{e^x+1}$... 305
— Divers développements déduits de celui de $x \cos x$..... 306
— Série de Bernoulli..... 309
— Application de la série de Bernoulli au calcul numérique de $\sqrt{2}$ et de $\sqrt[3]{3}$..... 310
— Série de Lagrange..... 311
— Généralisation de la formule..... 312
— Quelle est la racine développée..... 313
— Lorsqu'une fonction est développable en série ordonnée suivant les puissances de x, le développement de la dérivée ne contient pas de terme en $\frac{1}{x}$..... 314

SÉRIES. — Démonstration de la formule de Lagrange par Jacobi..... 314
— Développement de $(1-2ax-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ déduit de la formule de Lagrange..... 315
— Développement de $\left(\frac{2}{1+\sqrt{1+x}}\right)^k$ 316
— Racine de l'équation du second degré développée par la formule de Lagrange. 317
— Racine de l'équation $x^{m+1}+ax-b=0$. 318
— Racine de l'équation
$$a_0 = a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$
développée suivant les puissances de a_0. 319
— Théorème de Cayley..... 320
— Série de Burmann..... 321
— Application au développement de e^{az} en série ordonnée suivant les puissances de ze^{bz} 322
— Série d'Abel..... 323
— Développement en série de quelques produits infinis..... 327 et 330
— Puissance $n^{ième}$ d'une série 331
— Théorème d'Eisenstein démontré par M. Sylvester..... 332
— Série de Stirling..... 333
— Formule de M. Boole..... 334
— Formule de M. Tchebitchef..... 335
— Limites hors desquelles le développement d'une fonction en série ordonnée suivant les puissances de la variable est impossible..... 379
— Développement de $l(1+z)$ lorsque z est imaginaire..... 381
— Série remarquable déduite de la précédente..... 382
— Développement de $(1+z)^m$ lorsque z est imaginaire..... 384
— Développement de $\frac{x}{e^x-1}$..... 387
— Développement de tang x et de cosec x. 388
— Développement de $(1-2\alpha z+\alpha^2)^{-\frac{1}{2}}$ expression des coefficients..... 389
— Développement de la fonction y définie par l'équation
$$\text{tang } y = \cos\alpha . \text{tang } x. \ldots\ldots$$ 390
— Démonstration des formules
$$\cot x = \frac{1}{x} + \frac{1}{\pi+x} - \frac{1}{\pi-x} + \ldots$$
$$\text{tang } x = \frac{1}{\frac{\pi}{2}-x} - \frac{1}{\frac{\pi}{2}+x} + \frac{1}{\frac{3\pi}{2}-x} + \ldots$$
$$\frac{\pi}{\sin a\pi} = \frac{1}{a} + \frac{1}{1-a} - \frac{1}{1+a} + \ldots$$ 409

Nos des §§

SÉRIES. — Démonstration de l'équation

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots \quad 410$$

— Démonstration des séries

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots$$

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots$$

$$\frac{\pi^3}{32} = 1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \ldots \quad 414$$

— Développement de x^3 en série ordonnée suivant les puissances de $\sin x$..... 415

— Quelques séries déduites de la théorie des résidus..... 447

— Emploi des séries pour trouver la véritable valeur d'une forme indéterminée..... 458, 459, 460 et 461

SÉRIES A TERMES ALTERNATIVEMENT POSITIFS ET NÉGATIFS. — Une série est toujours convergente lorsque les valeurs absolues de ses termes forment une suite finie. 244

— La réciproque n'est pas exacte..... 247

— Influence de l'ordre des termes d'une série convergente..... 248

SÉRIES DIVERGENTES. — Conséquences absurdes auxquelles peut conduire l'introduction des séries divergentes dans les calculs..... 228

SÉRIES IMAGINAIRES. — Condition de convergence d'une série imaginaire..... 249

— La série

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n \ldots$$

dans laquelle $a_0, a_1, \ldots, a_n$ vont en diminuant, est convergente pour toute valeur imaginaire de x dont le module est l'unité..... 249

SÉRIES ORDONNÉES SUIVANT LES PUISSANCES D'UNE VARIABLE. — Toute série ordonnée suivant les puissances de x, dont les termes ne croissent pas indéfiniment pour $x = x_1$, est convergente pour une valeur de module moindre que celui de x_1..... 259

— Cercle de convergence..... 261

— Si une série ordonnée suivant les puissances de x est convergente pour une valeur de x, elle l'est, par cela même, pour toute valeur de module moindre.. 258

— Théorème d'Abel relatif à la continuité de ces séries..... 265

— Deux séries ordonnées suivant les puissances de x ne peuvent être égales pour les valeurs comprises entre deux limites données, sans être identiques..... 268

SERRET. — Formule de Stirling pour l'expression du produit $1.2...n$ déduite du théorème de Wallis..... 417

Nos des §§

SERRET. — Formules élégantes relatives aux courbes à double courbure..... 590

SINGULIERS (POINTS). — Leur définition..... 462

— Leur caractère analytique..... 463

— Points isolés..... 464

— Points de rebroussement de première espèce..... 464

— Points de rebroussement de seconde espèce..... 465

— Remarque relative à la recherche des points singuliers..... 467

— Points singuliers des surfaces..... 469

STIRLING. — Sommation d'une série donnée dans son ouvrage sur la sommation des séries..... 222

— Série de Stirling..... 333

— Méthode de sommation des séries à termes positifs..... 253

— Formule remarquable pour l'expression approchée du produit $1.2.3...n$..... 417

SUBSTITUTION. — Principe général sur la substitution des infiniment petits dans les limites des rapports ou des sommes. 11

— Substitution d'un point à un autre dans la recherche d'une tangente et d'un plan tangent..... 13 et 17

SURFACE DE RÉVOLUTION. — La normale à une surface de révolution rencontre l'axe. 98

— Distance de deux points infiniment voisins d'une surface de révolution..... 130

— Équation aux dérivées partielles..... 204

SURFACE ENGENDRÉE PAR UNE DROITE QUI RENCONTRE UNE DROITE FIXE. — Son équation aux dérivées partielles..... 207

SURFACES. — Surface des ondes..... 111

— Points singuliers des surfaces, leur caractère analytique commun..... 469

— Cône tangent à une surface en un point singulier..... 470

— Lignes suivant lesquelles une surface est touchée par un plan..... 471

SURFACES-CANAUX. — Surfaces-canaux considérées comme enveloppes..... 113

— Leur équation à dérivées partielles..... 213

SURFACES CONIQUES. — Détermination du plan tangent, équation aux dérivées partielles. 203

SURFACES CONOÏDES. — Leur équation aux dérivées partielles..... 205

SURFACES COURBES. — Équation du plan tangent à une surface..... 94

— Équation de la normale..... 95

— Distinction entre la normale intérieure et la normale extérieure..... 96

— Équation aux dérivées partielles d'une surface cylindrique..... 202

SURFACES DÉVELOPPABLES. — Surfaces développables considérées comme enveloppes. 112

— Leur équation à dérivées partielles..... 209

Nos des §§

SURFACES DÉVELOPPABLES. — Même équation déduite d'une propriété caractéristique des surfaces développables..... 210

SURFACES ENVELOPPES. — La surface enveloppe d'une série de surfaces dont l'équation contient un paramètre arbitraire est le lieu des intersections de chacune d'elles avec la surface voisine..... 106

— Équation de la surface enveloppe..... 107

— Surface enveloppe des surfaces dont l'équation contient deux paramètres..... 108

— Surfaces développables..... 112

SURFACES GAUCHES A PLAN DIRECTEUR. — Leur équation aux dérivées partielles..... 208

Nos des §§

SURFACES HOMOFOCALES DU SECOND DEGRÉ. — Système de coordonnées curvilignes fourni par ces surfaces..... 128

— Distance de deux points infiniment voisins dans ce système..... 129

SURFACES RÉGLÉES. — Loi suivant laquelle se déplace le plan tangent le long d'une génératrice..... 102

— Condition pour que le plan soit le même tout le long de la génératrice..... 103

— Leur équation à dérivées partielles..... 212

SYLVESTER. — Démonstration d'un théorème d'Eisenstein..... 332

SYMBOLIQUE (EXPRESSION). — Expression symbolique du développement de $\varphi(x+h, y+k)$..... 396

T

TANGENTE (SOUS-). — Expression de la sous-tangente..... 80

— Son expression en coordonnées polaires. 88

TANGENTES. — La distance d'une courbe à sa tangente, à distance infiniment petite du point de contact, est infiniment petite du second ordre..... 8 et 9

— Condition pour que deux points puissent être substitués l'un à l'autre dans la recherche d'une tangente..... 13

— Détermination géométrique de quelques tangentes..... 14

— Le coefficient angulaire de la tangente est égal à la dérivée de l'ordonnée..... 24

— Équation de la tangente à une courbe plane..... 78

— Tangente à la cycloïde..... 83

— Tangente à l'épicycloïde..... 83

— Problèmes sur les tangentes..... 14 et 83

— Remarque relative à quelques problèmes. 87

— Tangente à une courbe dont l'équation est donnée en coordonnées polaires..... 88

— Détermination analytique de quelques tangentes.. 83, 84, 85, 86, 87, 88 et 89

— Tangente à une courbe tracée sur la sphère..... 93

— Différence des tangentes menées aux extrémités d'un arc infiniment petit et terminées à leur point de rencontre..... 519

— Condition pour que des droites soient tangentes à une même courbe..... 573

— La plus courte distance de deux tangentes infiniment voisines est du troisième ordre..... 573

TANGENTES. — Distance de deux tangentes infiniment voisines..... 609

TAYLOR (THÉORÈME DE). — Démonstration de Taylor..... 272

— Expression du reste de la série due à Lagrange..... 273

— Seconde forme du reste due à Cauchy... 274

— Troisième forme du reste due à Schlömilch. 275

— Accroissement infiniment petit d'une fonction déduite du théorème de Taylor.... 276

— Théorèmes relatifs à l'accroissement d'une fonction continue quelconque..... 277

— Application au développement de a^x.... 280

— Au développement de $l(1+x)$..... 281

— Application du théorème de Taylor au développement de $\sin x$..... 290

— Développement de $\cos x$..... 290

— Développement de $\cos mx$ en série ordonnée suivant les puissances de $\sin x$. 291

— Application au développement de $\sin mx$ en série ordonnée suivant les puissances de $\sin x$..... 292

— Développement de $\cos mx$ en série ordonnée suivant les puissances de $\cos x$. 296

— Développement de $\sin mx$ en série ordonnée suivant les puissances de $\cos x$... 297

— Remarque relative aux séries précédentes. 298

— Développement de $\dfrac{\sin^m x}{\cos mx}$ en série ordonnée suivant les puissances de tang x. 299

— Développement de arc tang x..... 300

— Développement de arc tang $(x+h)$.... 301

— Extension à une fonction de deux variables. 391

— Expression du reste..... 392

— Accroissement infiniment petit d'une fonction de deux variables..... 393

Nos des §§

TAYLOR (THÉORÈME DE). — Diverses conséquences de cette formule..... 301
— Développement de arc sin x..... 302
— Développement de $(\text{arc sin } x)^2$..... 303
— Développement de $x \cot x$..... 304
— Développement de $\frac{x}{e^x-1}$ et de $\frac{x}{e^x+1}$ 305
TCHEBITCHEF. — De la formule $F(x)=f_1(x)+f(2x)+f(3x)+\ldots$, déduire le développement de $f(1)$ en série de la forme $f_1(1)=A_1F(1)+A_2F(2)+\ldots$..... 335
TCHEBITCHEF. — Développement de e^{-a} en produit..... 335
— Formule analogue à la précédente..... 336
— Recherche de la fonction de forme donnée, qui s'écarte le moins possible d'une fonction donnée..... 488
TRANSFORMATION PAR RAYONS VECTEURS RÉCIPROQUES. — Les lignes de courbure de la surface transformée correspondent à celles de la proposée..... 683

V

VARIABLE INDÉPENDANTE. — Influence de la variable indépendante sur les différentielles d'ordre supérieur au premier.... 136
— Changement de la variable indépendante. 169
— Cas de plusieurs variables indépendantes. 176
— Changement de la variable indépendante dans le calcul d'un résidu..... 444
VARIABLES. — Changement simultané de toutes les variables lorsqu'il n'existe qu'une seule variable indépendante..... 173
— Changement simultané d'une fonction et des deux variables dont elle dépend... 179
VARIATION. — Variation infiniment petite de la longueur d'une ligne droite..... 219

W

WALLIS. — Formule de Wallis pour l'expression du nombre π..... 416

M. BERTRAND
(élu en 1884).

179211

9 K. 3903

RETURN TO → **Astronomy/Mathematics/Statistics Library**
100 Evans Hall 642-3381

LOAN PERIOD 1 **1 MONTH**	2	3
4	5	6

ALL BOOKS MAY BE RECALLED AFTER 7 DAYS

DUE AS STAMPED BELOW

Due end of SPRING semester
Subject to recall

MAY 18 2002

Rec'd UCB A/M/S

JUL - 8 2002

FORM NO. DD 19

UNIVERSITY OF CALIFORNIA, BERKELEY
BERKELEY, CA 94720

U. C. BERKELEY LIBRARIES
C058599160
QA
300
B5
v.1
MATH-
MAT.
LIBRARY